

CHƯƠNG 4

PHÂN TÍCH QUÁ TRÌNH QUÁ ĐỘ BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN KINH ĐIỂN

4.1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

4.1.1 Phân tích đáp ứng quá độ trong mạch điện tuyến tính thành đáp ứng tự do xếp chồng với đáp ứng xác lập

$$i(t) = i_{xlm}(t) + i_{td}(t) = i_{xlm}(t) + \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} \quad (4.1)$$

Phương pháp tính đáp ứng quá độ trong mạch điện tuyến tính bằng cách phân tích thành đáp ứng tự do xếp chồng với đáp ứng xác lập mới và xác định các hằng số tích phân theo điều kiện đầu gọi là *phương pháp tích phân kinh điển*.

Chú ý:

1. Tất cả các đáp ứng tự do trong mạch điện đều phải có chung các số mũ tất p_k . Có như vậy các phương trình viết theo luật Kirchhoff 1, 2 cho các đáp ứng tự do mới được thỏa mãn ở mọi thời điểm. Nghĩa là:

Ví dụ: Nghiệm của dòng điện tự do nhánh k có dạng:

$$i_{ktd} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

Thì nghiệm của dòng điện tự do ở nhánh l cũng có dạng:

$$i_{ltd} = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}$$

Hoặc nghiệm của điện áp tự do trên phần tử nào đó cũng có dạng:

$$u_{ktd} = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}$$

2. *Về ý nghĩa vật lý:* do không có nguồn kích thích ngoài duy trì và vì trong mạch điện thường có hiện tượng tiêu tán nên đáp ứng tự do thường phải tắt dần theo thời gian, và các số mũ tất p_k của đáp ứng tự do thường phải có *phần thực âm*.

4.1.2 Cách lập phương trình đặc trưng

Cách 1: Đại số hóa hệ phương trình

- Triệt tiêu các nguồn ngoài (nối tắt nguồn áp, cắt bỏ nguồn dòng).
- Viết hệ phương trình vi phân mô tả mạch điện sau thời điểm đóng mở.
- Đại số hóa hệ phương trình vi phân bằng cách thay $\frac{d}{dt} \Leftrightarrow p$, $\int dt \Leftrightarrow \frac{1}{p}$.
- Lập định thức $\Delta(p)$ của các hệ số và cho bằng không.

Cách 2: Đại số hóa sơ đồ mạch điện

- Triệt tiêu các nguồn ngoài.
- Đại số hoá sơ đồ mạch điện sau thời điểm đóng mở bằng cách: R giữ nguyên; L thay pL ;

C thay $\frac{1}{pC}$.

- Tính tổng trở vào $Z_V(p)$ đối với một nhánh bất kỳ rồi cho bằng 0.

4.1.3 Dạng của đáp ứng tự do

Dạng của đáp ứng tự do phụ thuộc vào kết cấu và thông số của sơ đồ mạch điện và quyết định bởi nghiệm của phương trình đặc trưng. Có các trường hợp sau:

1. Trường hợp nghiệm của phương trình đặc trưng có các nghiệm thực, đơn và thường âm $p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_n$, đáp ứng tự do có dạng:

$$i_{td} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} \quad (4.2)$$

Mỗi số hạng $A_k e^{p_k t}$ là một hàm mũ tắt dần có đồ thị như đồ thị hình 4.1. Quá trình tự do có tính chất không dao động.

2. Trường hợp phương trình đặc trưng có một cặp nghiệm phức liên hợp:

$$p_k = -\alpha_k + j\omega_k; \hat{p}_k = -\alpha_k - j\omega_k$$

Lúc đó hai hằng số tích phân tương ứng cũng là 2 số phức liên hợp: $A_k = |A_k| e^{\pm j\gamma_k}$

Đối với cặp nghiệm phức liên hợp thành phần đáp ứng tự do sẽ có dạng:

$$i_{td} = A_k e^{p_k t} + \hat{A}_k e^{\hat{p}_k t} = 2 \operatorname{Re} \left\{ A_k e^{p_k t} \right\} = 2 |A_k| e^{-\alpha_k t} \cos(\omega_k t + \gamma_k) \quad (4.3)$$

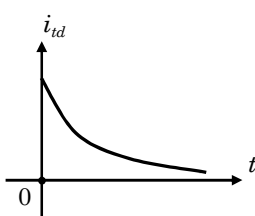
Đó là một hàm hình sin, cos tắt dần và có đồ thị như hình 4.2, đó là trường hợp quá trình tự do có tính chất dao động tắt dần.

3. Trường hợp phương trình đặc trưng có nghiệm bội: $p_1 = p_2 = \dots = p_n$

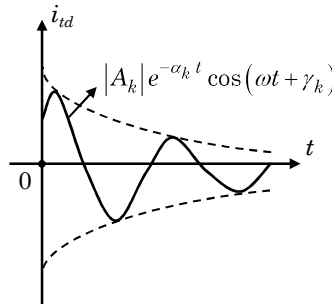
Ví dụ phương trình đặc trưng có một nghiệm kép $p_1 = p_2$ thì thành phần đáp ứng tự do sẽ có dạng:

$$i_{td} = A_1 e^{p_k t} + t A_2 e^{p_k t} \quad (4.4)$$

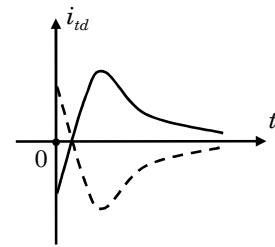
Trong trường hợp này quá trình tự do không dao động nhưng có tính chất tới hạn giữa dao động và không dao động gọi không dao động tới hạn, hình 4.3.



Hình 4.1: Đáp ứng tự do dạng không dao động tắt dần



Hình 4.2: Đáp ứng tự do dạng dao động tắt dần



Hình 4.3: Đáp ứng tự do dạng không dao động tới hạn

4.1.4 Các bước tính quá trình quá độ bằng phương pháp tích phân kinh điển

Để tính quá trình quá độ trong một mạch điện phức tạp bằng phương pháp tích phân kinh điển ta làm theo các bước sau đây:

Bước 1: Giải mạch điện ở chế độ xác lập mới để tìm các đáp ứng xác lập mới.

Bước 2: Lập và giải phương trình đặc trưng để tìm dạng của đáp ứng tự do.

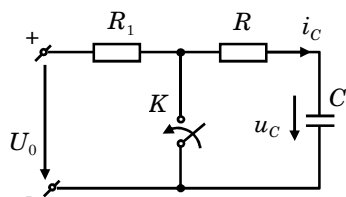
Bước 3: Tìm các điều kiện đầu (sơ kiện).

Bước 4: Dựa vào điều kiện đầu để tính các hằng số tích phân trong biểu thức của đáp ứng quá độ.

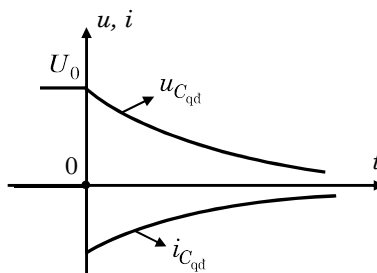
4.1.5 Quá trình quá độ trong mạch điện RC

1. Quá trình tự do

Giả thiết ở chế độ xác lập cũ tụ C được nạp điện áp U_0 , tại thời điểm $t = 0$ khóa K đóng (hình 4.4a). Khi khóa K đóng mạch điện không còn nguồn ngoài duy trì nên quá trình quá độ trùng với quá trình tự do, điện áp và dòng điện quá độ trên điện dung C được xác định theo các biểu thức (4.5),(4.6).



Hình 4.4a: Quá trình tự do trong mạch RC



Hình 4.4b: Đồ thị điện áp và dòng điện quá độ trên điện dung C trong mạch RC

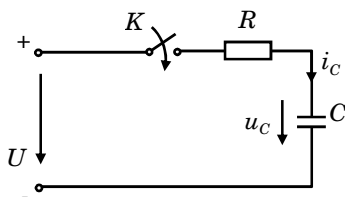
$$u_{C_{qd}} = u_{C_{td}} = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (4.5)$$

$$i_{C_{qd}} = i_{C_{td}} = C u'_{C_{td}} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (4.6)$$

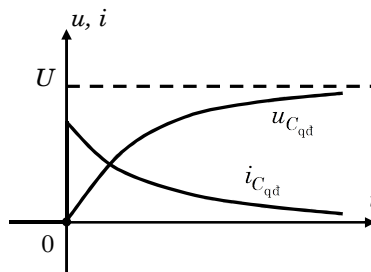
Đồ thị của điện áp và dòng điện tự do trên điện dung C như hình 4.4b.

2. Đóng mạch điện RC vào nguồn điện áp một chiều

Cho mạch điện hình 4.5a với U là nguồn một chiều, tại thời điểm $t = 0$ khóa K đóng. Điện áp và dòng điện quá độ trên điện dung C được xác định theo các biểu thức (4.7),(4.8).



Hình 4.5a: Đóng mạch RC vào nguồn điện áp một chiều



Hình 4.5b: Đồ thị dòng điện và điện áp quá độ trên điện dung C khi đóng mạch RC vào nguồn điện áp một chiều

$$u_{C_{qd}} = U(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) \quad (4.7)$$

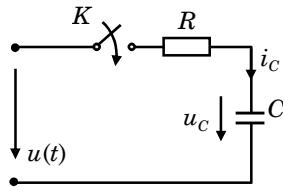
$$i_{C_{qd}} = C u'_{C_{qd}} = \frac{U}{R} e^{-\frac{1}{RC}t} \quad (4.8)$$

Đồ thị của điện áp và dòng điện quá độ trên điện dung C khi đóng vào nguồn điện áp một chiều như hình 4.5b.

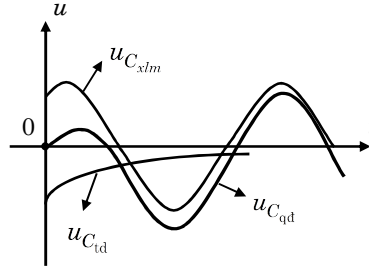
3. Đóng mạch điện RC vào nguồn điện áp xoay chiều hình sin

Cho mạch điện hình 4.6 với $u(t)$ là nguồn điện áp xoay chiều: $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$, tại thời điểm $t = 0$ khóa K đóng. Điện áp và dòng điện quá độ trên điện dung C được xác định theo các biểu thức (4.9), (4.10).

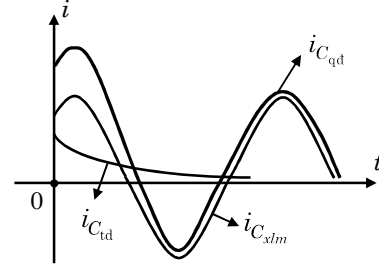
Đồ thị của điện áp và dòng điện quá độ trên điện dung C khi đóng vào nguồn điện áp xoay chiều như hình 4.7a, 4.7b.



Hình 4.6: Đóng mạch RC vào nguồn điện áp xoay chiều hình sin



Hình 4.7a: Đồ thị điện áp khi đóng mạch RC vào nguồn điện áp xoay chiều hình sin



Hình 4.7b: Đồ thị dòng điện khi đóng mạch RC vào nguồn điện áp xoay chiều hình sin

$$u_{C_{qd}} = U_{Cm} \sin\left(\omega t + \psi_u - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - U_{Cm} \sin\left(\psi_u - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.9)$$

$$i_{C_{qd}} = C \left[\omega U_{Cm} \cos\left(\omega t + \psi_u - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{U_{Cm}}{RC} \sin\left(\psi_u - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{t}{RC}} \right] \quad (4.10)$$

Nhận xét:

1. Đặt $\tau = RC$ gọi là hằng số thời gian của mạch điện R - C . Nếu τ càng lớn quá trình phóng nạp (quá trình quá độ) của tụ càng kéo dài. Điều này được giải thích như sau:

Nếu τ lớn thì C lớn hoặc R lớn. C lớn, tụ có khả năng phóng-nạp được nhiều điện tích do đó quá trình phóng-nạp được kéo dài. R lớn, dòng nạp và dòng phóng nhỏ do đó quá trình phóng-nạp cũng được kéo dài.

2. Tại thời điểm ban đầu vì $u_C(0) = 0$ nên tụ điện C như bị ngắn mạch, điện áp nguồn hoàn toàn đặt lên điện trở R , lúc này dòng điện trong mạch là:

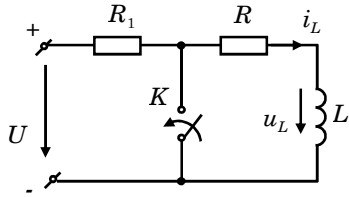
$$i(0) = \frac{u(0)}{R} = \frac{U_m \sin \psi_u}{R}$$

Vì thế nếu trong mạch RC mà giá trị điện trở R nhỏ và đóng mạch điện đúng vào thời điểm điện áp nguồn đạt giá trị cực đại thì dòng điện trong mạch ở thời điểm ban đầu có thể rất lớn.

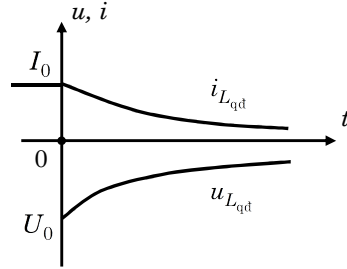
4.1.6 Quá trình quá độ trong mạch điện RL

1. Quá trình tự do

Cho mạch điện hình 4.8a với U là nguồn một chiều, tại thời điểm $t = 0$ khóa K đóng. Khi khóa K đóng mạch điện không còn nguồn ngoài duy trì nên quá trình quá độ trùng với quá trình tự do. Điện áp và dòng điện quá độ trên điện cảm L được xác định theo các biểu thức (4.11), (4.12).



Hình 4.8a: Quá trình tự do trong mạch RL



Hình 4.8b: Đồ thị điện áp và dòng điện quá độ trên điện cảm L trong mạch RL

$$i_{L_{qd}} = i_{L_{td}} = \frac{U}{R_1 + R} e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (4.11)$$

$$u_{L_{qd}} = u_{L_{td}} = L \frac{di_{L_{qd}}}{dt} = -\frac{R}{L} \frac{U}{R_1 + R} e^{-\frac{R}{L}t} = -U_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (4.12)$$

Đồ thị của dòng điện và điện áp tự do trên điện cảm L như hình 4.8b.

2. Đóng mạch điện RL vào nguồn điện áp một chiều

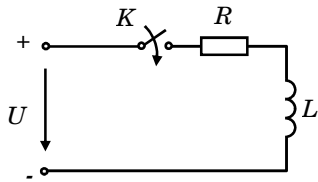
Cho mạch điện hình 4.9a với U là nguồn một chiều, tại thời điểm $t = 0$ khóa K đóng. Dòng điện và điện áp quá độ trên điện cảm L , điện áp quá độ trên điện trở R được xác định theo các biểu thức (4.13), (4.14), (4.15).

$$i_{L_{qd}} = \frac{U}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (4.13)$$

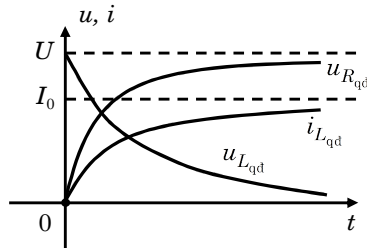
$$u_{L_{qd}} = U e^{-\frac{R}{L}t} \quad (4.14)$$

$$u_{R_{qd}} = U (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (4.15)$$

Đồ thị của dòng điện và điện áp quá độ trên điện cảm L , điện áp quá độ trên điện trở R như hình 4.9b.



Hình 4.9a: Đóng mạch RL vào nguồn điện áp một chiều



Hình 4.9b: Đồ thị dòng điện, điện áp khi đóng mạch RL vào nguồn điện áp một chiều

2. Đóng mạch điện RL vào nguồn điện áp xoay chiều hình sin

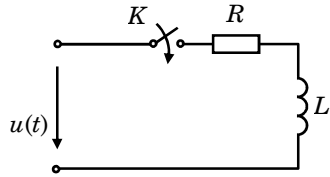
Cho mạch điện hình 4.10a với $u(t)$ là nguồn điện áp xoay chiều: $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$, tại thời điểm $t = 0$ khóa K đóng. Dòng điện và điện áp quá độ trên điện cảm L được xác định theo các biểu thức (4.16), (4.17).

$$i_{L_{qd}} = I_{Lm} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - I_{Lm} \sin(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t} \quad (4.16)$$

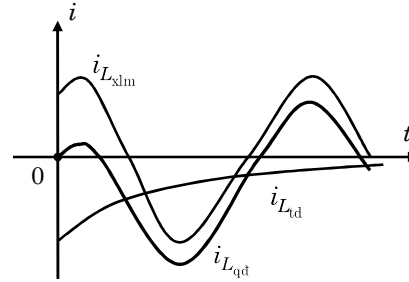
$$u_{L_{qd}} = \left[\omega L I_{Lm} \cos(\omega t + \psi_u - \varphi) + R I_{Lm} \sin(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t} \right] \quad (4.17)$$

Đồ thị của dòng điện quá độ trên điện cảm L như hình 4.10b.

$\tau = \frac{L}{R}$ là hằng số thời gian của mạch điện RL .



Hình 4.10a: Đóng mạch RL vào nguồn điện áp xoay chiều hình sin



Hình 4.10b: Đồ thị dòng điện khi đóng mạch RL vào nguồn điện áp xoay chiều hình sin

4.1.7 Quá trình quá độ trong mạch điện RLC

1. Quá trình tự do

Cho mạch điện hình 4.11 với U_0 là nguồn một chiều, tại thời điểm $t = 0$ khóa K đóng.

Phương trình đặc trưng của mạch điện:

$$R + pL + \frac{1}{pC} = 0$$

$$\Rightarrow p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\text{Nghiệm của phương trình đặc trưng: } p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Tùy theo quan hệ giữa các thông số R , L , C của mạch điện mà $p_{1,2}$ có thể là nghiệm thực đơn, nghiệm phức liên hợp hoặc nghiệm bội.

a. Nếu $p_{1,2}$ là nghiệm thực, đơn \rightarrow trường hợp phóng điện không dao động:

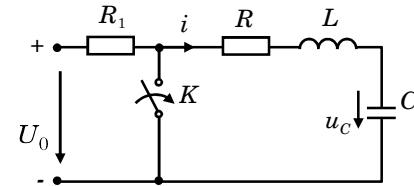
$$\text{Điều kiện: } \Delta > 0 \Leftrightarrow \Delta = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{LC} > 0 \Leftrightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$u_{C_{qd}} = u_{C_{td}} = \frac{U_0}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \quad (4.18)$$

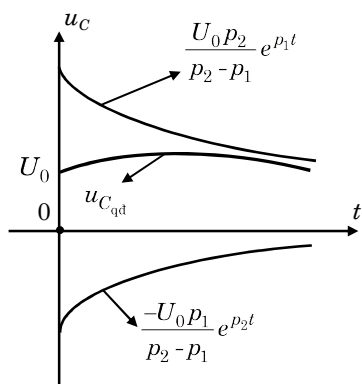
$$i_{qd} = i_{td} = \frac{C p_2 p_1 U_0}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{U_0}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \quad (4.19)$$

$$\text{(với chú ý } p_2 p_1 = \frac{1}{LC} \text{)}$$

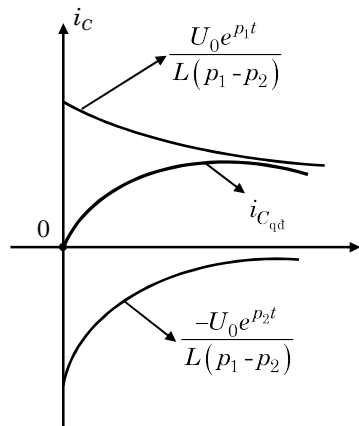
Giả thiết $|p_2| > |p_1|$, đồ thị của điện áp và dòng điện tự do trên điện dung C ứng với trường hợp phương trình đặc trưng có nghiệm thực, đơn như hình 4.12a, 4.12b.



Hình 4.11: Quá trình tự do trong mạch RLC



Hình 4.12a: Đồ thị điện áp trên điện dung ứng với trường hợp phương trình đặc trưng có nghiệm thực, đơn



Hình 4.12b: Đồ thị dòng điện trong mạch ứng với trường hợp phương trình đặc trưng có nghiệm thực, đơn

b. Nếu $p_{1,2}$ là nghiệm phức liên hợp \rightarrow trường hợp phóng điện dao động:

$$\text{Điều kiện: } \Delta < 0 \Leftrightarrow \Delta = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{LC} < 0 \Leftrightarrow R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Nghiệm của phương trình đặc trưng sẽ là cặp nghiệm phức liên hợp:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = -\alpha \pm j\omega$$

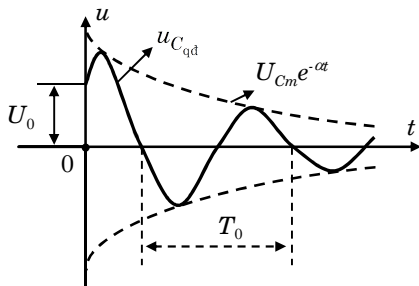
$$\text{Với } \alpha = \frac{R}{2L}; \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$u_{C_{qd}} = u_{C_{td}} = \left| \frac{U_0}{\cos \gamma} \right| e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \gamma) = U_{Cm} e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \gamma) \quad (4.20)$$

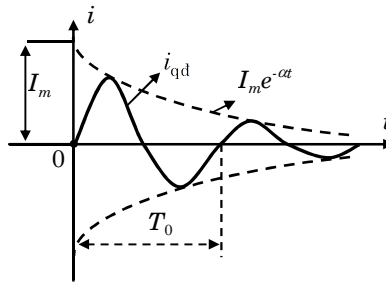
$$i_{C_{qd}} = C u'_{C_{td}} = -C U_{Cm} e^{-\alpha t} [\alpha \cos(\omega t + \gamma) + \omega \sin(\omega t + \gamma)] \quad (4.21)$$

$$\text{Trong đó: } A = \frac{U_0}{\cos \gamma} \quad \gamma = -\text{arctg} \frac{\alpha}{\omega}$$

Đồ thị của điện áp và dòng điện quá độ trên điện dung C ứng với trường hợp phương trình đặc trưng có nghiệm phức như hình 4.13a, 4.13b.



Hình 4.13a: Đồ thị điện áp trên điện dung C ứng với trường hợp phương trình đặc trưng có nghiệm phức liên hợp



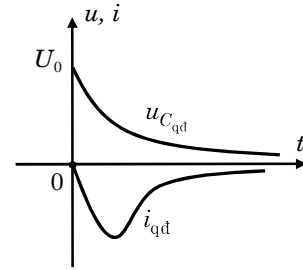
Hình 4.13b: Đồ thị dòng điện trong mạch ứng với trường hợp phương trình đặc trưng có nghiệm phức liên hợp

c. Trường hợp phóng điện không dao động tới hạn:

Nếu $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ thì hai nghiệm của phương trình đặc trưng là nghiệm thực và trùng nhau

(nghiệm kép): $p_1 = p_2 = -\frac{R}{2L} = -\alpha$

Hình 4.14: Dạng đồ thị dòng điện trong mạch và điện áp trên điện dung C ứng với trường hợp phương trình đặc trưng có nghiệm kép



$$u_{C_{td}} = U_0(1 + \alpha t)e^{-\alpha t} \tag{4.22}$$

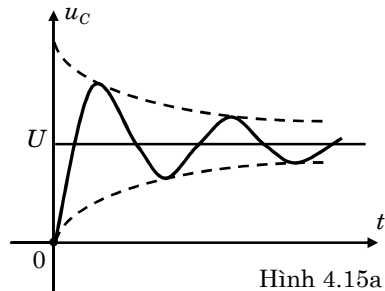
$$i_{td} = -C\alpha^2 U_0 t e^{-\alpha t} = -\frac{U_0}{L} t e^{-\alpha t} \tag{4.23}$$

Đồ thị của dòng điện trong mạch và điện áp quá độ trên điện dung C ứng với phương trình đặc trưng có nghiệm kép như hình 4.14.

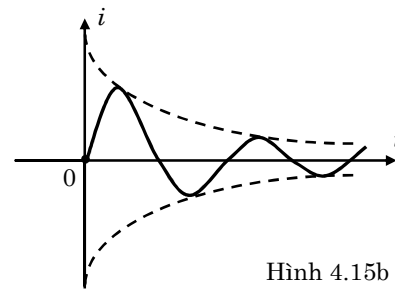
2. Đóng mạch điện RLC vào nguồn điện áp một chiều

Khi đóng mạch điện RLC vào một điện áp không đổi có giá trị bằng U, điện áp quá độ trên điện dung C sẽ biến thiên từ trị số ban đầu bằng không đến trị số xác lập bằng điện áp của nguồn U, còn dòng điện cũng biến thiên từ trị số ban đầu bằng không cuối cùng lại trở về xác lập bằng không.

Trong trường hợp $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ quá trình quá độ có tính chất dao động, đồ thị của dòng điện trong mạch, điện áp trên điện dung C có dạng như hình 4.15a, 4.15b.

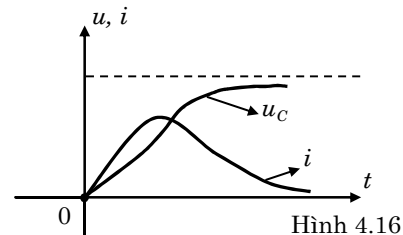


Hình 4.15a



Hình 4.15b

Trong trường hợp $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ quá trình quá độ có tính chất không dao động, đồ thị của dòng điện trong mạch, điện áp trên điện dung C có dạng như hình 4.16.



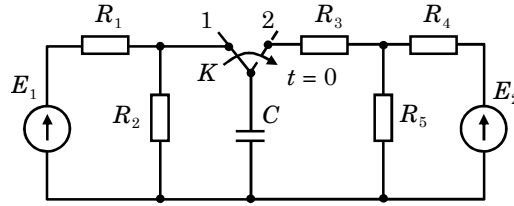
Hình 4.16

3. Đóng mạch điện RLC vào nguồn điện áp xoay chiều hình sin

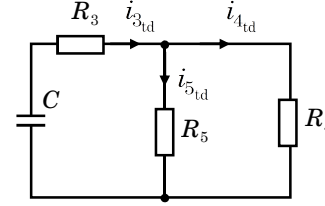
Trong trường hợp đóng mạch điện RLC vào nguồn điện áp xoay chiều hình sin $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$ thì điện áp quá độ và dòng điện quá độ trên điện dung bao gồm 2 thành phần: Thành phần xác lập mới trên điện dung biến thiên hình sin theo thời gian với tần số của nguồn, thành phần tự do cũng có tính chất dao động hay không dao động là tùy theo quan hệ giữa các thông số R, L, C . Nhưng tùy theo quan hệ giữa tần số riêng của mạch ω_0 với tần số ω của nguồn kích thích và tùy thời điểm đóng mạch điện, quá trình quá độ có nhiều vẻ rất khác nhau.

4.2 BÀI TẬP GIẢI MẪU

Bài tập 1: Cho mạch điện hình 4.17, tìm phương trình đặc trưng của mạch điện theo phương pháp đại số hóa phương trình, biết tại thời điểm $t = 0$ khóa K chuyển từ vị trí 1 sang vị trí 2.



Hình 4.17



Hình 4.17a

Giải:

Khi khóa K chuyển từ vị trí 1 sang vị trí 2, theo hình 4.17a hệ phương trình viết cho đáp ứng tự do là:

$$\begin{cases} i_{3td} - i_{4td} - i_{5td} = 0 \\ R_3 i_{3td} + \frac{1}{C} \int i_{3td} dt + R_5 i_{5td} = 0 \\ R_4 i_{4td} - R_5 i_{5td} = 0 \end{cases}$$

Đại số hóa hệ phương trình ta được:

$$\begin{cases} i_{3td} - i_{4td} - i_{5td} = 0 \\ R_3 i_{3td} + \frac{1}{pC} i_{3td} + R_5 i_{5td} = 0 \\ R_4 i_{4td} - R_5 i_{5td} = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta(p) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_3 + \frac{1}{pC} & 0 & R_5 \\ 0 & R_4 & -R_5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta(p) = (R_3 R_4 C + R_4 R_5 C + R_5 R_3 C)p + (R_4 + R_5) = 0$$

Bài tập 2: Cho mạch điện như hình 4.18 với các thông số:

$$e(t) = 100\sqrt{2} \sin(10^4 t + 45^\circ) \text{ (V)}, j(t) = 2\sqrt{2} \sin(10^4 t + 135^\circ) \text{ (A)}$$

$$R = 100 \text{ (}\Omega\text{)}, L = 5 \text{ (mH)}, C = 2 \text{ (}\mu\text{F)}$$

Ở chế độ xác lập cũ khóa K mở, tại thời điểm $t = 0$ khóa K đóng. Yêu cầu:

- Tính dòng điện quá độ qua nhánh không nguồn.
- Vẽ đồ thị dòng điện quá độ tìm được trong ý 1.

Giải:

- Dòng điện quá độ qua nhánh không nguồn:

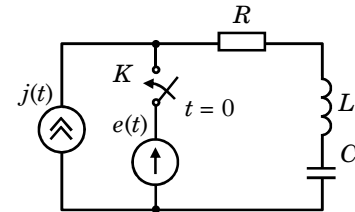
Giải mạch điện ở chế độ xác lập mới: hình 4.18a.

Cho $j(t)$ khép mạch qua 1 nhánh nào đó (trừ nhánh cần tìm), giả thiết là cho $j(t)$ khép mạch qua nguồn $e(t)$.

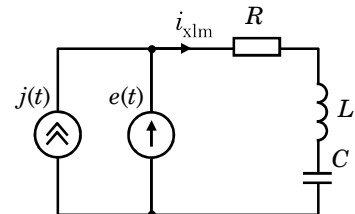
$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{\dot{E}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{100 \angle 45^\circ}{100 + j(50 - 50)} = 1 \angle 45^\circ \text{ (A)}$$

$$i_{xlm}(t) = \sqrt{2} \sin(10^4 t + 45^\circ) \text{ (A)}$$

Lập và giải phương trình đặc trưng (hình 4.18b):



Hình 4.18



Hình 4.18a

$$Z_V(p) = R + pL + \frac{1}{pC} = \frac{LCp^2 + RCp + 1}{pC}$$

$$Z_V(p) = LCp^2 + RCp + 1 = p^2 + 2.10^4 p + 10^8 = 0$$

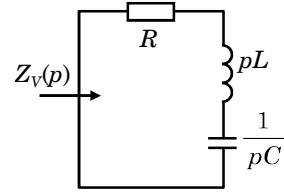
Nghiệm: $p_1 = p_2 = -10^4$

Dạng nghiệm của dòng điện tự do là:

$$i_{td}(t) = A_1 e^{-10^4 t} + t A_2 e^{-10^4 t}$$

$$i_{qd}(t) = A_1 e^{-10^4 t} + t A_2 e^{-10^4 t} + \sqrt{2} \sin(10^4 t + 45^\circ)$$

$$i'_{qd}(t) = -10^4 A_1 e^{-10^4 t} + A_2 e^{-10^4 t} - 10^4 t A_2 e^{-10^4 t} + \sqrt{2} \cdot 10^4 \cos(10^4 t + 45^\circ)$$



Hình 4.18b

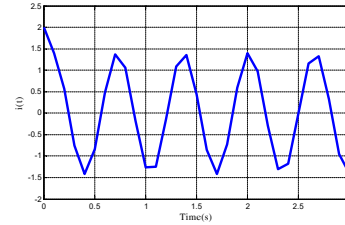
Tìm điều kiện đầu:

$$i(t) = j(t) = 2\sqrt{2} \sin(10^4 t + 135^\circ) \text{ (A)}$$

$$i'(t) = j'(t) = 2\sqrt{2} \cdot 10^4 \cos(10^4 t + 135^\circ) \text{ (A/s)}$$

$$i(0) = j(0) = 2\sqrt{2} \sin 135^\circ = 2 \text{ (A)}$$

$$i'(0) = j'(0) = 2\sqrt{2} \cdot 10^4 \cos 135^\circ = -2.10^4 \text{ (A/s)}$$



Hình 4.18c

Thay $t = 0$ vào biểu thức của dòng điện quá độ:

$$\begin{cases} i(0) = 2 = A_1 + 1 \\ i'(0) = -2.10^4 = -10^4 A_1 + A_2 + 10^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = -2.10^4 \end{cases}$$

Vậy: $i_{qd}(t) = e^{-10^4 t} - 2.10^4 t e^{-10^4 t} + \sqrt{2} \sin(10^4 t + 45^\circ) \text{ (A)}$

2. Đồ thị dòng điện quá độ: hình 4.18c.

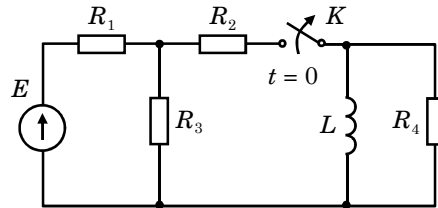
Bài tập 3: Cho mạch điện như hình 4.19 với các thông số:

$E = 150 \text{ (V)}$ (một chiều)

$R_1 = 7,5 \text{ (}\Omega\text{)}, R_2 = 10 \text{ (}\Omega\text{)}, R_3 = 30 \text{ (}\Omega\text{)}, R_4 = 6 \text{ (}\Omega\text{)}, L = 12 \text{ (mH)}$

Ở chế độ xác lập cũ khóa K đóng, tại thời điểm $t = 0$ khóa K mở. Yêu cầu:

- Tính điều kiện đầu độc lập $i_L(0)$.
- Tính năng lượng tích lũy ban đầu trên điện cảm L .
- Tính hằng số thời gian của mạch điện khi $t > 0$.
- Tính dòng điện quá độ trên điện cảm L : $i_{L_{qd}}(t)$.



Hình 4.19

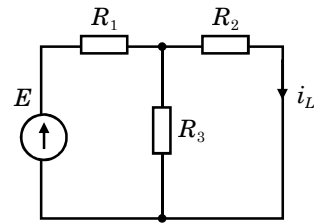
Giải:

1. Điều kiện đầu độc lập $i_L(0)$:

Từ sơ đồ hình 4.19a ta có:

$$i_L(0^-) = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

$$\text{Thay số: } i_L(0^-) = \frac{150}{7,5 + \frac{10 \cdot 30}{10 + 30}} \frac{30}{10 + 30} = 7,5 \text{ (A)}$$



Hình 4.19a

Vì bài toán đã cho là bài toán chỉnh nên: $i_L(0) = i_L(0^-) = 7,5 \text{ (A)}$

2. Năng lượng tích lũy ban đầu trên điện cảm L :

$$W_{TT}(0) = \frac{1}{2} Li_L^2(0) = \frac{1}{2} 12 \cdot 10^{-3} \cdot 7,5^2 = 337,5 \text{ (mJ)}$$

3. Hằng số thời gian: $\tau = \frac{L}{R_4} = \frac{12 \cdot 10^{-3}}{6} = 2 \text{ (ms)}$

4. Dòng điện quá độ $i_{L_{qd}}(t)$:

Dòng điện xác lập mới: $i_{L_{xlm}}(t) = 0 \text{ (A)}$

Lập và giải phương trình đặc trưng (hình 4.19b):

$$Z_V = pL + R_4 = 0 \Rightarrow p = -\frac{R_4}{L} = -\frac{6}{12 \cdot 10^{-3}} = -500$$

$$i_{L_{td}}(t) = Ae^{-500t} \text{ (A)}$$

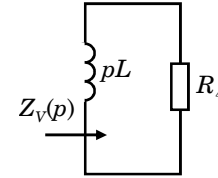
$$\Rightarrow i_{L_{qd}}(t) = i_{L_{td}}(t) + i_{L_{xlm}}(t) = Ae^{-500t} \text{ (A)}$$

Điều kiện đầu: $i_L(0) = i_L(0^-) = 7,5 \text{ (A)}$

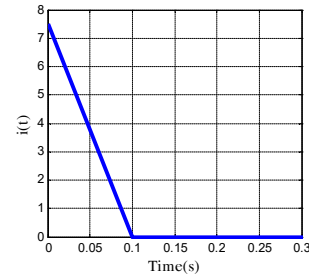
Thay tại thời điểm $t = 0$ ta có: $i_{L_{qd}}(0) = A = 7,5$

Vậy dòng điện quá độ: $i_{L_{qd}}(t) = 7,5e^{-500t} \text{ (A)}$

Đồ thị dòng điện quá độ $i_{L_{qd}}(t)$: hình 4.19c.



Hình 4.19b



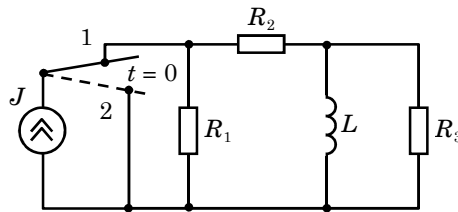
Hình 4.19c

Bài tập 4: Cho mạch điện như hình 4.20 với các thông số:

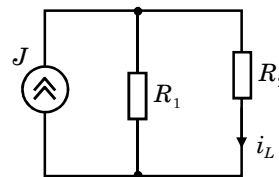
$$J = 10 \text{ (A)} \text{ (một chiều)}, R_1 = 10 \text{ (}\Omega\text{)}, R_2 = 6 \text{ (}\Omega\text{)}, R_3 = 4 \text{ (}\Omega\text{)}, L = 0,32 \text{ (H)}$$

Ở chế độ xác lập cũ khóa K ở vị trí 1, tại thời điểm $t = 0$ khóa K được chuyển sang vị trí 2.
Yêu cầu:

1. Tính điều kiện đầu độc lập $i_L(0)$.
2. Tính năng lượng tích lũy ban đầu trên điện cảm L .
3. Lập và giải phương trình đặc trưng của mạch điện.
4. Tính điện áp quá độ trên điện trở R_1 : $u_{R_1_{qd}}(t)$.



Hình 4.20



Hình 4.20a

Giải:

$$1. \text{ Điều kiện đầu (hình 4.20a): } i_L(0^-) = J \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{R_2} = J \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 10 \frac{10}{10 + 6} = 6,25 \text{ (A)}$$

Vì bài toán đã cho là bài toán chỉnh nên: $i_L(0) = i_L(0^-) = 6,25 \text{ (A)}$

2. Năng lượng tích lũy ban đầu trên điện cảm L :

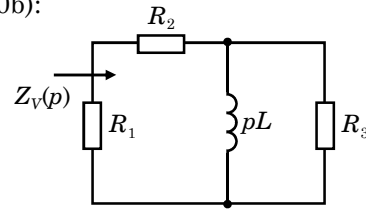
$$W_{TT}(0) = \frac{1}{2} Li_L^2(0) = \frac{1}{2} 0,32.6,25^2 = 6,25 \text{ (J)}$$

3. Lập và giải phương trình đặc trưng của mạch (hình 4.20b):

$$Z_V(p) = (R_1 + R_2) + \frac{pLR_3}{pL + R_3} = 0$$

$$\Rightarrow Z_V(p) = (R_1 + R_2 + R_3)Lp + (R_1 + R_2)R_3 = 0$$

$$p = -\frac{(R_1 + R_2)R_3}{(R_1 + R_2 + R_3)L} = -\frac{64}{6,4} = -10$$



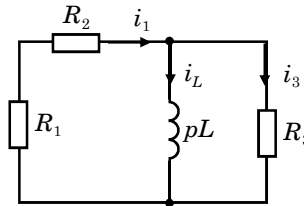
Hình 4.20b

4. Điện áp quá độ $u_{R_{1qd}}(t)$:

$$\text{Điện áp xác lập mới: } u_{R_{1xlm}}(t) = 0 \text{ (V)}$$

$$\text{Điện áp tự do: } u_{R_{1td}}(t) = Ae^{-10t} \text{ (V)}$$

$$\Rightarrow u_{R_{1qd}}(t) = u_{R_{1td}}(t) + u_{R_{1xlm}}(t) = Ae^{-10t} \text{ (V)}$$



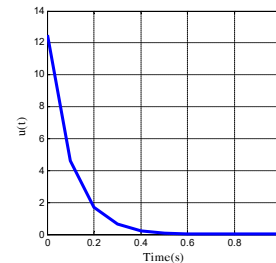
Hình 4.20c

Tìm điều kiện đầu: Hệ phương trình (hình 4.20c):

$$\begin{cases} i_1(t) - i_L(t) - i_3(t) = 0 \\ (R_1 + R_2)i_1(t) + Li_L'(t) = 0 \\ Li_L'(t) - R_3i_3(t) = 0 \end{cases}$$

Thay tại thời điểm $t = 0$ có:

$$\begin{cases} i_1(0) - 6,25 - i_3(0) = 0 \\ 16i_1(0) + 0,32i_L'(0) = 0 \\ 0,32i_L'(0) - 4i_3(0) = 0 \end{cases}$$



Hình 4.20d

$$\text{Giải hệ ta được: } \begin{cases} i_1(0) = 1,25 \text{ (A)} \\ i_3(0) = -5 \text{ (A)} \end{cases} \Rightarrow u_{R_1}(0) = R_1 i_1(0) = 10.1,25 = 12,5 \text{ (V)}$$

Thay tại thời điểm $t = 0$ vào biểu thức $u_{R_{1qd}}(t)$ ta có: $u_{R_1}(0) = A = 12,5 \text{ (V)}$

Vậy điện áp quá độ: $u_{R_{1qd}}(t) = 12,5e^{-10t} \text{ (V)}$

Đồ thị điện áp quá độ $u_{R_{1qd}}(t)$: hình 4.20d.

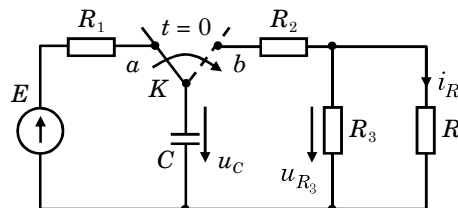
Bài tập 5: Cho mạch điện như hình 4.21 với các thông số:

$$E = 120 \text{ (V) (một chiều)}$$

$$R_1 = 10 \text{ (k}\Omega\text{)}, R_2 = 32 \text{ (k}\Omega\text{)}, R_3 = 240 \text{ (k}\Omega\text{)}, R_4 = 60 \text{ (k}\Omega\text{)}, C = 0,5 \text{ (}\mu\text{F)}$$

Ở chế độ xác lập cũ khóa K ở vị trí a , tại thời điểm $t = 0$ khóa K được chuyển sang vị trí b . Yêu cầu:

1. Tính điều kiện đầu độc lập $u_C(0)$.
2. Tính năng lượng tích lũy ban đầu trên điện dung C .
3. Lập và giải phương trình đặc trưng.
4. Tính điện áp quá độ $u_{Cqd}(t)$.



Hình 4.21

Giải:

1. Vì bài toán đã cho là bài toán chỉnh nên: $u_C(0) = u_C(0^-) = E = 120 \text{ (V)}$

2. Năng lượng tích lũy ban đầu trên điện dung C :

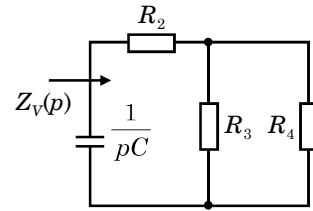
$$W_{ĐT}(0) = \frac{1}{2}Cu_C^2(0) = \frac{1}{2}0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 120^2 = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ (J)}$$

3. Lập và giải phương trình đặc trưng (hình 4.21a):

$$Z_V(p) = \left(\frac{1}{pC} + R_2 \right) + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

$$\Rightarrow Z_V(p) = (R_2 R_3 C + R_3 R_4 C + R_4 R_2 C)p + (R_3 + R_4) = 0$$

$$p = -\frac{R_3 + R_4}{R_2 R_3 C + R_3 R_4 C + R_4 R_2 C} = -\frac{300 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^3} = -25$$



Hình 4.21a

4. Điện áp quá độ $u_{C_{qd}}(t)$:

$$u_{C_{xlm}}(t) = 0 \text{ (V)} \quad u_{C_{td}}(t) = Ae^{-25t} \text{ (V)}$$

$$u_{C_{qd}}(t) = u_{C_{td}}(t) + u_{C_{xlm}}(t) = Ae^{-25t} \text{ (V)}$$

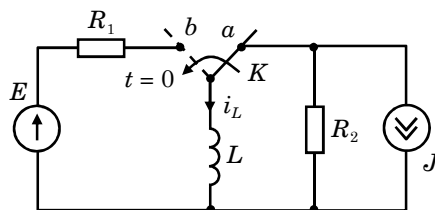
Thay tại thời điểm $t = 0$: $u_{C_{qd}}(0) = A = 120 \text{ (V)}$ Vậy: $u_{C_{qd}}(t) = 120e^{-25t} \text{ (V)}$

Bài tập 6: Cho mạch điện như hình 4.22 với các thông số:

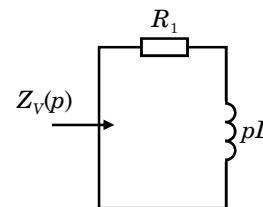
$$E = 48 \text{ (V)}, J = 12 \text{ (A)} \text{ (một chiều)}, R_1 = 2 \text{ (}\Omega\text{)}, R_2 = 10 \text{ (}\Omega\text{)}, L = 100 \text{ (mH)}$$

Ở chế độ xác lập cũ khóa K ở vị trí a , tại thời điểm $t = 0$ khóa K được chuyển sang vị trí b . Yêu cầu:

1. Tính dòng điện quá độ trên điện cảm L : $i_{L_{qd}}(t)$.
2. Tính giá trị điện áp trên điện cảm tại đúng thời điểm khóa K chuyển từ vị trí a sang vị trí b : $u_L(0)$.
3. Hỏi sau khoảng thời gian bao lâu khi khóa K chuyển từ vị trí a sang vị trí b thì giá trị điện áp trên điện cảm $u_L = 24 \text{ (V)}$.
4. Vẽ đồ thị dòng điện quá độ $i_{L_{qd}}(t)$ và điện áp quá độ $u_{L_{qd}}(t)$.



Hình 4.22



Hình 4.22a

Giải:

1. Dòng điện quá độ $i_{L_{qd}}(t)$:

$$\text{Chế độ xác lập mới: } i_{L_{xlm}}(t) = \frac{E}{R_1} = \frac{48}{2} = 24 \text{ (A)}$$

Phương trình đặc trưng (hình 4.22a):

$$Z_V(p) = pL + R_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = -\frac{R_1}{L} = -\frac{2}{0,1} = -20$$

Dòng điện tự do: $i_{L_{td}}(t) = Ae^{-20t}$ (A)

Dòng điện quá độ: $i_{L_{qd}}(t) = i_{L_{td}}(t) + i_{L_{xlm}}(t) = Ae^{-20t} + 24$ (A)

Điều kiện đầu độc lập: $i_L(0) = i_L(0^-) = -J = -12$ (A)

Thay tại thời điểm $t = 0$ vào biểu thức của $i_{L_{qd}}(t)$:

$$i_{L_{qd}}(0) = A + 24 = -12 \quad \Rightarrow \quad A = -36 \quad \text{Vậy: } i_{L_{qd}}(t) = -36e^{-20t} + 24 \text{ (A)}$$

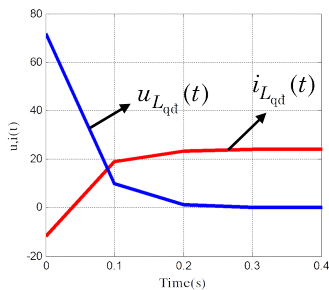
2. Điện áp quá độ: $u_{L_{qd}}(t) = L \frac{di_L}{dt} = 0,1 \cdot (-36) \cdot (-20)e^{-20t} = 72e^{-20t}$ (V)

Vậy giá trị điện áp trên điện cảm tại thời điểm $t = 0$ là: $u_L(0) = 72$ (V).

3. Thời gian khi khóa K chuyển từ vị trí a sang vị trí b thì giá trị điện áp trên điện cảm $u_L(t_1) = 24$ (V).

$$24 = 72e^{-20t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{20} \ln \frac{72}{24} = 0,05493 \text{ (s)} = 54,93 \text{ (ms)}$$

4. Đồ thị dòng điện quá độ $i_{L_{qd}}(t)$ và điện áp quá độ $u_{L_{qd}}(t)$: hình 4.22b.

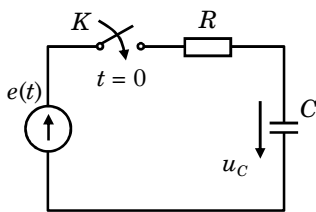


Hình 4.22b

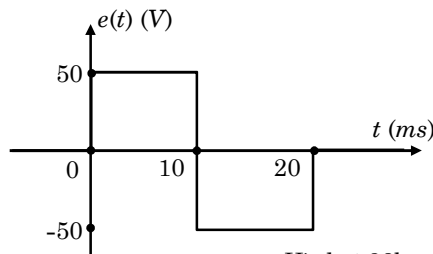
Bài tập 7: Cho mạch điện như hình 4.23a với các thông số: $R = 50$ (Ω), $C = 400$ (μF). Sức điện động $e(t)$ có dạng như hình 4.23b. Tại thời điểm $t = 0$ khóa K đóng. Yêu cầu:

1. Tính điện áp quá độ $u_{C_{qd}}(t)$ khi $t < 0$, $0 \leq t \leq 10$ (ms), 10 (ms) $\leq t \leq 20$ (ms), 20 (ms) $\leq t \leq \infty$.

2. Vẽ đồ thị $e(t)$ và dạng của đồ thị $u_{C_{qd}}(t)$ trên cùng một hệ trục tọa độ.



Hình 4.23a



Hình 4.23b

Giải:

1. Điện áp quá độ $u_{C_{qd}}(t)$:

* Khi $t < 0$: $u_{C_{qd}}(t) = 0$ (V)

Điều kiện đầu: $u_C(0) = u_C(0^-) = 0$ (V)

Phương trình đặc trưng: $RCp + 1 = 0$ Nghiệm: $p = -\frac{1}{RC} = -50$

* Khi $0 \leq t \leq 10$ (ms):

Điện áp tự do: $u_{C_{td}}(t) = Ae^{-50t}$ (V) Điện áp xác lập mới: $u_{C_{xlm}}(t) = 50$ (V)

Điện áp quá độ: $u_{C_{qd}}(t) = u_{C_{td}}(t) + u_{C_{xlm}}(t) = Ae^{-50t} + 50$ (V)

Thay điều kiện đầu $u_C(0) = 0 = A + 50 \Rightarrow A = -50$

Vậy: $u_{C_{qd}}(t) = 50(1 - e^{-50t})$ (V) với $0 \leq t \leq 10$ (ms).

* Khi $10 \leq t \leq 20$ (ms):

Điều kiện đầu: $u_C(10 \text{ ms}) = 50(1 - e^{-50 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}) = 19,67$ (V)

Điện áp xác lập mới: $u_{C_{xlm}}(t) = -50$ (V)

Điện áp quá độ: $u_{C_{qd}}(t) = 69,67e^{-50(t-0,01)} - 50$ (V) với $10 \leq t \leq 20$ (ms)

* Khi $t \geq 20$ (ms):

Điều kiện đầu: $u_C(20 \text{ ms}) = 69,67e^{-50(0,02-0,01)} - 50 = -7,74$ (V)

Điện áp xác lập mới: $u_{C_{xlm}}(t) = 0$ (V)

Điện áp quá độ: $u_{C_{qd}}(t) = -7,74e^{-50(t-0,02)}$ (V) với $t \geq 20$ (ms).

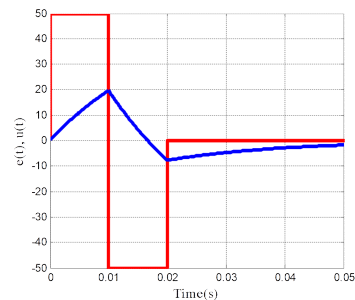
2. Đồ thị $e(t)$ và đồ thị $u_{C_{qd}}(t)$: Dùng matlab để vẽ ta được đồ thị hình 4.23c.

```
>> x=[-0.005 0 0 0.01 0.01 0.02 0.02 0.08];
>> y=[0 0 50 50 -50 -50 0 0];
>> E=plot(x,y,'r-')

E =

    189.0011

>> t1=linspace(0,0.01);
>> Uqd1=50*(1-exp(-50*t1));
>> t2=linspace(0.01,0.02);
>> Uqd2=69.67*exp(-50*(t2-0.01))-50;
>> t3=linspace(0.02,0.05);
>> Uqd3=-7.74*exp(-50*(t3-0.02));
>> plot(t1,Uqd1,'b-',t2,Uqd2,'b-',t3,Uqd3,'b-')
```



Hình 4.23c

4.3 BÀI TẬP VẬN DỤNG

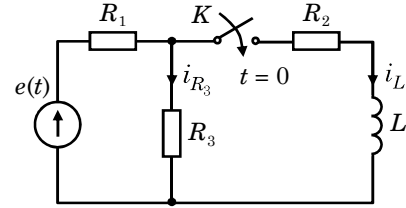
Bài tập 1: Cho mạch điện như hình 4.24 với các thông số:

$$e(t) = 220\sqrt{2} \sin(314t + 45^\circ) \text{ (V)}$$

$$R_1 = 70 \text{ (}\Omega\text{)}, R_2 = 60 \text{ (}\Omega\text{)}, R_3 = 40 \text{ (}\Omega\text{)}, L = 0,3185 \text{ (H)}$$

Trước khi khóa K đóng mạch điện ở chế độ xác lập, tại thời điểm $t = 0$ khóa K đóng. Yêu cầu:

1. Tính điều kiện đầu độc lập $i_L(0^-)$, $i_L(0^+)$.
2. Tính điều kiện đầu phụ thuộc $i_{R_3}(0)$.
3. Tính dòng điện quá độ trên điện trở R_1 : $i_{R_1\text{qd}}(t)$.
4. Tính dòng điện quá độ trên điện cảm L : $i_{L\text{qd}}(t)$.



Hình 4.24

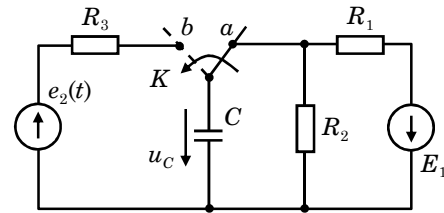
Bài tập 2: Cho mạch điện như hình 4.25 với các thông số:

$$E_1 = 40 \text{ (V)} \text{ (một chiều)}, e_2(t) = 220\sqrt{2} \sin(314t + 60^\circ) \text{ (V)}$$

$$R_1 = 20 \text{ (}\Omega\text{)}, R_2 = 60 \text{ (}\Omega\text{)}, R_3 = 400 \text{ (}\Omega\text{)}, C = 3,1847 \text{ (}\mu\text{F)}$$

Trước khi khóa K chuyển từ vị trí a sang vị trí b mạch điện ở chế độ xác lập, tại thời điểm $t = 0$ khóa K được chuyển từ vị trí a sang vị trí b . Yêu cầu:

1. Tính điều kiện đầu độc lập $u_C(0)$.
2. Tính giá trị điện áp $u_{C_{xlm}}(t)$.
3. Tính điện áp quá độ trên điện dung C : $u_{C\text{qd}}(t)$.
4. Tính dòng điện quá độ trên điện dung C : $i_{C\text{qd}}(t)$.



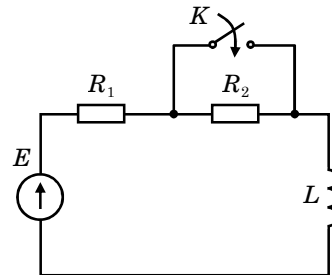
Hình 4.25

Bài tập 3: Cho mạch điện như hình 4.26 với các thông số:

$$E = 40 \text{ (V)} \text{ (một chiều)}, R_1 = 1 \text{ (}\Omega\text{)}, R_2 = 3 \text{ (}\Omega\text{)}, L = 80 \text{ (mH)}$$

Trước khi khóa K đóng mạch điện ở chế độ xác lập, tại thời điểm $t = 0$ khóa K đóng. Yêu cầu:

1. Tính điều kiện đầu độc lập $i_L(0)$.
2. Hằng số thời gian τ của mạch điện khi khóa K đóng.
3. Tính dòng điện quá độ trên điện cảm L : $i_{L\text{qd}}(t)$.
4. Tính điện áp quá độ trên điện cảm L : $u_{L\text{qd}}(t)$.



Hình 4.26

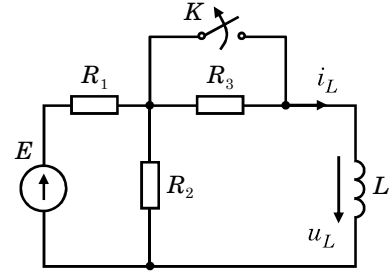
Bài tập 4: Cho mạch điện như hình 4.27 với các thông số:

$$E = 160 \text{ (V) (một chiều)}$$

$$R_1 = 20 \text{ (}\Omega\text{)}, R_2 = 60 \text{ (}\Omega\text{)}, R_3 = 25 \text{ (}\Omega\text{)}, L = 400 \text{ (mH)}$$

Trước khi khóa K mở mạch điện ở chế độ xác lập, tại thời điểm $t = 0$ khóa K mở. Yêu cầu:

1. Tính điều kiện đầu độc lập $i_L(0)$.
2. Tính nghiệm của phương trình đặc trưng.
3. Tính dòng điện quá độ trên điện cảm L : $i_{L_{qd}}(t)$.
4. Tính điện áp quá độ trên điện cảm L : $u_{L_{qd}}(t)$.



Hình 4.27

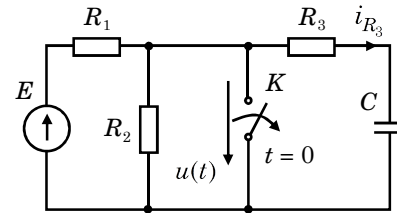
Bài tập 5: Cho mạch điện như hình 4.28 với các thông số:

$$E = 100 \text{ (V) (một chiều)}$$

$$R_1 = 8 \text{ (k}\Omega\text{)}, R_2 = 12 \text{ (k}\Omega\text{)}, R_3 = 10,2 \text{ (k}\Omega\text{)}, C = 1,6667 \text{ (}\mu\text{F)}$$

Biết khi khóa K đóng, mạch điện ở chế độ xác lập. Tại thời điểm $t = 0$ khóa K được mở ra. Yêu cầu:

1. Tính điều kiện đầu $i_{R_3}(0^+)$.
2. Tính điện áp trên điện trở R_3 ở chế độ xác lập mới $i_{R_{3xlm}}(t)$.
3. Tính dòng điện quá độ $i_{R_{3qd}}(t)$ khi $t \geq 0^+$.
4. Tính điện áp quá độ $u_{R_{3qd}}(t)$ khi $t \geq 0^+$.



Hình 4.28

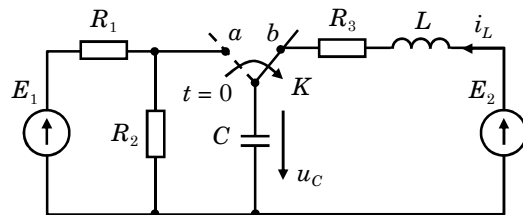
Bài tập 6: Cho mạch điện như hình 4.29 với các thông số:

$$E_1 = 100 \text{ (V) (một chiều)}, E_2 = 120 \text{ (V) (một chiều)}$$

$$R_1 = 9 \text{ (k}\Omega\text{)}, R_2 = 15 \text{ (k}\Omega\text{)}, R_3 = 80 \text{ (}\Omega\text{)}, C = 2 \text{ (}\mu\text{F)}, L = 5 \text{ (mH)}$$

Ở chế độ xác lập cũ khóa K ở vị trí a , tại thời điểm $t = 0$ khóa K được chuyển sang vị trí b . Yêu cầu:

1. Tính các điều kiện đầu: $i_L(0^+)$, $i'_L(0^+)$, $u_C(0^+)$.
2. Lập và giải phương trình đặc trưng.
3. Tính điện áp quá độ $u_{C_{qd}}(t)$ với $t \geq 0$.



Hình 4.29