Jay B. Brockman

INTRODUÇÃO À ENGENHARIA

MODELAGEM E SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

gen | LTC

Introdução à Engenharia: Modelagem e Solução de Problemas

abdr
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE DIREITOS REPROGRÁFICOS
Respeite o direito autoral

O GEN | Grupo Editorial Nacional reúne as editoras Guanabara Koogan, Santos, Roca, AC Farmacêutica, Forense, Método, LTC, E.P.U. e Forense Universitária, que publicam nas áreas científica, técnica e profissional.

Essas empresas, respeitadas no mercado editorial, construíram catálogos inigualáveis, com obras que têm sido decisivas na formação acadêmica e no aperfeiçoamento de várias gerações de profissionais e de estudantes de Administração, Direito, Enfermagem, Engenharia, Fisioterapia, Medicina, Odontologia, Educação Física e muitas outras ciências, tendo se tornado sinônimo de seriedade e respeito.

Nossa missão é prover o melhor conteúdo científico e distribuí-lo de maneira flexível e conveniente, a preços justos, gerando benefícios e servindo a autores, docentes, livreiros, funcionários, colaboradores e acionistas.

Nosso comportamento ético incondicional e nossa responsabilidade social e ambiental são reforçados pela natureza educacional de nossa atividade, sem comprometer o crescimento contínuo e a rentabilidade do grupo.

Introdução à Engenharia: Modelagem e Solução de Problemas

Jay B. Brockman
University of Notre Dame

Tradução e Revisão Técnica

Ronaldo Sérgio de Biasi
Professor Titular do Instituto Militar de Engenharia (IME)

gen | LTC

O autor e a editora empenharam-se para citar adequadamente e dar o devido crédito a todos os detentores dos direitos autorais de qualquer material utilizado neste livro, dispondo-se a possíveis acertos caso, inadvertidamente, a identificação de algum deles tenha sido omitida.

Não é responsabilidade da editora nem do autor a ocorrência de eventuais perdas ou danos a pessoas ou bens que tenham origem no uso desta publicação.

INTRODUCTION TO ENGINEERING:
Modeling and Problem Solving, First Edition
Copyright © 2009 John Wiley & Sons, Inc.
All Rights Reserved. This translation is published under license.

Apesar dos melhores esforços do autor, do tradutor, do editor e dos revisores, é inevitável que surjam erros no texto. Assim, são bem-vindas as comunicações de usuários sobre correções ou sugestões referentes ao conteúdo ou ao nível pedagógico que auxiliem o aprimoramento de edições futuras. Os comentários dos leitores podem ser encaminhados à **LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora** pelo e-mail ltc@grupogen.com.br.

Direitos exclusivos para a língua portuguesa
Copyright © 2010 by
LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.
Uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional

Reservados todos os direitos. É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na internet ou outros), sem permissão expressa da editora.

Travessa do Ouvidor, 11

Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040
Tels.: 21-3543-0770 / 11-5080-0770
Fax: 21-3543-0896
ltc@grupogen.com.br
www.ltceditora.com.br

Capa: Bernard Design

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ.

B882i

Brockman, Jay B.
Introdução à engenharia : modelagem e solução de problemas / Jay B. Brockman ; tradução e revisão técnica Ronaldo Sérgio de Biasi. – [Reimpr.]. – Rio de Janeiro :
LTC, 2013.

Tradução de: Introduction to engineering : modeling and problem solving
ISBN 978-85-216-2233-8

1. Engenharia de sistemas. 2. Engenharia matemática. 3. Modelos de engenharia - Processamento de dados. I. Título.

09-4624. CDD: 629.8
CDU: 681.5

Produção digital: Hondana

À memória de minha filha Dylan
e de minha mãe Hope

Prefácio

A Escolha da Engenharia

Em um relatório de 2005, *Educando o Engenheiro de 2020*: *Adaptando o Ensino de Engenharia a um Novo Século*,* um grupo de especialistas convocado pela Academia Nacional de Engenharia (NAE) dos Estados Unidos discutiu os problemas associados à preparação da próxima geração de engenheiros para resolver os problemas técnicos que a sociedade terá de enfrentar nos próximos anos [Nat05]. Alguns desses problemas são questões antigas que ainda não foram resolvidas, como a de modernizar nossa infraestrutura de estradas, pontes, vias fluviais e rede elétrica [Ame05]. Outros desafios são os de fornecer alimentos, água, energia e comunicações a uma população cada vez maior, oferecer serviços de saúde a um número cada vez maior de aposentados e adaptar nossa defesa nacional a novas ameaças.

As pesquisas mostraram que os estudantes pré-universitários encaram com simpatia carreiras estimulantes que envolvem "ajudar os outros" [Nat05] [Tay00]. Infelizmente, os dados também mostram que o interesse pela engenharia como carreira está diminuindo. Como observa o relatório da NAE, muitos fatores contribuem para esse declínio, desde a preparação para a engenharia no ensino fundamental e no médio até o modo como a profissão de engenheiro é encarada pela sociedade, passando pela carga de estudo a que um estudante de engenharia é submetido, maior que a de muitos outros estudantes universitários. Entre todos esses fatores, porém, um dos

mais importantes é a experiência do estudante no seu primeiro curso de engenharia na universidade. Esse curso estabelece o modo como os estudantes encaram a engenharia e desempenha um papel fundamental na sua decisão de fazer um curso de engenharia ou optar por outro curso superior [Nat05][PMS03].

Entre suas propostas para revitalizar o ensino de engenharia, *Educando o Engenheiro de 2020*: *Adaptando o Ensino de Engenharia a um Novo Século* faz duas recomendações específicas em relação ao primeiro curso [Nat05]:

- "Sejam quais forem as outras abordagens criativas tomadas no currículo de 4 anos do curso de engenharia, a essência da engenharia — o processo iterativo de projetar, prever o desempenho, construir e testar — deve ser ensinada desde os primeiros estágios do currículo, incluindo o primeiro ano."
- "As escolas de engenharia devem introduzir o aprendizado multidisciplinar no ambiente de graduação em vez de limitá-lo aos programas de pós-graduação."

O objetivo principal deste livro é fornecer subsídios para um primeiro curso de um currículo de engenharia com base nesses dois princípios.

A Experiência de Notre Dame

Mesmo antes de ser publicado o relatório da NAE *Educando o Engenheiro de 2020*, vários programas de engenharia em faculdades e universidades norte-americanas já estavam em busca de novas estratégias para atrair e conservar estudantes talentosos. No outono de 1998, o novo diretor da Faculdade de Engenharia da University of Notre Dame, Frank Incropera, lançou um projeto para melhorar a qualidade do ensino de graduação. Após uma análise intensiva, a faculdade apresentou duas recomendações principais. A primeira foi incrementar as atividades práticas no primeiro ano de todos os

estudantes que pretendiam cursar engenharia; a segunda era migrar para um paradigma de aprendizado "voltado para liderança, trabalho em equipe, aprendizado experimental, uso de tecnologia da informação, interação de estudantes e professores com a indústria e interação (formal e social) dos estudantes com os professores". O pró-reitor de graduação, Steve Batill, formou uma comissão com representantes dos cinco departamentos de engenharia de Notre Dame para formular uma série de metas de ensino e um formato para os novos cursos. A comissão escolheu três objetivos principais:

- Compreender o que é a engenharia e como é praticada.
  - contexto social;
  - relações e diferenças entre disciplinas;
  - relações com a matemática e as ciências exatas.
- Desenvolver e aplicar as capacitações básicas da engenharia.
  - solução de problemas;
  - comunicações;
  - uso de computadores.
- Obter experiência prática de projeto como parte de um grupo multidisciplinar.

Tom Fuja e eu fomos escolhidos para diretores do curso. Com a ajuda dos professores da Faculdade de Engenharia, criamos quatro módulos para o curso que se destinavam a proporcionar uma visão geral das disciplinas da engenharia, além de salientar alguns aspectos práticos da engenharia. Ilustrados na Figura 1, esses quatro projetos iniciais foram os seguintes:

Sistema de Lançamento Neste projeto, os estudantes usaram uma grande atiradeira para lançar uma bola de softball em um alvo escolhido. O objetivo principal do projeto era fazer com que os

estudantes criassem uma série de modelos para determinar os parâmetros do mecanismo de lançamento, incluindo um modelo para a energia armazenada na mola e um modelo para a trajetória da bola. Inicialmente, os modelos foram implementados em planilhas eletrônicas, mas, alguns anos depois, passou-se a usar o MATLAB.

Leitor de Código de Barras Neste projeto, os estudantes construíram um robô, usando kits Mindstorms da LEGO, que era capaz de passar por cima de um código de barras e executar uma ação depois de ler um comando escrito em código. Antes que o MATLAB fosse introduzido no curso, este projeto servia de introdução à programação e ao processamento de informações.

Controlador de pH Concebido a partir da experiência com o projeto do leitor de código de barras, o objetivo deste projeto era implementar um sistema capaz de manter o pH no interior de um tanque dentro de limites especificados, ajustando a vazão de uma solução para o interior do tanque. O projeto introduzia as equações de equilíbrio de massa e alguns princípios simples de teoria de controle. Os estudantes projetaram e construíram seus mecanismos para ajustar a vazão usando kits Mindstorms da LEGO e alguns componentes adicionais de baixo custo.

Estrutura Leve Neste projeto, os estudantes usaram um programa de MATLAB escrito por Dave Kirkner, professor de engenharia civil de Notre Dame, para projetar uma estrutura em treliça feita de tubos e conexões de K'NEX que atendesse a certas especificações de carga, deflexão e custo.

A Feitura Deste Livro: Filosofia e Abordagem

Embora muitas das ideias deste livro sejam resultado de minha participação no planejamento dos cursos de Introdução à Engenharia

de Notre Dame, também tive a oportunidade de usar minhas próprias observações, experiências e preferências como estudante, professor e engenheiro praticante. Em particular, existem várias ideias importantes que permeiam o livro e nasceram de minha história pessoal.

A Engenharia Pode Ser Divertida Tendo passado a infância e a adolescência, nas décadas de 1960 e 1970, com o programa espacial aparecendo regularmente na TV, um vizinho radioamador e um farto suprimento de restos de madeira em nosso bairro recém-construído, a engenharia parecia uma escolha natural para alguém que se interessava por matemática e ciência e também gostava de montar coisas, embora, na época, eu ainda não soubesse realmente o que *era* a engenharia. Embora a engenharia, como qualquer carreira, tenha ocasionalmente alguns aspectos monótonos e rotineiros, ainda considero muitas partes do meu trabalho tão empolgantes como esperava que fossem e, nos melhores dias, sinto como se meu trabalho fosse meu passatempo! Neste texto, procurei chamar a atenção para alguns dos projetos e personalidades que ilustram esse ponto de vista.

A Engenharia É Multidisciplinar Esta é uma visão da engenharia que comecei a ter como estudante de graduação da Brown University, em Providence, Rhode Island, que tem um departamento de engenharia unificado e onde, pelo menos durante os anos que lá passei, todos os estudantes de engenharia faziam os mesmos cursos básicos nos três primeiros anos. Como estudante de graduação, fiz estágios de verão em uma empresa de arquitetura de Providence, uma empresa de engenharia civil de Boston e na Philips Electronics, na Holanda. Em todas essas ocasiões, pude observar grupos de engenheiros e técnicos trabalhando juntos rotineiramente para resolver problemas de projeto complexos, como o Zoológico Roger Williams, a Linha Laranja do Metrô de Boston e uma das primeiras formas de jornal eletrônico transmitido como sinal de televisão. Todavia, foi depois de me

formar, e passar vários anos trabalhando para a Intel Corporation como engenheiro de produção, que passei a compreender este fato em toda a sua plenitude.

A Engenharia Não Pode Dispensar a Modelagem na Tomada de Decisões A solução de problemas de engenharia não é apenas uma questão de tentativa e erro. A boa engenharia (na qual "boa" significa que uma solução atende aos objetivos técnicos, é apresentada no prazo e respeita o orçamento) depende da capacidade de fazer previsões corretas usando uma série de *modelos*. Os modelos podem ser simples, como cálculos feitos à mão, ou complexos, como simulações em computador. Os engenheiros usam modelos *teóricos*, com base nas leis da natureza, modelos *empíricos*, com base em resultados experimentais, e combinações dos dois tipos de modelos.

Figura 1 Projetos do primeiro curso de Introdução à Engenharia, ministrado em Notre Dame no ano letivo de 1999-2000.

Muitos cursos introdutórios de engenharia apresentam projetos que enfatizam a criatividade e o trabalho em equipe, dois aspectos muito

importantes da engenharia. Entretanto, a maior parte do tempo dos cursos de graduação em engenharia é dedicada a tópicos importantes das ciências físicas e biológicas e da matemática, e a principal razão para isso é equipar os estudantes com as ferramentas necessárias para tomar decisões com base em análises quantitativas. Acredito que uma introdução à modelagem deve ter um lugar de destaque no primeiro curso de engenharia.

A Engenharia É Mais que Ciência e Matemática Aplicada Uma ideia errônea a respeito da engenharia, encontrada em alguns setores dos campi universitários, é a de que a engenharia é "apenas" matemática e ciência aplicada. Até certo ponto, os próprios programas de engenharia são responsáveis por este engano. Em 1968, Herbert Simon, da Carnegie Mellon University, proferiu uma série de palestras no MIT, que foram publicadas no ano seguinte sob o título *The Sciences of the Artificial* (*As Ciências do Artificial*) [Sim96], nas quais Simon discutiu suas ideias a respeito da formação de engenheiros e projetistas.

Quais são os tópicos do currículo de engenharia que não existem nos cursos de ciências exatas? De acordo com Simon, a lista deve conter pelo menos os seguintes assuntos: avaliação de projetos, a lógica formal dos projetos, a busca de alternativas, teoria de estrutura e organização de projetos e representação de problemas de projeto. As ideias de Simon me causaram uma profunda impressão quando eu estava fazendo o curso de doutorado, e hoje, depois de passar 15 anos ensinando engenharia, concordo com elas ainda mais. Sob vários aspectos, este livro é uma tentativa de apresentar uma introdução à engenharia escrita em um nível apropriado para estudantes do ensino médio, seguindo os princípios que Herb Simon esboçou em 1968.

Organização do Livro

De modo geral, este livro recorre apenas a conceitos das ciências

naturais e da matemática a que os estudantes estiveram expostos no ensino médio. Utiliza álgebra, geometria e alguma trigonometria, mas não usa os métodos do cálculo diferencial e integral. A física envolve apenas umas poucas leis básicas, como a conservação de massa e energia, a lei de Hooke e a lei de Ohm, e apresenta uma breve explicação dessas leis quando necessário. Usando esses tópicos como ponto de partida, o livro se concentra nos métodos de engenharia e, mais especificamente, no modo como os engenheiros resolvem problemas usando modelos para apoiar suas decisões.

O livro tem três partes. A **Parte I: A Abordagem da Engenharia** discute a forma como os problemas de engenharia são representados e resolvidos. A Parte I está dividida em três capítulos:

- O **Capítulo 1: Engenharia e Sociedade** apresenta uma visão do mundo da engenharia. Descreve o "método da engenharia" como algo relacionado ao "método científico", com algumas diferenças. Fornece exemplos de como os produtos da engenharia (e também os grupos responsáveis por esses produtos e a sociedade que os consome) têm muitas partes interligadas e descreve o modo como engenheiros e cientistas usam a ideia de *sistema* para compreender melhor esta rede. Em seguida, o capítulo apresenta uma visão geral das principais disciplinas da engenharia e mostra quais são as relações entre elas. O capítulo termina com uma discussão de engenharia e computação e descreve a forma como a computação se tornou uma parte vital da engenharia.
- O **Capítulo 2: Organização e Representação de Sistemas de Engenharia** descreve a forma como os engenheiros representam sistemas e ilustra técnicas que ajudam a compreender a rede de ideias que cerca a maioria dos problemas de engenharia. O capítulo apresenta um tipo de diagrama de rede conhecido como *mapa conceitual* que é usado exaustivamente ao longo de

todo o livro para representar uma grande variedade de cenários. O capítulo termina com um exemplo detalhado de como representar o problema do fornecimento de água para comunidades rurais dos países em desenvolvimento, um problema que afeta mais de um bilhão de pessoas no mundo.

- O **Capítulo 3: Aprendizado e Solução de Problemas** apresenta sugestões e técnicas para estudar engenharia, além de um método de abordagem de problemas de engenharia que envolve desde simples deveres de casa até projetos completos. Esse capítulo contém uma lista de *heurísticas* ou "regras de bolso" que ajudam os estudantes a "desempacar" durante a solução de um problema.

Uma parte importante do método de engenharia é coletar e analisar informações para tomar decisões técnicas. Para isso, os engenheiros usam *modelos* que reproduzem aproximadamente situações do mundo real. A **Parte II: Projetos Baseados em Modelos** descreve alguns tipos de modelos matemáticos usados pelos engenheiros.

- O **Capítulo 4: Leis da Natureza e Modelos Teóricos** ilustra a evolução de uma série de modelos teóricos contando a história da Lei dos Gases Ideais, da Lei de Conservação da Energia, da Lei de Hooke e da Lei de Conservação de Massa. Em seguida, o capítulo mostra de que forma as ideias por trás dessas leis levaram à invenção da máquina a vapor e, mais tarde, do motor de combustão interna. Além disso, explica que os aperfeiçoamentos dos motores, por sua vez, levaram a novos e melhores modelos. O capítulo termina com um exemplo detalhado, no qual modelos teóricos de força, pressão, trabalho e eficiência são usados para terminar um projeto detalhado de uma bomba manual, iniciado no Capítulo 2.

- O **Capítulo 5: Análise de Dados e Modelos Empíricos** apresenta algumas das ferramentas matemáticas e gráficas que os cientistas e engenheiros utilizam para analisar dados ao elaborar e usar modelos. O capítulo começa examinando duas teorias separadas por trezentos anos (a Lei de Boyle dos gases e a Lei de Moore da fabricação dos circuitos integrados) e usa essas teorias para demonstrar as formas de testar até que ponto uma teoria corresponde aos dados experimentais. Em seguida, são examinadas a construção e a utilização de modelos empíricos, que envolvem o uso de dados experimentais nos casos em que não existe uma teoria formal que se aplique ao sistema considerado. Também são apresentadas técnicas para quantificar a imprecisão dos dados experimentais, usando os princípios da estatística e das probabilidades. Finalmente, é apresentado um método gráfico para visualizar os compromissos entre diferentes opções de projeto, e é examinado um exemplo detalhado do uso desta técnica para determinar os parâmetros de uma grande atiradeira usada para lançar uma bola de softball em direção a um alvo.
- O **Capítulo 6: Modelagem de Relações entre os Componentes de um Sistema: Estruturas Leves** usa os princípios discutidos nos Capítulos 4 e 5 para analisar e projetar sistemas mais complexos com o auxílio de modelos. Mais especificamente, examina o projeto de um tipo de estrutura leve conhecido como *treliça*, que é feito de muitos elementos trabalhando em conjunto. Além disso, a análise de uma treliça exige a abordagem do problema a partir de vários pontos de vista, como o uso das Leis de Newton para examinar o equilíbrio de forças, e o conhecimento das propriedades dos materiais de engenharia para determinar a deformação sofrida. Matematicamente, isto leva a um sistema de equações que devem ser resolvidas simultaneamente.

- O **Capítulo 7: Modelagem de Relações entre os Componentes de um Sistema: Circuitos Eletrônicos Digitais** é conceitualmente semelhante ao Capítulo 6, já que examina um sistema de várias partes a partir de diversos pontos de vista, mas em um domínio diferente. Mais especificamente, o capítulo trata da análise de projeto de circuitos eletrônicos digitais simples como uma rede de comutadores que apresenta simultaneamente um comportamento lógico e um comportamento elétrico.
- O **Capítulo 8: Modelagem de Mudanças em Sistemas** examina a forma como os engenheiros usam modelos para prever a evolução de um sistema no tempo. É apresentada uma técnica que acompanha as mudanças do sistema em passos pequenos mas finitos, não exige conhecimentos de cálculo e pode ser facilmente implementada em uma planilha eletrônica ou através de um programa de computador relativamente simples. Depois de examinar a simulação da trajetória de uma bola lançada por uma atiradeira, o exemplo principal desse capítulo chega a um modelo para estimar a época em que o petróleo líquido vai se esgotar em nosso planeta.

O computador tornou-se uma ferramenta essencial para modelagem. Algumas das técnicas que envolvem o uso de computadores serão examinadas na **Parte III: Solução de Problemas com o MATLAB**. *MATLAB* é um ambiente integrado de computação técnica que combina uma poderosa linguagem de programação com centenas de ferramentas e comandos predefinidos para aplicações como gráficos, estatísticas, análise de dados e simulação. O MATLAB é amplamente usado por cientistas e engenheiros, tanto na universidade como na indústria. Essa parte do livro apresenta o MATLAB de forma sistemática, introduzindo as ferramentas à medida que são necessárias para implementar os modelos da Parte II, e pode ser estudada simultaneamente com esses capítulos.

- O **Capítulo 9: Introdução ao MATLAB** é uma introdução ao ambiente MATLAB, que mostra como usá-lo como calculadora para realizar cálculos aritméticos, como usar variáveis para introduzir valores numéricos em fórmulas e como salvar resultados em um arquivo chamado *script*. O capítulo apresenta exemplos de scripts que implementam modelos a partir dos Capítulos 3 e 4.
- O **Capítulo 10: Operações Vetoriais no MATLAB** mostra uma forma de representar uma lista de dados usando um recurso do MATLAB conhecido como *vetor*. Também mostra como executar cálculos aritméticos usando vetores, como, por exemplo, somar dois vetores, e como produzir gráficos de um vetor em função de outro. Esse capítulo complementa o Capítulo 5, usando o MATLAB para escrever scripts para analisar e plotar dados experimentais.
- O **Capítulo 11: Operações com Matrizes no MATLAB** descreve como trabalhar com tabelas de linhas e colunas de dados do MATLAB conhecidas como *matrizes*. Depois de apresentar a notação matricial básica, o capítulo mostra como usar operações de matrizes para construir tabelas que mostram os valores de saída de um modelo como combinações dos valores de duas variáveis de entrada. Em seguida, o capítulo apresenta várias formas de plotar esses dados tridimensionais e usa essas técnicas para examinar os compromissos envolvidos no projeto de uma bomba no Capítulo 4, usando métodos do Capítulo 5. Finalmente, esse capítulo apresenta uma introdução à aritmética e à álgebra linear matricial no MATLAB e mostra como usar o MATLAB para resolver sistemas de equações lineares, usando exemplos de análise estrutural do Capítulo 6 e análise de circuitos do Capítulo 7.
- O **Capítulo 12: Introdução a Algoritmos e Programação em MATLAB** começa explicando o que é um *algoritmo* e mostra

como é possível representá-lo graficamente, usando um *fluxograma*, ou através de uma descrição em palavras conhecida como *pseudocódigo*. Em seguida, o capítulo apresenta os recursos básicos do MATLAB para escrever scripts que implementam algoritmos, como funções, instruções “if” e malhas. O capítulo termina com scripts detalhados do MATLAB para simular sistemas que variam com o tempo, usando exemplos do Capítulo 8.

*Tradução livre do título da obra *Educating the Engineer of 2020: Adapting Engineering Education to a New Century*. (N.E.)

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a três professores de Notre Dame, sem os quais este projeto jamais teria decolado. Frank Incropera, diretor da Faculdade de Engenharia de 1998 a 2006, iniciou o curso de Introdução à Engenharia (EG 111/112) e ofereceu apoio e excelentes conselhos. Frank também me apresentou à editora John Wiley & Sons. Tom Fuja, chefe do Departamento de Engenharia Elétrica, e Steve Batill, chefe do Departamento de Engenharia Aeroespacial e Mecânica (que eu adoraria ter como coautores se o tempo permitisse), ajudaram a escrever as notas de aula que serviram de inspiração para o livro. Tom e eu trabalhamos juntos como codiretores do curso EG 111/112 nos primeiros anos e escrevemos alguns dos textos originais sobre símbolos, sinais e computação que aparecem no Capítulo 6. Steve ajudou a formular muitas das ideias a respeito de projetos e modelagem. O exemplo “SolderBaat”, do Capítulo 3, foi extraído do seu curso avançado de projetos, e ele orientou a equipe de Notre Dame que projetou e avaliou o projeto de atiradeira do Capítulo 5. O texto do Capítulo 5 a respeito dos estudos de engenharia teve origem em pesquisas na área de otimização de projetos multidisciplinares, financiadas por um auxílio do Langley Research Center, da NASA, em uma parceria formada por Steve, John Renaud e eu.

Meus agradecimentos a Joanne Van Voorhis, do Sloan Career Cornerstone (career-cornerstone.org), que gentilmente me permitiu

usar o texto que ela escreveu descrevendo as várias disciplinas da engenharia no Capítulo 1.

Os exemplos da bomba manual dos Capítulos 2 e 4 se baseiam nos esforços de Steve Silliman, durante muitos anos trabalhando em comunidades rurais do Haiti e de Benin, para criar suprimentos seguros de água potável. Steve é atualmente pró-reitor de graduação da Faculdade de Engenharia e trabalha no programa da Introdução à Engenharia de Notre Dame desde a sua criação. Também sou imensamente grato a Steve pela revisão técnica cuidadosa dos modelos de bomba e por corrigir algumas de minhas ideias equivocadas a respeito do funcionamento das bombas, além de fornecer o exemplo inicial e o acesso à bomba depois de montada.

Ed Maginn, do Departamento de Engenharia Química e Biomolecular de Notre Dame, contribuiu com o exemplo de estimar a quantidade de CO_2 produzida por um carro, apresentado no Capítulo 3. Ele também me apresentou ao trabalho de Donald Woods, da McMasters University, e Phil Wankat, da Purdue University. O trabalho serviu de base para o processo de solução de problemas adotado neste livro.

O exemplo de estruturas leves apresentado no Capítulo 6 começou com um projeto de treliça usando kits K'NEX (www.knex.com) originalmente proposto por Dave Kirkner, do Departamento de Engenharia Civil e Ciências Geológicas de Notre Dame, e Billie Spencer, que atualmente trabalha no Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Illinois, em Urbana-Champaign. Steve Batill e Dave Kirkner escreveram as notas de aula que serviram de inspiração para o capítulo.

Muitos dos problemas de final de capítulo e respectivas soluções foram escritos por Ramzi Bualuan, do Departamento de Ciência e Engenharia da Computação de Notre Dame, que também participa do programa de verão de Introdução à Engenharia para estudantes do ensino médio, juntamente com os estudantes de graduação em

engenharia de Notre Dame Maggie Merkel (Engenharia Civil, 2008), Peter Nistler (Engenharia de Computação, 2008) e John Souder (Engenharia Química, 2008). Lynnwood Brown, da WikiRing Consultants, trabalhou comigo na preparação da base de dados de problemas on-line.

Rumit Pancholi, um estudante de doutorado do programa de Escrita Criativa de Notre Dame, prestou uma colaboração inestimável na preparação dos originais.

Além das pessoas citadas, as quais participaram da concepção e feitura do livro, houve muitas outras que forneceram exemplos, revisões e sugestões em Notre Dame e em outras instituições. Agradeço a todos e peço desculpas antecipadamente a alguém cujo nome tenha sido omitido.

Boston Museum of Science: Ioannis Miaoulis

California Institute of Technology /NASA Jet Propulsion Laboratory: Erik Antonsson, Gary Block, Fehmi Cirak (atualmente na University of Cambridge), Andy Downard, David Politzer, Paul Springer, Thomas Sterling (atualmente na Louisiana State University), Ed Upchurch, Roy Williams

California State Polytechnic University, Pomona: Francelina Neto

University of Connecticut: Zbigniew Bzymek

Cray, Inc.: Kristi Maschhoff

IBM: John Cohn, Peter Hofstee

Intel: Shekhar Borkar

Iowa State University: Martha Selby

University of Maryland: Leigh Abts

University of Melbourne: Ray Dagastine, Jamie Evans, Roger Hadgraft, Rao Kotagiri, Andrew Ooi, David Shallcross, Harald Sondergaard, Tony Wirth

University of Michigan: Jason Daida

University of Missouri, Columbia: Craig Kluever

Norwich University: Paul Tartaglia
University of Notre Dame: László Barabási (atualmente na Northeastern University), Gary Bernstein, Joanne Bird-sell, Kevin Bowyer, Joan Brennecke, Pat Dunn, Pat Flynn, Natalie Gedde, Alex Hahn, Bob Howland, Jeff Kantor, Lloyd Ketchum, Tracy Kijewski-Correa, Peter Kogge, Craig Lent, Marya Lieberman, Mark McCready, Leo McWilliams, Kerry Meyers, Al Miller, Dave O'Connor, Sam Paolucci, Wolfgang Porod, Joe Powers, Keith Rigby, Matthias Scheutz (atualmente na Indiana University), Mihir Sen, Greg Snider, Mike Stanisic, Bill Strieder, Aaron Striegel, Flint Thomas, John Uhran, Mitch Wayne
Ohio University: Daniel Gulino
Portland State University: Lemmy Meekisho, Hormoz Zareh
Rice University: Jim Tour
Rose-Hulman Institute of Technology: Patricia Brackin
University of Southern California: Jean-Michel Maarek
Stanford University: Larry Leifer
Tennessee State University: Hamid Hamidzadeh
Tufts University: Chris Rogers
University of Virginia: Michael Fowler
Virginia Tech: Michael Gregg
Louisiana Tech University: Kelly Crittenden
University of Queensland: S. J. Witty
Zyvex Corporation: Robert Freitas

Gostaria também de agradecer à Cray Inc. e à Defense Advanced Research Projects Agency (DARPA), pelo apoio a minhas atividades de pesquisa durante os anos em que escrevi este livro enquanto eu era visitante do Caltech. Gostaria também de agradecer à National Science Foundation, pelo apoio continuado por meio de auxílios de pesquisa e de aperfeiçoamento de currículos, os quais tornaram

possível este trabalho.

A equipe da Wiley foi fantástica, e terei muito prazer em trabalhar novamente com ela no futuro. Em particular, gostaria de agradecer a Rachael Leblond, Mike McDonald, Chris Ruel, Ken Santor, Dan Sayre, Gladys Soto e Joe Hayton, que assumiram o projeto e o conduziram nos primeiros anos.

Finalmente, agradeço a minha esposa Jean, meus filhos Abby e Sam, meus irmãos Rob e Reed e meu pai Mel, pelo seu amor e apoio durante mais de cinco anos de trabalho.

Jay Brockman
South Bend, Indiana
Janeiro de 2008

Sumário

Parte I A ABORDAGEM DA ENGENHARIA

1 Engenharia e Sociedade

1.1 Introdução

1.2 O Método da Engenharia

1.2.1 Ciência, Matemática e Engenharia

1.2.2 Engenhosidade: Do Levantamento de Pesos à Microeletrônica

1.2.3 Modelos de Engenharia

1.3 Redes e Sistemas

1.3.1 Tudo Está Ligado a Tudo

1.3.2 Uma Rede de Inovações

1.3.3 Sistemas

1.4 Disciplinas e Especialidades da Engenharia

1.4.1 Introdução

1.4.2 Uma Visão Geral das Disciplinas de Engenharia

1.4.3 Organizações Profissionais

1.4.4 Inovações nas Interfaces entre Disciplinas

1.5 Engenharia e Computação

1.5.1 Programação e Raciocínio Lógico

1.5.2 Processamento de Dados Numéricos

Problemas

2 Organização e Representação de Sistemas de

Engenharia

2.1 O que Pensamos a Respeito de Como Pensamos

2.1.1 Exemplo: Fazendo Contas de Cabeça

2.1.2 Um Modelo de Processamento Cognitivo

2.1.3 O Conhecimento de "Como Fazer" e a Solução de Problemas

2.1.4 A Mente e o Cérebro

2.2 Mapas Conceituais

2.2.1 O que É um Mapa Conceitual?

2.2.2 Como Preparar um Bom Mapa Conceitual

2.2.3 Hierarquias

2.3 Representação e Projeto

2.3.1 Função, Ambiente e Forma

2.3.2 Requisitos, Especificações e as Forças que Ajudam a Definir um Produto

2.3.3 Hierarquias de Projeto

2.4 Exemplo: Fornecimento de Água a Comunidades Rurais de Países em Desenvolvimento

2.4.1 O Problema de Alto Nível: Como Atender às Necessidades da Comunidade

2.4.2 Um Problema de Baixo Nível: Projeto de uma Bomba Manual

2.4.3 Um Problema de Nível Ainda Mais Baixo: Anéis de Vedação e Rolamentos

Problemas

3 Aprendizado e Solução de Problemas

3.1 Introdução

3.2 Competência e o Processamento de Aprendizado

3.3 O que Você Sabe? Níveis de Entendimento

3.3.1 Conhecimento: Busca de Fatos na Memória

3.3.2 Compreensão: Entendimento do Significado

3.3.3 Aplicação: Uso em Novas Situações

3.3.4 Análise: Divisão em Partes

3.3.5 Síntese: Integração de Várias Partes

3.3.6 Avaliação: Uso do Bom Senso para Chegar a uma Decisão

3.3.7 Responsabilidades Sociais da Tomada de Decisões
3.4 Como Obter Bons Resultados no Aprendizado
3.4.1 Prepare-se para Aprender
3.4.2 Adquira Conhecimentos Sólidos
3.4.3 Metacognição: Avalie o Seu Entendimento
3.5 Uma Estratégia para Resolver Problemas
3.5.1 Solução de Problemas, Etapa Zero: Eu Posso
3.5.2 Solução de Problemas, Primeira Etapa: Definir
3.5.3 Solução de Problemas, Segunda Etapa: Explorar
3.5.4 Solução de Problemas, Terceira Etapa: Planejar
3.5.5 Solução de Problemas, Quarta Etapa: Implementar
3.5.6 Solução de Problemas, Quinta Etapa: Verificar
3.5.7 Solução de Problemas, Sexta Etapa: Generalizar
3.5.8 Solução de Problemas, Sétima Etapa: Apresentar os Resultados
3.6 Qual É a Quantidade de CO_2 Produzida por um Carro de Passeio Típico?
3.6.1 Definir
3.6.2 Explorar
3.6.3 Planejar
3.6.4 Implementar
3.6.5 Verificar
3.6.6 Generalizar
3.6.7 Apresentar os Resultados
3.7 Planejamento de Projetos Maiores
3.7.1 SolderBaat: Um Sistema de Montagem e Testes de Placas de Circuito Impresso
3.7.2 Escalonamento de Tarefas
3.7.3 Trabalho de Equipe e Resultados
3.8 Heurísticas
3.8.1 Escreva no Papel
3.8.2 Escreva em Termos Mais Simples
3.8.3 Faça uma Figura
3.8.4 Você Conhece um Problema Parecido?
3.8.5 Trabalhe para a Frente e para Trás

3.8.6 Trabalhe de Cima para Baixo e de Baixo para Cima
3.8.7 Divida para Conquistar
3.8.8 Verifique se Existem Restrições Desnecessárias
3.8.9 Discuta
3.8.10 Tente Resolver uma Versão Simplificada do Problema
3.8.11 Tente Resolver um Problema Mais Simples do Mesmo Tipo
3.8.12 Use Modelos
3.8.13 Teste Palpites
3.8.14 Use uma Analogia
3.8.15 Mude de Perspectiva
3.8.16 Observe o Conjunto
3.8.17 Comece pelas Partes Mais Fáceis
3.8.18 Experimente Alguns Números
3.8.19 Mantenha um Registro dos Progressos
3.8.20 Mude a Representação
3.8.21 Mude de Plano
3.8.22 Siga Seus Palpites
3.8.23 Faça uma Pausa
Problemas

Parte II PROJETOS BASEADOS EM MODELOS

4 Leis da Natureza e Modelos Teóricos

4.1 Modelos de Engenharia
4.2 Evolução da Teoria
4.3 Modelos de Movimento
4.3.1 A Física de Aristóteles
4.3.2 Galileu e o Método Científico
4.3.3 René Descartes e a Conservação do Movimento
4.3.4 A Royal Society
4.3.5 Huygens Melhora o Modelo de Descartes
4.3.6 Leis de Movimento de Newton
4.3.7 Leibniz e a “Força Viva”, Trabalho e Energia
4.4 Um Modelo para a “Mola de Ar”

4.4.1 O Horror ao Vácuo
4.4.2 Lei de Boyle
4.4.3 Lei de Hooke
4.5 A Máquina de Pistão
4.5.1 A Máquina de Newcomen
4.5.2 A Versão de James Watt da Máquina de Newcomen
4.6 A Ciência da Termodinâmica
4.6.1 Sadi Carnot e os Limites da Eficiência das Máquinas Térmicas
4.6.2 James Joule: Dos Planos de uma Nova Cervejaria a uma Teoria de Calor e Energia
4.7 Conservação da Massa
4.7.1 Robert Boyle e *O Químico Cético*
4.7.2 Antoine Lavoisier
4.8 Exemplo de Análise: O Motor de Combustão Interna
4.8.1 Funcionamento do Motor de Quatro Tempos
4.8.2 Eficiência do Tempo de Admissão e a Mistura Ar/Combustível
4.8.3 Eficiência do Tempo de Compressão e a Razão de Compressão
4.9 Exemplo de Projeto: A Bomba Manual
4.9.1 Definição do Problema e Plano de Ataque
4.9.2 Modelagem das Forças que Agem sobre o Êmbolo
4.9.3 Modelagem do Braço da Bomba
4.9.4 Modelagem da Eficiência da Bomba
Problemas

5 Análise de Dados e Modelos Empíricos
5.1 Introdução
5.2 Teoria e Dados
5.2.1 Validação da Lei de Boyle
5.2.2 Comportamento Exponencial, Gráficos Logarítmicos e Lei de Moore
5.3 Modelos Empíricos
5.3.1 Introdução
5.3.2 Execução de um Experimento
5.3.3 Interpolação e Ajuste de uma Reta aos Dados

5.4 Uso de Métodos Estatísticos para Quantificar a Imprecisão
5.4.1 Causas de Imprecisão
5.4.2 Média e Desvio Padrão: Erros Sistemáticos e Erros Aleatórios
5.4.3 Como Estimar uma Probabilidade
5.4.4 Frequência de Resultados e Histogramas
5.4.5 A Teoria da Curva em Forma de Sino
5.5 Estudos de Engenharia: Escolha de Opções de Projeto
5.5.1 Metodologia: Criação e Uso de Mapas
5.5.2 Definição do Problema e Plano de Ataque
5.5.3 Mapas do Espaço de Projeto
5.5.4 Determinação de Parâmetros para Atender a Restrições de Distância
5.5.5 Determinação de Parâmetros para Atender à Restrição de Energia Mínima
Problemas

6 Modelagem de Relações entre os Componentes de um Sistema: Estruturas Leves
6.1 Introdução
6.2 Ponto de Vista do Equilíbrio Estático
6.2.1 A Força como um Vetor
6.2.2 Adição de Forças
6.2.3 Equilíbrio de um Ponto ou Partícula
6.2.4 Equilíbrio de Pinos Articulados e Barras
6.2.5 Cargas, Suportes e Forças de Reação
6.2.6 Análise Estática de uma Treliça Completa
6.3 Ponto de Vista dos Materiais
6.3.1 As Barras como Molas: A Lei de Hooke e o Módulo de Young
6.3.2 Resistência dos Materiais
6.3.3 Flambagem
6.4 O Modelo Completo
6.4.1 Ponto de Vista do Equilíbrio Estático
6.4.2 Ponto de Vista dos Materiais
6.4.3 Treliças Estaticamente Determinadas e Indeterminadas

6.5 Exemplo: Estudo de Engenharia de Resistência *versus* Peso em uma Treliça
6.5.1 Definição do Problema e Plano de Ataque
6.5.2 Implementação do Plano
6.5.3 Escolha Final dos Parâmetros
Problemas

7 Modelagem de Relações entre os Componentes de um Sistema: Circuitos Eletrônicos Digitais
7.1 Introdução
7.2 Máquinas de Computação
7.2.1 Os Pontos de Vista Lógico e Físico
7.2.2 História e Fundamentos
7.3 Circuitos Digitais do Ponto de Vista Simbólico e Lógico
7.3.1 Lógica Booleana
7.3.2 Construção de Máquinas de Computação Usando Chaves
7.3.3 Representação de Números no Sistema Binário
7.3.4 Soma de Números Usando Chaves
7.4 Circuitos Digitais do Ponto de Vista Eletrônico
7.4.1 Eletricidade
7.4.2 Dispositivos Elétricos
7.4.3 Circuitos Elétricos
7.5 Exemplo de Projeto: O Circuito Inversor
7.5.1 Fundamentos
7.5.2 Definição do Problema e Plano de Ataque
7.5.3 Escolha das Dimensões do Dispositivo
7.5.4 Cálculo da Potência Consumida
Problemas

8 Modelagem de Mudanças em Sistemas
8.1 Introdução
8.2 Previsão do Futuro: Um Acúmulo de Mudanças

8.2.1 O Estado de um Sistema
8.2.2 Método de Euler: Previsão da Mudança de um Estado para Outro
8.3 Lançamento de uma Bola de Softball
8.3.1 Definição do Problema e Plano de Ataque
8.3.2 Modelagem da Trajetória da Bola sem Arrasto
8.3.3 Modelagem da Trajetória da Bola com Arrasto
8.3.4 Modelos Contínuos e Discretos
8.4 Vamos Ficar sem Gasolina?
8.4.1 Fundamentos
8.4.2 Definição do Problema e Plano de Ataque
8.4.3 Vazão de um Líquido e Conservação da Massa
8.4.4 Crescimento a uma Taxa Constante: População e Consumo de Petróleo *Per Capita*
8.4.5 O Modelo Completo
8.4.6 Ficaremos Realmente sem Petróleo a Partir de 2040?
Problemas

Parte III SOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM O MATLAB

9 Introdução ao MATLAB
9.1 A Primeira Sessão de MATLAB
9.1.1 Interpretação de Expressões Aritméticas Simples
9.1.2 Variáveis
9.1.3 *Scripts*
9.2 Exemplos
9.2.1 Determinação das Velocidades após uma Colisão
9.2.2 Massa do CO_2 Produzido por um Automóvel
Problemas

10 Operações Vetoriais no MATLAB
10.1 Introdução
10.2 Operações Básicas
10.2.1 Definição de Vetor e Acesso aos Elementos de um Vetor

10.2.2 Operações Aritméticas com Vetores, Elemento por Elemento
10.2.3 Exemplo: Confirmação da Lei de Boyle
10.3 Gráficos Bidimensionais
10.3.1 Gráfico Simples
10.3.2 Títulos e Rótulos
10.3.3 Estilos de Linha
10.3.4 Mais de uma Curva no Mesmo Gráfico
10.3.5 Mais de um Gráfico na Mesma Figura
10.3.6 Plotagem de Funções
10.3.7 Gráficos Especiais
10.3.8 Exemplo: Plotagem dos Resultados do Experimento de Boyle
10.3.9 Exemplo: Lei de Moore e Gráficos Logarítmicos
10.4 Estatística
10.4.1 Parâmetros Básicos: Mínimo, Máximo, Média, etc.
10.4.2 Contagem de Valores em um Intervalo
10.4.3 Frequência de Resultados e Histogramas
10.4.4 Outras Funções Estatísticas
Problemas

11 Operações com Matrizes no MATLAB
11.1 Operações Básicas
11.1.1 Definição de Matriz e Acesso aos Elementos de uma Matriz
11.1.2 Operações Aritméticas com Matrizes, Elemento por Elemento
11.2 Varredura Simultânea de Dois Parâmetros
11.2.1 Criação de Tabelas Usando a Função meshgrid
11.2.2 Exemplo: Força Exercida sobre o Êmbolo de uma Bomba em Função da Profundidade do Poço e do Raio do Cilindro
11.3 Gráficos Tridimensionais
11.3.1 Gráficos de Malha e de Superfície
11.3.2 Gráficos de Contorno
11.3.3 Gráficos de Vistas Laterais
11.4 Aritmética Matricial
11.4.1 Matriz Nula
11.4.2 Igualdade de Matrizes

11.4.3 Adição de Matrizes
11.4.4 Multiplicação de uma Matriz por um Escalar
11.4.5 Subtração de Matrizes
11.4.6 Multiplicação de Matrizes
11.5 Solução de Sistemas de Equações Lineares
11.5.1 Equações Lineares em Forma Matricial
11.5.2 A Matriz Identidade e a Matriz Inversa
11.5.3 Solução de Equações Matriciais Usando Matrizes Inversas
11.5.4 Solução de Equações Matriciais Usando o Operador Barra Invertida
11.5.5 Exemplo: Análise de uma Treliça
11.5.6 Exemplo: Análise de Circuitos Elétricos
Problemas

12 Introdução a Algoritmos e Programação em MATLAB
12.1 Algoritmos, Fluxogramas e Pseudocódigo
12.1.1 O que É um Algoritmo?
12.1.2 Descrição de Sequências Simples de Operações
12.1.3 Sub-rotinas
12.1.4 Ramificações Condicionais
12.1.5 *Loops*
12.2 Funções do MATLAB
12.2.1 Funções Matemáticas e Funções do MATLAB
12.2.2 Funções que Chamam Funções
12.2.3 Acompanhamento da Execução de uma Função Usando o Debugger do MATLAB
12.3 Comandos Condicionais
12.3.1 Revisão de Expressões Lógicas
12.3.2 Comandos IF/ELSE/ELSEIF
12.3.3 Acompanhamento da Execução de um Comando IF Usando o Debugger
12.4 Comandos de Repetição
12.4.1 O Comando WHILE

12.4.2 O Comando FOR
12.4.3 Uso do Debugger para Acompanhar a Execução de um Comando de Repetição
12.4.4 *Loops* Aninhados
12.4.5 Erros Comuns Associados a *Loops*
12.5 Exemplos do Uso de Funções, Comandos Condicionais e Comandos de Repetição
12.5.1 Subfunções: A Receita de Bolo
12.5.2 Funções Vetoriais e Matriciais
12.6 Acúmulo de Mudanças
12.6.1 Revisão: Modelagem do Crescimento Populacional
12.6.2 Modelagem da Trajetória de uma Bola com Arrasto
Problemas

Apêndice A Processo de Resolução de Problemas

Apêndice B A Taxonomia de Bloom: Níveis de Entendimento

Apêndice C Sociedades de Engenharia e Organizações de Classe

Apêndice D Sistemas de Unidades
D.1 O SI
D.2 Unidades de Outros Sistemas e Fatores de Conversão

Bibliografia

Índice

Introdução à Engenharia: Modelagem e Solução de Problemas

PARTE I

A ABORDAGEM DA ENGENHARIA

CAPÍTULO 1

ENGENHARIA E SOCIEDADE

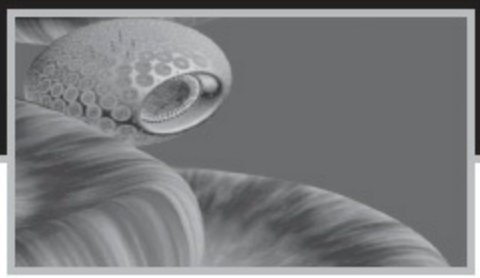
CAPÍTULO 2

ORGANIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS DE ENGENHARIA

CAPÍTULO 3

APRENDIZADO E SOLUÇÃO DE PROBLEMAS

CAPÍTULO 1



Engenharia e Sociedade

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- proporcionar uma visão do nosso ambiente como sendo constituído por seres naturais e *artificiais, e* discutir o papel dos engenheiros no projeto e fabricação desses seres artificiais para atender a necessidades e desejos humanos;
- definir o que é um *sistema* e discutir exemplos de sistemas, entre eles o ambiente de trabalho da engenharia;
- discutir algumas das oportunidades e desafios que os engenheiros deverão encontrar na próxima década;
- descrever os objetivos de algumas das principais disciplinas dos cursos de graduação em engenharia e apresentar algumas atividades profissionais desempenhadas por engenheiros;
- discutir o papel da computação e do processamento de informação na prática da engenharia.

1.1 INTRODUÇÃO

Em seu livro de 1968, *The Sciences of the Artificial/As Ciências do Artificial* [Sim96], Herbert Simon observou que o mundo contém dois tipos de seres: naturais e *artificiais*. Os seres naturais são formados pelos processos da natureza, pelo vento, pela chuva e pelo sol, e pelos movimentos do núcleo pastoso da terra. Historicamente, o papel das

ciências naturais é investigar esses fenômenos naturais. Quando os geólogos, físicos e químicos analisam os seres naturais, em geral procuram responder a perguntas como:

- De que forma este objeto se comporta?
- De que é feito?
- Como se formou?

Por outro lado, os seres artificiais que existem em nosso planeta, e em outros locais do sistema solar, foram todos projetados e construídos com um *objetivo*: satisfazer necessidades e desejos complexos da humanidade. A lista de necessidades humanas básicas inclui alimentos, água, habitação, saneamento, comunicações, educação e lazer. Para muitos de nós, o ar que respiramos diariamente é artificialmente aquecido, resfriado ou filtrado, e as visões e sons que recebemos estão repletos de sinais e símbolos. Simon usa o termo *artificial*, sem as conotações negativas às vezes associadas à palavra, simplesmente para designar "produzido por seres humanos". Da mesma forma, usa o termo *artefato* para designar os produtos desses processos artificiais. Embora muitos artefatos sejam objetos concretos, também podem assumir outras formas, como a de processos, eventos ou serviços. Desde a época em que formamos nossas primeiras comunidades, nossa sobrevivência tem dependido de nossa capacidade de produzir artefatos, e todas as civilizações conhecidas deixaram suas marcas no mundo natural através dos artefatos que produziram.

Figura 1.1 Cenas naturais e artificiais no deserto: Arco Delicado, no Parque Nacional dos Arcos, Utah, e o Strip, em Las Vegas, Nevada. (Foto do Arco Delicado, cortesia do US National Park Service.)

O objetivo principal da engenharia é aplicar a tecnologia, em combinação com fenômenos naturais, para obter as coisas que desejamos ou de que necessitamos. Enquanto as ciências naturais procuram descobrir como as coisas *são*, a engenharia propõe a seguinte questão:

- Que forma *devemos* dar a esta coisa para que ela sirva ao propósito desejado?

A engenharia é uma profissão tão variada quanto as necessidades da sociedade. Os engenheiros trabalham em todos os tipos de ambientes de negócios, desde grandes empresas e fábricas até pequenas companhias e firmas de consultoria. Os engenheiros trabalham em pátios de obras, em fazendas, em plataformas oceânicas de exploração de petróleo e no espaço sideral. Atendem às necessidades das forças armadas e ensinam nas universidades. Engenheiros formados também levam seus conhecimentos para outras profissões, como a medicina, o direito, a economia e a arte. Os engenheiros ajudam a modificar nosso mundo usando instrumentos que vão de máquinas pesadas a programas de computador, e a criar novos instrumentos sempre que necessário. Eles recolhem e produzem informações e tomam decisões importantes com base nessas informações. Será que esta estrutura é capaz de suportar a carga a

que será submetida? O centro de processamento de dados de uma empresa pode ser resfriado a ar ou será necessário um resfriamento a água para que funcione adequadamente? Nos laboratórios das universidades, do governo e das empresas, os engenheiros adquirem novos conhecimentos que podem ser usados para criar novos ou melhores produtos, processos e serviços. Finalmente, os engenheiros estudam e praticam uma grande variedade de especialidades ou disciplinas. As mais conhecidas (engenharia mecânica, engenharia civil, engenharia elétrica e engenharia química) são campos vastos, com muitas subespecialidades.

Dentro da grande diversidade da engenharia, o objetivo principal deste livro é estabelecer um fundamento comum, compartilhado por engenheiros de todas as especialidades. Em outras palavras, este livro apresenta uma visão do mundo pelos olhos de um engenheiro, mostrando de que forma os engenheiros usam a ciência e a tecnologia para resolver os problemas da sociedade.

1.2 O MÉTODO DA ENGENHARIA

A palavra “engenheiro” vem do latim *ingenium*, que significa engenho, a capacidade de planejar ou criar. Como os engenheiros usam a tecnologia para criar as coisas de que necessitamos, eles precisam de uma base sólida de ciências e matemática. As ciências e a matemática, porém, são apenas uma parte da formação de um engenheiro. Enquanto o currículo de ciências ensina o método científico, o currículo de engenharia deve ensinar o *método da engenharia*.

Quase todos os problemas de engenharia são *abertos*, ou seja, não possuem uma solução única. O fato de um problema ter mais de uma solução, porém, não significa que seja fácil de resolver; na verdade, o fato de existirem várias soluções possíveis muitas vezes torna o problema mais difícil. No início do curso de engenharia, a maioria

dos estudantes não se sente bem com problemas abertos. Uma das razões para isso é que a maioria dos cursos de matemática e de ciências do segundo grau enfatiza a necessidade de encontrar a resposta "correta" de um problema, e, mais ainda, fomenta a expectativa de que essa resposta "correta" terá uma forma simples e elegante. Em segundo lugar, nos problemas abertos, o enunciado do problema frequentemente não fornece informações suficientes para que o aluno possa aplicar uma técnica conhecida, como resolver uma equação. Para superar esta dificuldade, muitas vezes é necessário fazer hipóteses, e o conhecimento de que hipóteses podem ser feitas e se são razoáveis só é adquirido através da experiência. Para complementar o estudo das ciências naturais e da matemática convencional, os engenheiros e outros estudantes das "ciências artificiais" precisam também aprender novas habilidades, tais como:

- formular um problema de projeto
- formular hipóteses
- formular possíveis ideias para projetos
- buscar soluções
- planejar e programar atividades
- usar recursos com eficiência
- organizar os componentes e atividades de um grupo de trabalho

1.2.1 Ciência, Matemática e Engenharia

A engenharia, a ciência e a matemática cresceram lado a lado, e cada uma se beneficiou com o progresso das outras. No fundo, porém, seus objetivos e métodos são diferentes. Richard Feynman, que deu aulas de física para calouros no Caltech e recebeu o prêmio Prêmio Nobel em 1965 por suas contribuições para o estudo das partículas subatômicas, comparou o processo de descoberta da ciência a tentativas de descobrir as regras do xadrez através da observação. O conjunto de regras que o cientista tenta descobrir são as "leis"

fundamentais do xadrez. Depois de observar alguns jogos, ele pôde formular uma “lei” de conservação dos bispos, segundo a qual cada jogador possui dois bispos, um dos quais só pode ocupar casas pretas, enquanto o outro só pode ocupar casas brancas. Um dia, porém, o cientista chega para observar um jogo em andamento e constata que existem dois bispos brancos em casas pretas. O que aconteceu, e que o cientista não presenciou, foi que um dos bispos brancos foi capturado e um peão branco chegou à oitava casa e se transformou em um bispo da mesma cor que o bispo remanescente. Em vez de se desesperar, o cientista deixa a lei em suspenso e continua a observar os jogos, na esperança de encontrar um mecanismo que explique a anomalia. Para levar mais longe a analogia de Feynman, um matemático deve criar uma linguagem precisa para descrever o tabuleiro e as peças de xadrez e as regras de acordo com as quais as peças se movem. Na falta de uma linguagem apropriada, os cientistas teriam muita dificuldade para descrever com precisão as leis que descobriram. Por sua vez, um engenheiro usaria as leis descobertas pelo cientista, descritas na linguagem da matemática, para formular uma estratégia vencedora para jogos de xadrez. Este exemplo simples ilustra alguns dos desafios fundamentais da engenharia: os cientistas podem não conhecer todas as regras do jogo, e mesmo conhecendo todas as regras, é difícil derrotar um adversário experiente em uma partida de xadrez.[1]

Como profissionais, os cientistas executam muitos trabalhos de engenharia, e os engenheiros, por sua vez, prestam grandes contribuições à ciência básica. Muitos estudantes de engenharia escolheram o curso porque gostaram das cadeiras de matemática e ciência do segundo grau, enquanto as carreiras de muitos cientistas começaram com atividades manuais. No segundo grau, a aula favorita de David Politzer era a de oficina mecânica. Sua habilidade para projetar e fabricar peças o levou a trabalhar em um laboratório de física durante o curso de graduação, montando equipamentos para

medir o decaimento de pósitrons, as partículas de “antimatéria” correspondentes aos elétrons. Esse projeto o levou a se perguntar *por que* era importante fazer esse tipo de medida, o que, por sua vez, despertou sua curiosidade a respeito da teoria que estava por trás dos experimentos. David chama atenção para o fato de que a invenção e a descoberta são metas igualmente importantes e desafiadoras, embora em sua carreira de físico tenha recebido mais atenção pelas descobertas. Em 2004, ele ganhou o Prêmio Nobel de Física por sua contribuição para o entendimento das forças que mantêm unidos os quarks, as menores partículas conhecidas. Embora suas pesquisas ainda sejam quase todas teóricas, hoje em dia David leciona a parte aplicada e experimental do curso introdutório de física do Caltech. “Os engenheiros criam muitas coisas legais”, ele afirma, e sua parte favorita do curso é projetar e apresentar demonstrações teatrais e às vezes explosivas de fenômenos físicos.

1.2.2 Engenhosidade: Do Levantamento de Pesos à Microeletrônica

Shekhar Borkar nasceu em Mumbai, Índia, e fez o curso de graduação em física na Universidade de Bombaim. Obteve o mestrado em Engenharia Elétrica na Universidade de Notre Dame e foi trabalhar na Intel, onde é atualmente Diretor do Laboratório de Tecnologia de Microprocessadores. “Nós, engenheiros, não sabemos nada de física quântica” – afirma, em tom jocoso. “Os físicos de verdade são muito mais espertos.” Entretanto, apesar da sua “ignorância” e talvez justamente graças a ela, os engenheiros descobriram formas extremamente criativas de burlar algumas leis naturais. Na verdade, não podem violar as leis, mas, usando métodos engenhosos, conseguiram realizações que pareciam impossíveis à luz de uma interpretação rígida dessas leis. Como exemplo, Shakhar descreve o modo como a Intel e outros fabricantes de semicondutores usaram a luz para projetar desenhos em pastilhas de semicondutores através de

máscaras tão finas que as ondas luminosas não podiam passar pelos espaços transparentes sem sofrer sérias distorções. Cientistas como Grimaldi, Newton, Gregory e Huygens observaram a distorção sofrida pela luz ao passar por fendas estreitas no século XVII, enquanto Young, Fresnel e Lord Rayleigh formularam a teoria moderna no século XIX. Os projetistas de microcircuitos não podem evitar essas distorções, mas, aproveitando o modo como as ondas luminosas se combinam, os engenheiros desenvolveram métodos para distorcer as máscaras de tal forma que a luz, ao ser projetada, forma o padrão desejado.

Um dos primeiros problemas de engenharia que a humanidade provavelmente teve que enfrentar foi o de levantar um objeto mais pesado do que uma pessoa é capaz de carregar. Embora muitas grandes obras tenham sido executadas no século XX, ainda nos maravilhamos com as obras antigas, como as pirâmides do Egito e do México e os monólitos de Stonehenge, porque nos perguntamos como podem ter sido construídos sem máquinas modernas. Embora tenha sido a descoberta das Leis do Movimento, de Newton, no século XVII, que nos permitiu abordar cientificamente o problema, há milhares de anos a humanidade já havia descoberto formas engenhosas de levantar pedras e outros objetos muito pesados. De acordo com as Leis de Newton, se a gravidade exerce sobre um objeto uma força de 1000 newtons, para que o objeto permaneça em repouso é preciso aplicar a ele uma força igual e oposta, de 1000 newtons. A Figura 1.2(a) ilustra uma consequência dessas leis: para uma pessoa manter um bloco de pedra de 1000 N (o que corresponde a uma massa de aproximadamente 100 quilogramas) sobre a cabeça, deve ser capaz de aplicar ao bloco uma força de 1000 N. Naturalmente, uma pessoa comum não é capaz de aplicar uma força dessa ordem, de modo que uma interpretação rígida e conservadora das Leis de Newton pode levar à conclusão de que uma pessoa comum não é capaz de levantar um bloco de 100 kg.

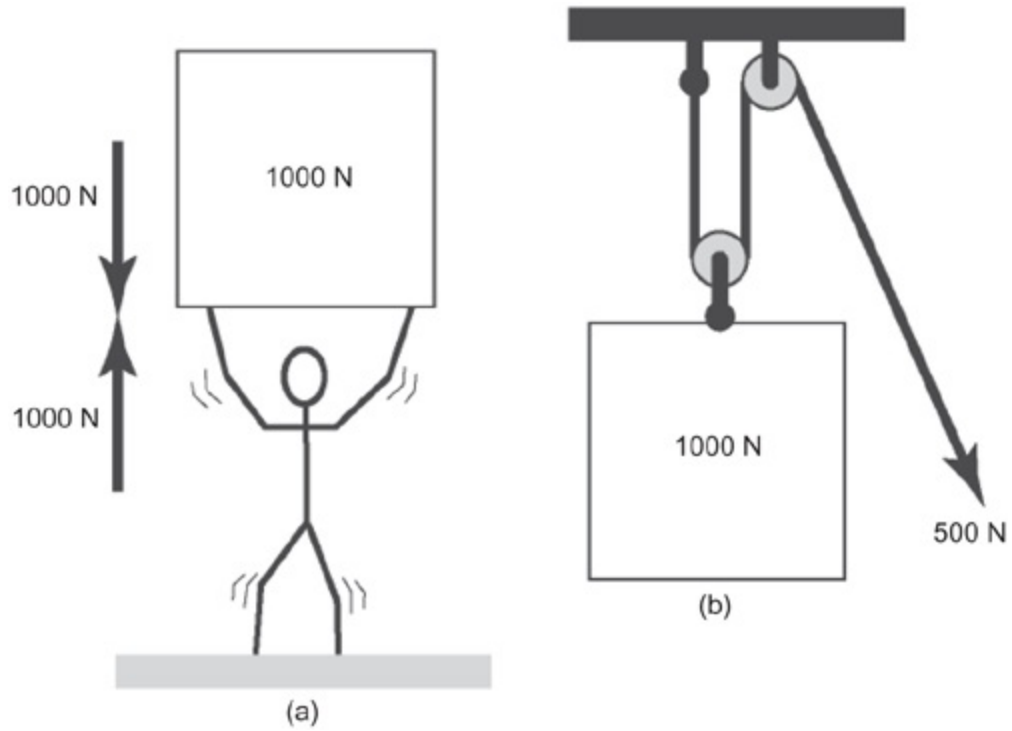


Figura 1.2 De acordo com a Terceira Lei de Newton, “a cada ação corresponde uma reação igual e oposta”. Entretanto, existem formas engenhosas de levantar um grande peso com uma pequena força aplicada sem violar a lei.

Com um pouco de criatividade, porém, é possível construir uma máquina que permite a uma pessoa comum levantar blocos pesados sem violar as Leis de Newton. Um dispositivo particularmente engenhoso é a talha. Como mostra a Figura 1.2(b), uma talha é formada por um conjunto de roldanas e uma corda. Acredita-se que tenha sido inventada por Arquimedes por volta de 200 a.C. (quase 2000 anos antes de Newton), mas as Leis de Newton nos ajudam a compreender como funciona. Como primeiro passo para entender o funcionamento de uma talha, imagine-se puxando uma corda presa a uma parede com uma força de 500 newtons, como mostra a Figura 1.3. De acordo com a Terceira Lei de Newton (a cada ação corresponde uma reação igual e contrária), a parede exerce sobre a corda uma força de 500 newtons. Suponha agora que alguém corte a corda e meça as forças exercidas sobre a corda no ponto em que foi cortada. De acordo com a Terceira Lei, as duas forças são iguais a 500

newtons, já que um dos lados do corte deve equilibrar a força exercida pela pessoa e o outro deve equilibrar a força exercida pela parede. Na verdade, qualquer que seja o número de cortes, as forças aplicadas às extremidades continuam a ser iguais a 500 newtons.

Considere agora a talha da Figura 1.4. Nesta configuração, um peso de 1000 newtons é pendurado na roldana A e uma força de 500 newtons é aplicado à extremidade livre da corda. Se fizéssemos três cortes na corda na altura da reta tracejada, as forças das extremidades livres seriam todas iguais a 500 newtons. Em particular, as extremidades do trecho da corda que envolve a roldana A seriam puxadas para cima com uma força de 500 newtons cada uma. Assim, uma força total de 1000 newtons seria aplicada ao peso, o suficiente para contrabalançar a força da gravidade e permitir que o peso fosse levantado.

Observe que a talha não viola nenhuma lei da física; na verdade, nossa análise de baseou nas Leis de Newton. Este exemplo simples mostra uma solução típica de engenharia, na qual uma aplicação criativa de uma lei natural, combinada com uma abordagem indireta do problema, permite realizar algo que inicialmente parecia impossível.

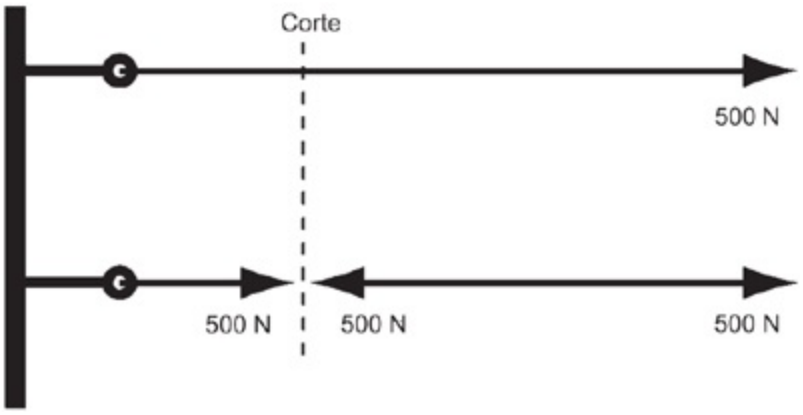


Figura 1.3 Se pudéssemos cortar uma corda que está sendo puxada com uma força de 500 newtons e medir as forças internas, de acordo com a Terceira Lei de Newton, as fibras de cada lado da corda exerceriam forças iguais e opostas de 500 newtons.

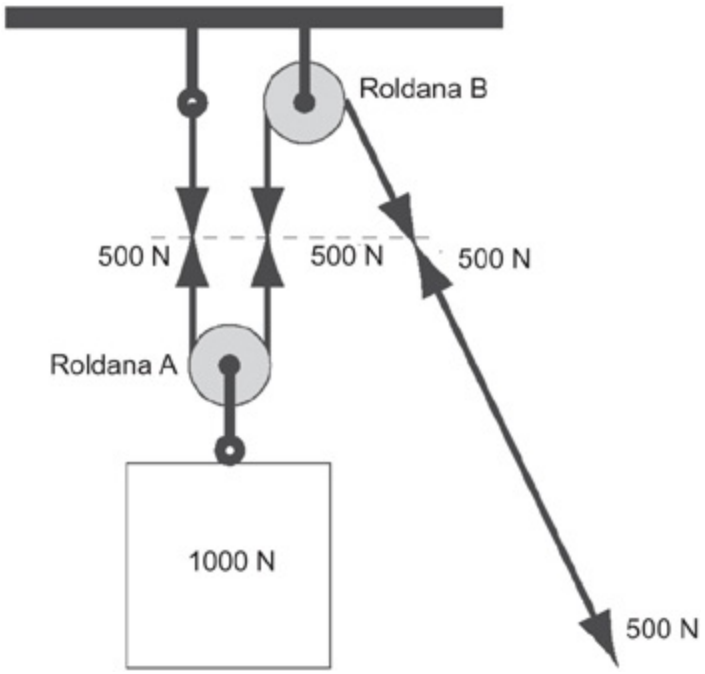
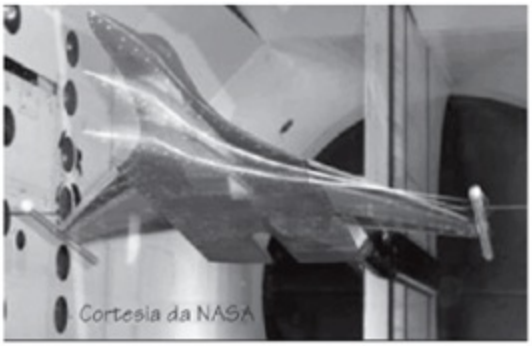


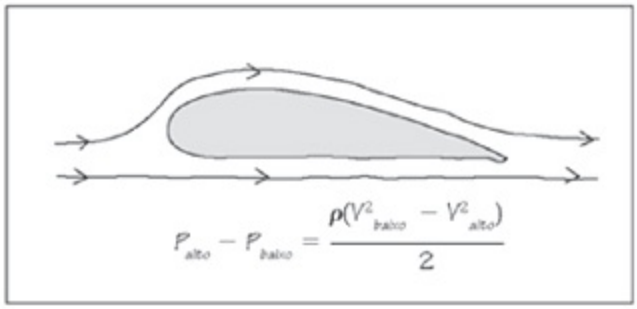
Figura 1.4 Graças às forças internas iguais e opostas que agem sobre a corda, cada extremidade do segmento que envolve a roldana A exerce uma força, para cima, de 500 newtons, o que resulta em uma força total de 1000 newtons.

1.2.3 Modelos de Engenharia

Como o exemplo da talha ajuda a ilustrar, às vezes as soluções de engenharia precedem as teorias científicas que explicam como e por que essas soluções funcionam. Frequentemente, porém, para se obter sucesso é preciso conhecer a teoria envolvida. A NASA, por exemplo, jamais teria conseguido pousar uma sonda em um asteróide ou recolher poeira da cauda de um cometa sem um conhecimento profundo das Leis de Newton com relação às forças gravitacionais entre corpos. Os engenheiros usam teorias científicas para desenvolver *modelos* dos seus projetos. Um modelo é uma versão aproximada de um sistema real; quando ações são realizadas sobre o modelo, ele responde de forma semelhante ao sistema real. Como mostra a Figura 1.5, os modelos podem ter muitas formas diferentes, desde protótipos até cálculos simples, passando por simulações em computador.

A capacidade de usar modelos para descrever processos e fenômenos é uma exigência básica em todos os ramos da engenharia, e esta é a razão principal pela qual os cursos de ciências constituem uma parcela importante dos currículos de engenharia. Mesmo nos cursos de engenharia, uma parcela considerável da carga de trabalho é dedicada ao estudo de modelos de diferentes fenômenos. Análise Estrutural, Análise de Circuitos, Termodinâmica, Arquitetura de Computadores, Mecânica dos Fluidos, todos esses cursos giram em torno de um conjunto fundamental de modelos que engenheiros de várias especialidades usam para colher informações e tomar decisões. Frequentemente, nos cursos de engenharia, são abordados tópicos que também são cobertos em cursos de ciência básica. Em geral, porém, os cursos de engenharia descrevem as “leis” dos cursos de ciência com um enfoque diferente – o de usá-las para desenvolver modelos como parte do método de engenharia.





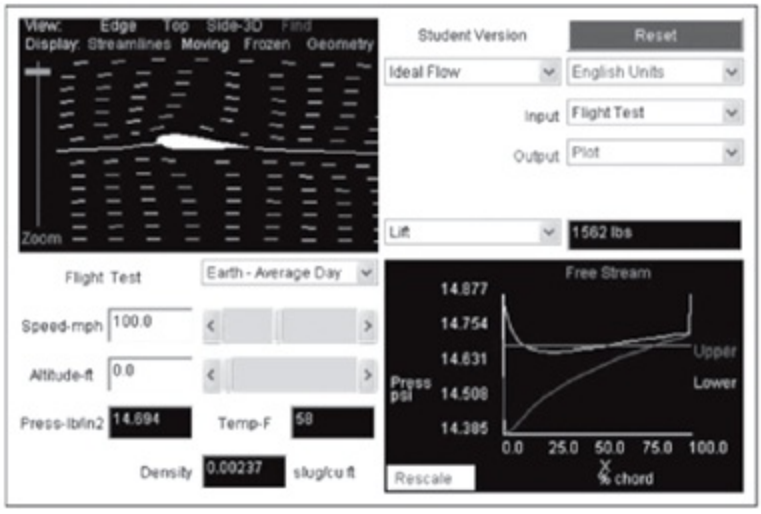


Figura 1.5 Diferentes tipos de modelos para estimar a força de sustentação da asa de uma aeronave. A partir da extremidade superior esquerda, no sentido horário: Protótipo, em escala reduzida, de uma aeronave, para uso em um túnel de vento; esboço e cálculo baseado na equação de Bernoulli; Foilsim II, simulador online para estudantes, desenvolvido pela NASA [BES + 99]. Imagens do túnel de vento e do Foilsim II cortesia da NASA.

1.3 REDES E SISTEMAS

1.3.1 Tudo Está Ligado a Tudo

Certa noite, em 1993, Craig Fass, Brian Turtle e Mike Ginelli estavam vendo televisão no Albright College, quando foi ao ar o *trailer* do filme de 1994, *Um Gigante de Talento*, com Kevin Bacon. Ocorreu a eles que Kevin Bacon havia participado de tantos tipos diferentes de filmes que deveria ser possível ligá-lo a muitos atores diferentes através de uma série de filmes [FTG96]. Leonardo DiCaprio, por exemplo, possui um "número de Bacon" igual a 2: ele trabalhou no filme *O Despertar de um Homem*, de 1993, com Robert de Niro, que trabalhou com Kevin Bacon em 1996 no filme *Sleepers – A Vingança Adormecida*. O número de Bacon de Elizabeth Taylor também é 2: ela trabalhou no filme de 1979 *Morte no Inverno* com Eli Wallach, que teve um papel secundário no filme de 2003 *Sobre Meninos e Lobos*, coestrelado por Kevin Bacon. Depois que os três estudantes apareceram com Kevin Bacon no programa de televisão *Jon Stewart Show*, em 1994, o jogo criado por eles, *Os Seis Graus de Kevin Bacon*, se espalhou rapidamente nos campus universitários e nos círculos de Hollywood. Em 1996, Brett Tjaden e Glenn Wasson, dois alunos de doutorado da Universidade de Virginia, criaram um site na Internet[2] que determina o número de Bacon de qualquer ator usando a Internet Movie Database[3] como base de dados. Surpreendentemente, o número de Bacon médio dos mais de 800.000 atores que aparecem no IMDB é apenas 2,96.

Como o professor de física de Notre Dame, Albert-László Barabási, observa em seu livro *Linked* [Bar03], Kevin Bacon é tanto centro de Hollywood quanto centro do universo. Acontece que quase qualquer ator pode ser ligado a outro ator através de um pequeno número de ligações nesta grande rede de relações que é o mundo do cinema. Além disso, "Os Seis Graus de Kevin Bacon" é apenas um exemplo de um fato que está se tornando cada vez mais evidente. Como escreve Barabási,

> Hoje sabemos que nada acontece isoladamente. Quase todos os eventos e fenômenos interagem com um grande número de outras peças de um quebra-cabeça universal. Vivemos em um mundo pequeno, no qual tudo está ligado a tudo. Estamos testemunhando uma revolução na qual cientistas de diferentes disciplinas descobrem que a complexidade tem uma estrutura própria. Começamos a reconhecer a importância das redes [Bar03].

Esta interligação, o fato de que "tudo depende de tudo", caracteriza a forma dos problemas e soluções de engenharia em todos os níveis. Quando observamos um motor de automóvel, uma ponte, um circuito integrado ou uma fábrica de produtos químicos, uma das primeiras coisas que nos chamam a atenção é a complexidade de todas as peças interconectadas. As conexões entre as pessoas das equipes de engenharia que projetaram e construíram esses artefatos exibem o mesmo grau de complexidade, o que também se pode dizer das relações entre os membros da sociedade que usam esses produtos, e das regiões do ambiente natural e sociopolítico nas quais vivem e trabalham. Os próprios artefatos constituem uma espécie de ligação entre as necessidades e desejos de uma sociedade e sua capacidade técnica, incluindo a criatividade, as ferramentas e os materiais de que dispõem. Como sabem os arqueólogos, desde os primeiros agricultores da Mesopotâmia até os construtores de cassinos no deserto de Nevada aprendemos muita coisa a respeito de uma sociedade, quando estudamos suas ligações com os artefatos que ela produz.

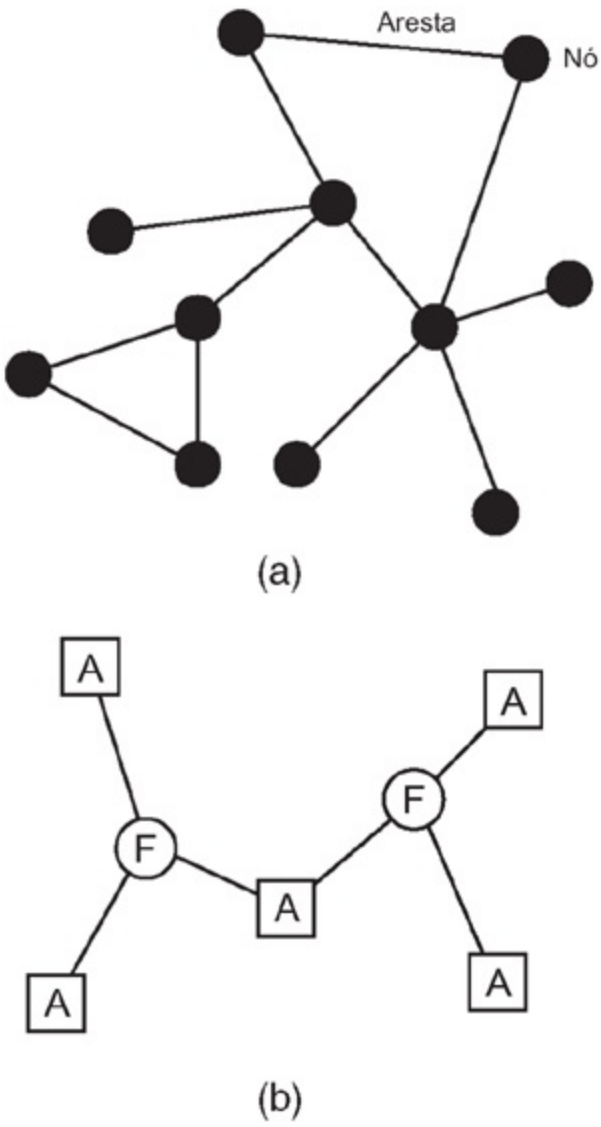


Figura 1.6 (a) Um grafo, formado por nós e arestas, é um diagrama de uma rede. (b) Um grafo da Internet Movie Database pode representar filmes e atores pelos nós (rotulados, respectivamente, como F e A), com as arestas representando as participações de atores em filmes.

Os diagramas ajudam a visualizar situações complexas, e em geral representamos as redes usando um tipo de diagrama que os matemáticos chamam de *grafo*, como o que aparece na Figura 1.6(a). Um grafo é formado por uma série de *nós*, normalmente desenhados como círculos ou quadrados, ligados por linhas retas conhecidas como *arestas*. Os nós de um grafo podem representar muitas coisas: pessoas, lugares, eventos, peças, ou simplesmente ideias. Em um grafo da rede

de filmes e atores, por exemplo, tanto os filmes como os atores podem ser representados pelos nós, enquanto as arestas representam as associações entre os atores e os filmes em que trabalharam, como mostra a Figura 1.6(b). Em geral, as arestas representam *ligações* entre dois objetos. A ligação pode ser física, como no caso de um fio que conecta dois componentes de um circuito elétrico, ou um rebite usado para unir duas vigas em uma estrutura em forma de treliça. Pode ser também uma troca de informações, como no caso de uma conversa entre duas pessoas. Finalmente, uma aresta pode representar um recurso natural – como um suprimento de água, um campo petrolífero ou a atmosfera – compartilhado pelos habitantes de um planeta que está se tornando cada vez mais superpovoado.

1.3.2 Uma Rede de Inovações

A rede de ligações que envolve qualquer projeto de grande porte apresenta alguns dos maiores desafios para os engenheiros, mas também proporciona algumas das maiores oportunidades. Nesta seção, vamos ver como uma rede de inovações em expansão foi responsável pelos enormes avanços da tecnologia de computação e comunicações que estamos presenciando nos dias de hoje.

A Lei de Moore Apesar da complexidade do seu comportamento, um microprocessador é, no fundo, apenas uma rede de pequenos comutadores elétricos chamados *transistores*. Em 1965, Gordon Moore, um dos fundadores da Intel, afirmou que o número de transistores que podiam ser integrados em uma pastilha de semicondutor dobraria a cada dois anos. Como mostra a Figura 1.7, esta previsão vem sendo confirmada nos últimos 30 anos. O aspecto mais fascinante da “Lei de Moore”, como foi chamada, é o fato de que não se trata exatamente de uma “lei”, mas de um ponto de honra para toda uma indústria, que motivou um grupo heterogêneo de engenheiros e cientistas a introduzir inovações com uma rapidez

atordoante. Cada ponto da Figura 1.7 representa um ciclo completo que envolve conceber a ideia de um novo produto, projetá-lo, fabricá-lo, comercializá-lo e distribuí-lo a cada dois anos. Embora Moore tenha estado à frente da Intel durante a maior parte desse tempo, não foi ele o único responsável por essa tendência, nem a história por trás da Lei de Moore está ligada apenas a tecnologias desenvolvidas pela Intel. Na verdade, o progresso nos últimos 35 anos foi resultado de uma vasta rede de ideias e indivíduos, em permanente expansão, que envolve muito mais que a tecnologia de fabricar pequenos comutadores em pastilhas de silício.

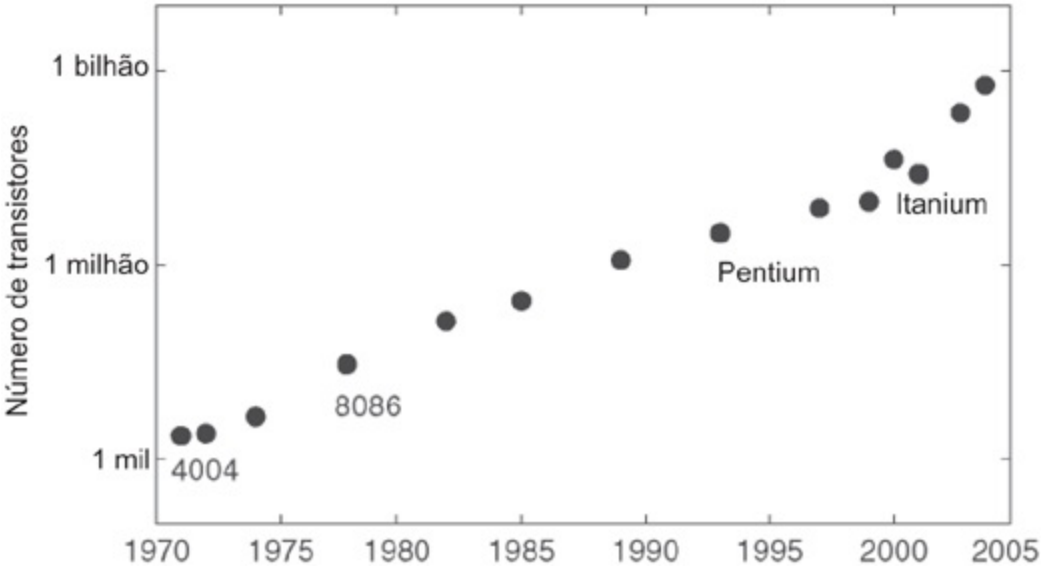


Figura 1.7 A Lei de Moore

Além dos progressos na tecnologia dos semicondutores, o aumento exponencial continuado da complexidade dos processadores durante mais de três décadas exigiu progressos no projeto dos computadores, no desenvolvimento de software em outras áreas. A Figura 1.8 mostra apenas uma parte da rede de tecnologias que cerca os transistores. As inovações tecnológicas em uma ponta de uma aresta ajudam a fomentar inovações tecnológicas na outra ponta. Não existe “ovo” nem “galinha” nesta rede; toda a rede funciona como um conjunto, e mudanças em uma parte da rede levam a mudanças em outras partes.

É interessante notar que algumas empresas que têm ligações diretas com a Intel no processo de encolher os transistores são mais conhecidas por outros produtos. É o caso da Nikon, responsável por progressos no campo da gravação fotográfica de circuitos integrados. Outras companhias têm uma relação mais distante, mas, mesmo assim, desempenham um papel importante no processo de desenvolvimento através de inovações.

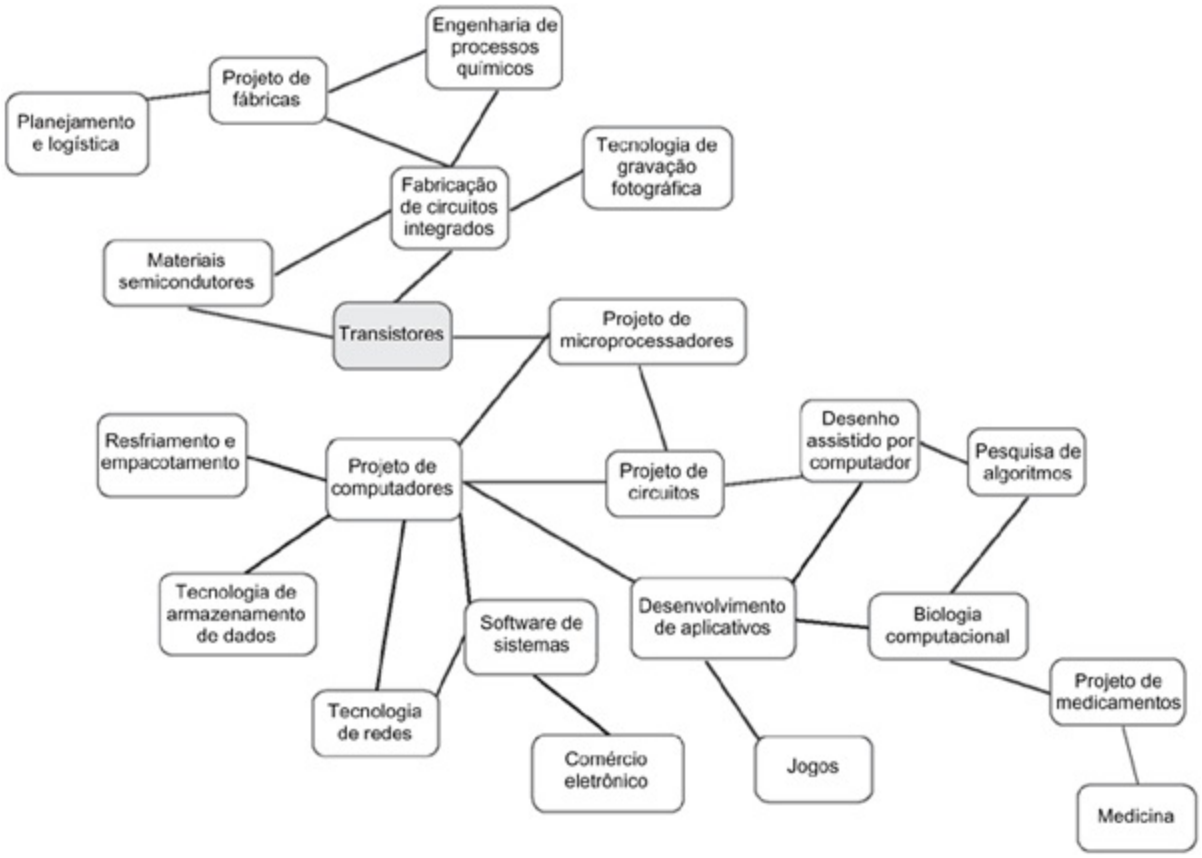


Figura 1.8 Uma rede de inovações baseada em muitas tecnologias é responsável pelo fato de que a Lei de Moore continua válida até hoje.

Dos Supercomputadores aos Videogames: Aplicativos e Tecnologia da Computação Kristi Maschhoff tirava boas nota em matemática e ciências nos cursos do segundo grau, mas, segundo ela, não teria entrado para a faculdade de engenharia se não fosse um “empurrão” dos pais. No início da década de 1980, a engenharia não era uma

opção popular para mulheres que se dispunham a fazer um curso superior. Ela estudou engenharia elétrica na Universidade do Novo México (onde também jogou futebol), mas as aulas não a deixavam particularmente interessada ou motivada. Um estágio de verão na Base Aérea de Kirtland, depois do segundo ano da faculdade, seguido por um emprego de tempo parcial na companhia de energia elétrica local (PNM) durante o terceiro e quarto anos ajudaram Kristi a despertar um novo interesse por simulação e modelagem matemática e, em particular, pelos algoritmos usados para resolver sistemas de equações com muitas incógnitas. Kirtland lhe proporcionou uma introdução à simulação em computador de sistemas reais — no caso, os cientistas estavam modelando *lasers*— e Kristi teve a experiência rara de executar simulações em um dos primeiros computadores Cray. Esta experiência a levou a optar por um curso de pós-graduação em Matemática Aplicada.

Hoje em dia, Kristi é Líder de Projetos Técnicos da Cray, Inc., uma empresa que, desde a década de 1970, projetou e fabricou alguns dos mais poderosos supercomputadores do mundo. A maior parte dos projetos da Cray atualmente tem por objetivo fornecer sistemas de computação de grande capacidade para órgãos de segurança e defesa nacional, pesquisa científica, previsão de tempo e modelagem climática. Outra aplicação dos supercomputadores que tem se tornado popular nos últimos anos é a modelagem da mecânica molecular, como, por exemplo, no caso da dobradura de proteínas, um conceito fundamental para compreender e possivelmente curar doenças como o mal de Alzheimer, o mal de Parkinson e a doença da Vaca Louca. Kristi descreve a relação simbiótica que tem existido entre essas e outras aplicações de grande importância e as indústrias de computadores e microeletrônica. Os avanços tecnológicos no campo da microeletrônica tornaram possível construir computadores mais potentes e velozes, permitindo aos cientistas usar modelos mais complexos e precisos, o que pode significar a diferença entre prever a

trajetória e intensidade de um furacão antes ou depois que ele chegue ao continente. Por outro lado, as necessidades dos meteorologistas e outros cientistas foram responsáveis pela demanda de computadores mais potentes, a qual, por sua vez, ajudou a manter a validade da Lei de Moore.

Embora as necessidades da ciência e do comércio continuem a estimular o progresso na tecnologia dos computadores e da informação, um dos maiores estímulos hoje em dia são os equipamentos eletrônicos de uso pessoal. Desde sua fundação, na década de 1880, quando produzia equipamentos para tabular os dados dos recenseamentos usando cartões perfurados, a IBM Corporation tem produzido alguns dos sistemas de computação mais avançados para negócios e pesquisas. Não obstante a companhia ainda se dedicar a "máquinas comerciais", os videogames também se tornaram um negócio importante para a IBM; em 2007, as três principais plataformas de videogames (Microsoft XBOX 360, Sony Playstation 3 e Nintendo Wii) usavam microprocessadores IBM [Valb] [Vala] [How]. Para obter sucesso no mercado, os microprocessadores para jogos devem oferecer uma combinação delicada de baixo consumo de energia, alto desempenho e baixo custo. Embora a experiência da IBM na fabricação de computadores de grande porte tenha sido aplicada com sucesso na produção de microprocessadores, a recíproca também é verdadeira: esforços recentes para atender às exigências do mercado de jogos levaram a novas ideias que encontram aplicações em sistemas de computação comerciais e científicos.

John Cohn é um dos engenheiros que ajudaram a tornar a tecnologia da IBM disponível para uma grande variedade de produtos, entre eles os videogames. No segundo grau, John era um nerd, "um tremendo geek", em suas próprias palavras; hoje em dia, algumas décadas mais tarde, não mudou muita coisa. Com a barba e cabelos grisalhos sempre em desalinho, John faz bem o tipo, e usa boa parte

do tempo de lazer para apresentar os estudantes de primeiro grau à engenharia com suas demonstrações de “Choques e Volts”. Criado em Houston na década de 1960, perto do centro de voos tripulados da NASA, John foi inspirado (como muitos de nós engenheiros de uma certa idade) pelo projeto de colocar homens na Lua. Durante o segundo grau, ele montava circuitos eletrônicos em casa; depois formou-se em Engenharia Elétrica no MIT. Mais tarde, John fez o curso de doutorado em Carnegie Mellon, especializando-se em desenho assistido por computador (CAD) de circuitos integrados.

Na IBM, John e sua equipe estão desenvolvendo ferramentas de CAD e padrões de projeto que permitirão aos engenheiros combinar elementos básicos para criar novos produtos e simular seus projetos para ter certeza de que funcionam adequadamente, antes que a fabricação seja iniciada. Desta forma, fabricantes de videogames, servidores e equipamentos para redes poderão usar os mesmos componentes para projetar microprocessadores totalmente diferentes, capazes de atender a suas necessidades específicas, sem deixar de atender aos prazos exíguos e limitações orçamentárias.

Globalização Enquanto o aumento da população mundial deixa as pessoas cada vez mais próximas, o progresso da tecnologia de comunicações reforça as ligações entre elas. Nos séculos XVI e XVII, quando a América estava sendo colonizada, as notícias das colônias levavam semanas ou meses para chegar à Europa. Hoje em dia, graças às comunicações sem fio e a redes como a Internet e a World Wide Web, pessoas em todas as partes do mundo podem trocar enorme quantidade de informação quase instantaneamente. Esta revolução na tecnologia da informação teve uma grande influência no modo como operam nossos sistemas artificiais, tanto tecnológicos como sociais e políticos.

Com a expansão das comunicações através da Internet, e com o aumento do uso de computadores nos processos comerciais e de

engenharia, os países em desenvolvimento, em especial a Índia e a China, tornaram-se parceiros importantes da economia técnica global. Além do mais, como observa um estudo da National Academy of Engineering, os engenheiros desses países “estão dispostos e são capazes” de executar trabalhos técnicos por salários muito menores que seus pares dos países industrializados [Nat04]. Essas nações investiram pesadamente em educação; atualmente, a China forma três vezes mais engenheiros por ano que os Estados Unidos [Nat04].

Na década de 1970, pequenos grupos de engenheiros que trabalhavam em escritórios vizinhos projetavam a maior parte dos circuitos integrados, que eram fabricados, encapsulados e testados em fábricas situadas no mesmo local ou nas proximidades. Em meados da década de 1980, tornou-se comum parte do processo de fabricação ser executada em outros países. Hoje, todos os aspectos do processo de engenharia, do projeto e desenvolvimento à fabricação e assistência técnica, são rotineiramente compartilhados por equipes espalhadas pelo mundo. As cidades indianas de Bangalore e Hyderabad se tornaram importantes centros de desenvolvimento de hardware e software para computadores e comunicações; em 2006, a Intel, a Microsoft e a Cisco investiram ou planejavam investir mais de 1 bilhão de dólares cada uma na criação de instalações de engenharia na Índia.

Esta tendência no sentido de práticas comerciais globais irá continuar e, através da tecnologia, se tornará mais eficiente. Segundo Shekhar Borkar, da Intel, o único obstáculo real para a produtividade das equipes globais de engenharia é que “as pessoas ainda precisam dormir”. Por causa das diferenças de fuso horário, por exemplo, uma reunião para tratar de um projeto pode ser marcada para as 21h na Califórnia, 13h em Manila, 7h em Jerusalém e 10h 30 em Bangalore. Shekhar acredita que na próxima década haverá uma grande preocupação com a qualidade de vida, e os engenheiros poderão conciliar melhor seus horários de trabalho com a vida familiar. Em

particular, os circuitos de comunicações de banda larga, juntamente com um software aperfeiçoado de teleconferência e compartilhamento de dados, permitirão que muitas pessoas trabalhem em casa (ou onde quiserem) sem terem que se reunir regularmente em um escritório. Shekhar observa que se deu conta desse fato ao se ver enviando e recebendo mensagens de e-mail em um voo entre a Califórnia e Frankfurt, Alemanha, enquanto sobrevoava a calota polar. Em 2006, já havia fortes indícios de que as pessoas se sentem à vontade colaborando com outras em outras partes do mundo, como demonstra o sucesso de salas de bate-papo e blogs, comunidades de jogos, e vendas internacionais através do eBay.

1.3.3 Sistemas

Viabilização dos Projetos O tamanho da rede associada a um problema de engenharia pode ser avassalador, e engenheiros e cientistas dedicam boa parte de seus esforços intelectuais à tentativa de compreender essa rede. A ferramenta mais poderosa que usam para organizar a vasta rede de informações é a noção de *sistema*. De acordo com o Oxford English Dictionary, sistema é "um conjunto ou montagem de entidades ligadas, associadas, ou interdependentes, de modo a formar uma unidade complexa". Pensar em termos de sistemas permite desenhar uma curva fechada em torno de parte de uma rede e considerar essa parte como uma entidade única. Como mostra a Figura 1.9, essa curva é chamada de *limite* do sistema, e a região do lado de fora do limite é chamada de *ambiente*. Os componentes de um sistema podem ser considerados, eles próprios, como sistemas, que recebem o nome de *subsistemas*. Assim, por exemplo, podemos pensar no MP3 *player* portátil como um sistema formado por uma placa-mãe e um disco rígido, e no disco rígido como um subsistema formado por um motor, um disco e outros componentes. Podemos continuar o processo considerando o motor como um subsistema com vários componentes, e assim por diante.

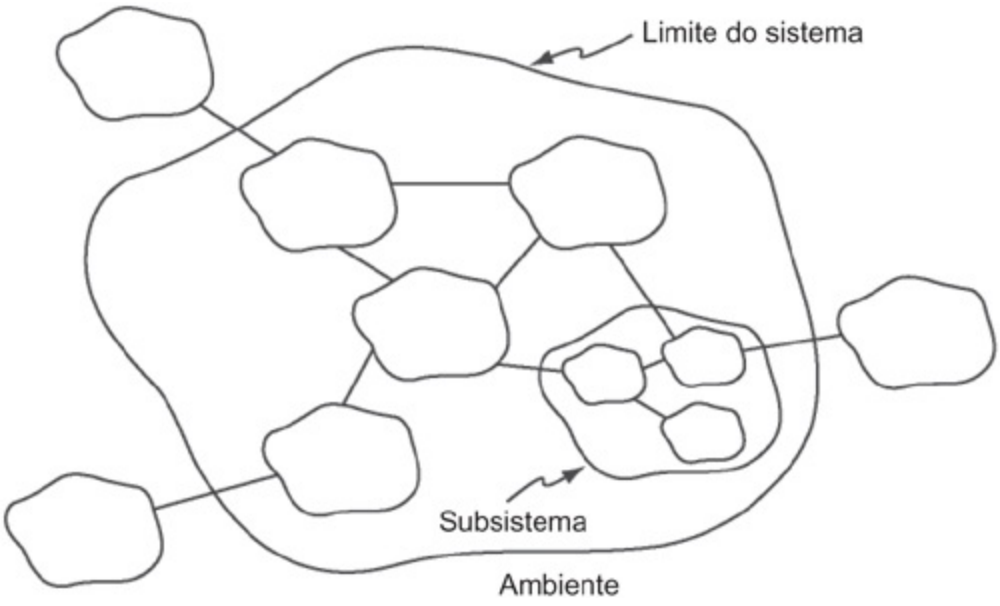


Figura 1.9 Um sistema.

Encontramos este arranjo em todos os tipos de projetos de engenharia. À primeira vista, não parece haver uma razão pela qual os sistemas *tenham* que ser organizados desta forma. É possível imaginar, por exemplo, um automóvel que não esteja dividido em vários subsistemas: você pisa no acelerador e, através de algum mecanismo complexo, o carro entra em movimento. Na verdade, é essa a impressão que uma pessoa que não conhece os subsistemas de um automóvel pode ter quando levanta o capô do veículo. A experiência, porém, nos leva a procurar uma organização sistemática; quando não a encontramos de imediato, sentimos que estamos deixando alguma coisa de lado.

Os sistemas desempenham um papel importante nos projetos de engenharia tanto por uma razão psicológica como por uma razão prática. A razão psicológica é que a organização clássica de “caixas dentro de caixas” dos sistemas de engenharia reflete diretamente o modo como organizamos e recuperamos informações em nossa mente. Como vamos ver no Capítulo 2, o número de informações com as quais as pessoas podem lidar simultaneamente é limitado, e dividir um problema complexo em subproblemas, ou dividir um sistema em

subsistemas, permite esquecer os detalhes e lidar com um número menor de conceitos de cada vez. Além disso, permite que várias pessoas trabalhem simultaneamente em diferentes partes de um projeto. Para resumir, recorremos ao conceito de sistema para tornar um projeto intelectualmente acessível e podemos reconhecer a marca desse processo humano de solução de problemas em quase todos os artefatos que produzimos.

A justificativa física para o uso de sistemas é que os projetos organizados desta forma tendem a ser mais robustos. Isto é verdade tanto para os sistemas artificiais como para os sistemas naturais; encontramos a organização de "caixas dentro de caixas" nos organismos vivos, que possuem subsistemas, como o sistema circulatório, o sistema digestivo, o sistema nervoso e muitos outros. Simon explica esse cenário usando uma parábola de dois relojoeiros, um que fabrica relógios colocando todas as peças na caixa de uma vez e outro que descobriu uma forma de dividir o projeto em subsistemas estáveis que podem ser combinados mais tarde, mesmo que para isso precise usar mais algumas peças [Sim96]. Sempre que a campainha toca, os dois relojoeiros se levantam para atender e a montagem na qual estavam trabalhando se desfaz. Enquanto o primeiro relojoeiro tem que recomeçar o trabalho do início, o segundo perde apenas uma submontagem e, na média, consegue montar um número muito maior de relógios. Além disso, é mais fácil localizar e consertar defeitos nos relógios montados a partir de vários subsistemas estáveis.

Mais Que a Soma das Partes O comportamento geral de um sistema é, em geral, mais que apenas a soma dos comportamentos de suas partes. Às vezes dizemos que o comportamento do sistema *emerge* quando os componentes funcionam juntos. Exemplo de um sistema desse tipo é um time de futebol, no qual os "componentes" são os jogadores, que desempenham diferentes papéis, como o de goleiro, zagueiro, meia e atacante. O objetivo do time é marcar gols e evitar

que o adversário marque gols. Os jogadores conseguem isso através de movimentos coordenados ou jogadas. Seria impossível reconhecer esse comportamento, porém, observando os atletas separadamente. Esse comportamento emerge apenas quando o time funciona como um sistema. O mesmo pode ser dito de um sistema de engenharia, como uma aeronave. Dois dos comportamentos importantes de uma aeronave são a integridade estrutural, ou seja, a capacidade de resistir às forças a que é submetida em condições normais de operação, e a aerodinâmica, ou seja, a capacidade de voar. A responsabilidade por esses comportamentos, porém, está distribuída pelos componentes da aeronave, como a fuselagem, as asas, o estabilizador, o leme e o trem de pouso. Alterações no projeto de um desses componentes podem afetar tanto a integridade estrutural como a aerodinâmica de todo o sistema.

Limites e interfaces Um sistema interage com o ambiente através de ligações que cruzam o limite. Às vezes é fácil definir o limite de um sistema, mas outras vezes ele é menos óbvio. Faz sentido, por exemplo, considerar o limite de um sistema biológico, como a membrana de uma célula ou a pele de um indivíduo. No caso de um programa de computador, por outro lado, pode ser difícil determinar onde fica o limite; ele não está necessariamente no gabinete do computador, já que alguns programas podem depender de uma conexão com a Internet.

Quando algo dá errado no projeto de um sistema complexo, muitas vezes isso acontece por causa de algum problema no limite. Existem várias formas de dividir um problema de projeto, e algumas divisões são mais fáceis de implementar que outras. Em geral, uma boa divisão é aquela em que cada componente pode ser projetado de forma independente ou, pelo menos, do modo mais independente possível. Assim, podemos tomar decisões em relação ao projeto de um componente sem nos preocuparmos com o efeito dessas decisões

sobre os outros componentes. Considere, por exemplo, o problema de projetar um automóvel. Se estamos interessados em dividir a tarefa entre três projetistas, uma possível solução é encarregar alguém de projetar a parte dianteira; outra pessoa, de projetar o compartimento de passageiros; e uma terceira pessoa, de projetar a parte traseira, como mostra a Figura 1.10. Entretanto, esse tipo de divisão não é recomendável, já que o projeto de cada uma das partes depende fortemente do projeto das outras. Tanto física como conceitualmente, muitas ligações naturais entre as partes são cortadas nessa divisão, e seria muito difícil manter coerentes as interfaces entre os três segmentos se eles fossem projetados de forma independente.

Um método melhor seria dividir o projeto em subsistemas, como chassi, sistema de propulsão e sistema elétrico (Figura 1.11). Os subsistemas ainda são interdependentes, mas as ligações entre eles são menos complexas e mais fáceis de configurar, tanto do ponto de vista físico como do ponto de vista conceitual. Mesmo assim, o subsistema projetado por um membro da equipe é parte do ambiente em que se encontra o subsistema projetado por outro membro da mesma equipe. As decisões de cada membro podem afetar os projetos dos outros membros, e a parte mais difícil de um projeto complexo, que envolve vários subprojetos, é conciliar os interesses dos diversos membros para que o sistema como um todo seja o melhor possível.

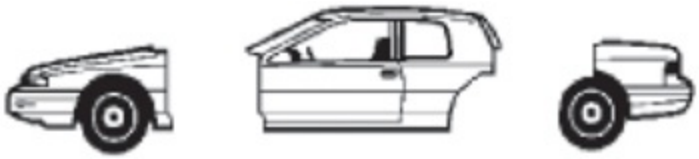


Figura 1.10 Divisão do projeto de um automóvel que pode criar problemas.

Figura 1.11 Divisão mais adequada do projeto de um automóvel, baseada em subsistemas.

1.4 DISCIPLINAS E ESPECIALIDADES DA ENGENHARIA

1.4.1 Introdução

Dividir uma organização complexa em sistemas e subsistemas pode torná-la mais fácil de gerenciar e mesmo de compreender. Dentro de cada subsistema, porém, existem detalhes que exigem conhecimentos especializados. Voltando ao exemplo do automóvel, uma pessoa pode entender com relativa facilidade o modo como o sistema de propulsão está ligado ao sistema elétrico e ao chassi, mas passar a vida inteira adquirindo os conhecimentos necessários para projetar um desses subsistemas. Como ninguém pode conhecer profundamente todos os assuntos, foi necessário dividir o estudo e a prática da engenharia em uma série de *especialidades* e *disciplinas*. O objetivo principal desta

seção é oferecer uma visão geral das disciplinas mais comuns da engenharia.

Antes disso, porém, é importante chamar atenção para o fato de que a engenharia é basicamente uma atividade *multidisciplinar*. Os engenheiros normalmente trabalham em grupos de pessoas com diferentes conhecimentos. Os engenheiros não precisam conhecer profundamente todas as disciplinas, mas devem estar familiarizados com as interfaces entre elas. Além disso, devem estar preparados para se adaptar. Uma pesquisa informal entre os amigos e colegas do autor, quase todos formados há mais de 20 e menos de 25 anos, mostrou que a maioria mudou de área mais de uma vez e que poucos estão trabalhando atualmente na especialidade na qual se formaram, ou estão fazendo o que imaginavam que iriam fazer quando se formaram.

Em minha opinião, a opção de estudar engenharia e adquirir uma base de conhecimentos de engenharia é muito mais importante que a escolha da especialidade. A sociedade *precisa* de engenheiros de todas as especialidades para enfrentar os desafios da vida moderna. Além disso, a sociedade só terá a lucrar se houver mais pessoas na política e na administração das empresas que encarem o mundo do ponto de vista do engenheiro.

1.4.2 Uma Visão Geral das Disciplinas de Engenharia

Como a engenharia é um campo dinâmico e variado, que se adapta constantemente para atender às necessidades da sociedade, é impossível descrever cada área com detalhes. Felizmente, existem excelentes sites na Internet que fornecem atualizações regulares do estado da profissão, além de oportunidades educacionais. Em particular, como ponto de partida, recomendo aos leitores o *Sloan Career Cornerstone Center* (www.careercornerstone.org), um site de informações, sem fins lucrativos, para as pessoas interessadas em seguir uma carreira na ciência, tecnologia, engenharia, matemática,

computação e medicina, mantido pela Alfred P. Sloan Foundation. Boa parte das explicações que se seguem a respeito das diferentes disciplinas foi extraída, com a devida permissão, desse site. O site também contém outras informações, como descrições e links para instituições de ensino e associações de classe, histórias do tipo "um dia na vida" e ofertas de emprego. Outro site excelente, *Try Engineering* (www.tryengineering.org), se destina especialmente a estudantes pré-universitários e inclui conselhos sobre como se preparar para um curso de engenharia, biografias de engenheiros, planos de aula e jogos.

Engenharia Aeroespacial Os engenheiros aeroespaciais criam máquinas, desde aeroplanos que pesam mais de 500.000 kg (Air Bus A380) até espaçonaves que voam a mais de 27.000 km/h. Eles projetam, desenvolvem e testam aeronaves, espaçonaves e mísseis, e supervisionam a fabricação desses produtos. Os engenheiros aeroespaciais que trabalham com aeronaves são chamados de engenheiros aeronáuticos, e os que trabalham especificamente com espaçonaves são chamados de engenheiros astronáuticos.

Os engenheiros aeroespaciais desenvolvem novas tecnologias para uso em aviação, sistemas de defesa e exploração espacial, especializando-se muitas vezes em áreas como projeto estrutural, navegação e controle, instrumentação e comunicações e métodos de produção. Usam frequentemente programas de desenho assistido por computador (CAD), robótica, *lasers* e ótica eletrônica avançada. Alguns se especializam em um tipo particular de produto aeroespacial, como transportes comerciais, caças supersônicos, helicópteros, espaçonaves ou mísseis e foguetes. Outros engenheiros aeroespaciais são especialistas em aerodinâmica, termodinâmica, mecânica celeste, propulsão, acústica ou sistemas de controle.

Os engenheiros espaciais em geral trabalham na indústria de produtos e peças para aviões e espaçonaves, embora venham sendo

requisitados cada vez mais para outros campos. Assim, por exemplo, na indústria automobilística, os engenheiros aeroespaciais projetam veículos que apresentam menor resistência ao ar e, portanto, menor consumo de combustível.

Engenharia Agrícola Os engenheiros agrícolas combinam princípios de engenharia com as ciências da agricultura e biologia. Eles desenvolvem equipamentos, sistemas e processos que melhoram a forma como os alimentos são produzidos e distribuídos. Trabalham na solução de problemas e na análise dos sistemas atuais com o objetivo de aperfeiçoá-los. Muitas vezes, têm que enxergar além de um problema específico, como uma máquina ou um depósito, e considerar um sistema maior e os efeitos de melhorias ou alterações sobre o conjunto.

Os engenheiros agrícolas frequentemente trabalham em grupo, e entre suas tarefas estão a análise dos métodos e equipamentos de produção, embalagem e distribuição de alimentos. Podem trabalhar em parceria com outros engenheiros, ou com profissionais de outras áreas, para resolver problemas relacionados a sistemas, processos e máquinas. Podem projetar sistemas de irrigação e descobrir aplicações para subprodutos agrícolas. Podem oferecer serviços de consultoria jurídica ou financeira com relação a processos, equipamentos e disputas agrícolas.

Alguns engenheiros agrícolas se especializam no projeto de máquinas e equipamentos para agricultura e obras civis. Esses engenheiros podem ter um interesse especial por colheitadeiras, sistemas de irrigação ou lavouras específicas, e trabalhar para firmas que fabricam máquinas. Outros engenheiros agrícolas projetam construções como estábulos, silos e instalações de pesquisa agropecuária. Outros se interessam por sistemas de processamento de alimentos, como processos de liofilização, destilação e conserva.

O tipo de trabalho muitas vezes determina se o engenheiro agrícola

vai exercer suas atividades em um ambiente fechado ou ao ar livre; a maioria, porém, passa a maior parte do tempo em um ambiente fechado. Alguns engenheiros agrícolas cujas funções exigem visitas a fazendas e fábricas de sementes podem ter que viajar com frequência. Muitos engenheiros agrícolas descobrem que lidar com fazendeiros, por exemplo, é uma atividade prazerosa, pois permite que interajam diretamente com as pessoas afetadas por seu trabalho.

Engenharia Arquitetônica Os engenheiros arquitetos aplicam os princípios da engenharia à construção, planejamento e projeto de edifícios e outras estruturas e frequentemente trabalham em colaboração com outros engenheiros e com arquitetos, que cuidam da parte estética e funcional dos projetos de construção. A engenharia arquitetônica muitas vezes envolve disciplinas de outras especialidades da engenharia, como mecânica, eletricidade, proteção contra o fogo e outras. Os engenheiros arquitetos são responsáveis pelos diferentes sistemas de um edifício, estrutura ou complexo, e cuidam de vários aspectos das construções, entre eles os seguintes:

- integridade estrutural dos edifícios,
- projeto e análise dos sistemas de aquecimento, ventilação e ar condicionado,
- projeto e análise dos sistemas de água, proteção contra incêndio e eletricidade,
- planejamento da iluminação e do isolamento acústico,
- planejamento da conservação de energia.

A maioria dos engenheiros arquitetos trabalha na indústria de construção ou áreas afins. Alguns preferem trabalhar em organizações sem fins lucrativos. Passam a maior parte do tempo em escritórios, recebendo clientes e trabalhando com outros engenheiros e arquitetos. Além disso, visitam frequentemente locais de construção para acompanhar o progresso dos trabalhos. Os engenheiros

arquitetos também trabalham em diferentes localidades, dependendo do local onde está sendo executada a obra da qual participam.

Bioengenharia Combinando biologia e medicina com engenharia, os engenheiros biomédicos desenvolvem equipamentos e processos para resolver problemas médicos e de saúde. Muitos fazem pesquisas, juntamente com biólogos, químicos e médicos, para desenvolver e avaliar sistemas e produtos para uso nos campos da biologia e saúde, como órgãos artificiais, próteses (dispositivos artificiais que substituem partes do corpo), instrumentos de medida, sistemas de informações médicas e sistemas de gerenciamento da saúde e dos tratamentos de saúde.

Os bioengenheiros projetam equipamentos para vários procedimentos médicos, como computadores que analisam amostras de sangue, e *lasers* que executam cirurgias oftálmicas. Desenvolvem órgãos artificiais, equipamentos para exames como ressonância magnética, ultrassom e raio X e aparelhos para automatizar as injeções de insulina, ou controlar funções do corpo. Os engenheiros que trabalham nesse campo precisam ter uma base sólida em uma das especialidades tradicionais, como engenharia mecânica ou eletrônica, além de um treinamento especializado em ciências médicas. Algumas especialidades da bioengenharia ou engenharia biomédica envolvem biomateriais, biomecânica, instrumentos de diagnóstico, engenharia de reabilitação e engenharia ortopédica.

Cerca de 40% dos engenheiros biomédicos trabalham em empresas que fabricam produtos, especialmente remédios e instrumentos médicos; muitos outros trabalham em hospitais. Alguns também trabalham para órgãos do governo ou como consultores independentes.

Engenharia Química Os engenheiros químicos trabalham na indústria farmacêutica, na indústria de papel, na indústria petroquímica, no

processamento de alimentos, na indústria de plásticos, nas empresas de biotecnologia e nas indústrias de controle e segurança ambiental, entre outras. Nessas indústrias, os engenheiros químicos usam seus conhecimentos de matemática e de ciências exatas, especialmente de química, para resolver problemas técnicos de forma segura e econômica. Além disso, naturalmente aplicam seus conhecimentos de engenharia para superar os obstáculos que encontram no caminho. Os engenheiros químicos também podem trabalhar na área jurídica, em educação, editoração, finanças, medicina, e muitos outros campos que exigem conhecimentos técnicos.

Mais especificamente, os engenheiros químicos podem aperfeiçoar as técnicas de processamento de alimentos e os métodos de produção de fertilizantes para aumentar a quantidade e a qualidade dos alimentos disponíveis. Também criam as fibras sintéticas que tornam nossas roupas mais confortáveis e impermeáveis; desenvolvem métodos para produzir remédios em grande escala, tornando-os mais baratos; criam métodos mais seguros e eficientes de refinar os derivados do petróleo, tornando as fontes de energia e produtos químicos mais produtivas e econômicas. Também encontram soluções para problemas ambientais como controle da poluição.

Engenharia Civil Das pirâmides do Egito à estação espacial Freedom, os engenheiros civis sempre enfrentaram os desafios do futuro, avançando a civilização e melhorando nossa qualidade de vida. Hoje em dia, o mundo está passando por grandes mudanças: a revolução tecnológica, a explosão populacional, a poluição do ar e da água, e muito mais. Tudo isso representa um enorme desafio para os engenheiros civis de todas as especialidades. As próximas décadas serão as mais criativas, difíceis e compensadoras para os engenheiros civis.

Atualmente, os engenheiros civis estão na vanguarda da tecnologia. Utilizam produtos sofisticados, aplicando os últimos conceitos de

desenho assistido por computador (CAD) a projetos, obras, cronogramas e controle de custos. São responsáveis pelo planejamento, construção e operação de instalações essenciais à vida moderna, de sistemas de transporte coletivo a plataformas de petróleo e estações espaciais. Os engenheiros civis são especialistas em solução de problemas, enfrentando os desafios da poluição, do trânsito, da escassez de água potável e de energia, do planejamento urbano e da vida comunitária. Nosso futuro como nação estará intimamente ligado ao espaço, à energia, ao ambiente e à nossa capacidade de competir na economia global. Os engenheiros civis desempenharão um papel vital para integrar esses temas e melhorar a qualidade de vida no século XXI. Com a expansão da revolução tecnológica, o aumento da população mundial e uma preocupação cada vez maior com o ambiente, a participação dos engenheiros civis se tornará cada vez mais importante.

A Engenharia Civil pode ser dividida em sete especialidades principais: Engenharia Estrutural, Engenharia Ambiental, Engenharia Geotécnica, Engenharia Hidráulica, Engenharia de Transportes, Engenharia de Construção e de Planejamento Urbano. Na prática, essas categorias nem sempre são fixas e estanques, mas constituem uma forma conveniente de dividir um campo muito diversificado e dinâmico.

Engenharia de Computação, Ciência da Computação e Engenharia de Software A tecnologia dos computadores e o processamento de informações se tornaram parte importante de todas as disciplinas na engenharia. Engenharia de Computação, Ciência da Computação e Engenharia de Software são três campos muito parecidos que se dedicam a desenvolver a tecnologia da qual dependem muitas outras disciplinas. Embora exista uma superposição significativa entre as três áreas, elas constituem atividades distintas, que serão descritas a seguir.

Os **engenheiros de computação** analisam, projetam e avaliam o hardware e o software dos sistemas de computação. Podem trabalhar em projetos como o de um sistema de fabricação programável ou um instrumento de medida “inteligente”. Os engenheiros de computação frequentemente têm que enfrentar problemas ou desafios associados a produtos de vanguarda que incorporam microprocessadores. Eles trabalham na interface entre diferentes peças de hardware e procuram explorar ao máximo a versatilidade de produtos e sistemas, tanto antigos como novos. O trabalho de um engenheiro de computação está baseado em hardware – dos circuitos à arquitetura –, mas também é necessário levar em conta o software. Os engenheiros de computação precisam conhecer projetos lógicos, projetos de sistemas com microprocessadores, arquitetura de computadores e interfaces com computadores e se preocupar permanentemente com projetos e requisitos de sistemas. Enquanto os engenheiros de software se concentram em criar sistemas de software para uso de indivíduos e empresas, os engenheiros de computação também podem projetar e desenvolver alguns aplicativos.

Os **cientistas de computação** trabalham em muitas áreas. Como a tecnologia dos computadores foi incorporada a uma grande variedade de produtos, serviços e sistemas, os cientistas de computação estão presentes em praticamente todas as indústrias. Os computadores da próxima geração, as redes de computadores, os sistemas de informações biomédicas, os sistemas de apostas, os sites de busca, os navegadores e os sistemas computadorizados de distribuição de pacotes são apenas alguns exemplos de projetos em que um cientista de computação pode trabalhar. Alguns cientistas de computação se especializam em confiabilidade de software, segurança de redes ou recuperação de informações; outros trabalham como consultores de firmas de investimentos.

Os **engenheiros de software** aplicam os princípios e técnicas da ciência da computação, da engenharia e da análise matemática ao

projeto, desenvolvimento, testes e avaliação do software e dos sistemas que permitem aos computadores desempenhar suas múltiplas funções. Os engenheiros de software que trabalham no desenvolvimento de aplicativos ou sistemas analisam as necessidades dos usuários e projetam, escrevem, testam e fazem a manutenção desses aplicativos ou sistemas. Os engenheiros de software podem participar do projeto e desenvolvimento de muitos tipos de software, como software para sistemas operacionais, redes e compiladores, que convertem programas para serem executados em um computador. Na programação, os engenheiros de software fornecem instruções ao computador, linha por linha, para executar uma determinada tarefa. Eles também resolvem os problemas técnicos que podem surgir. Os engenheiros de software devem ser programadores competentes, porém estão mais preocupados em desenvolver algoritmos e resolver problemas de programação do que propriamente em escrever programas.

Engenharia Elétrica Os engenheiros elétricos e eletrônicos executam pesquisas e projetam, desenvolvem, testam e supervisionam o aprimoramento de sistemas eletrônicos e a fabricação de equipamentos e dispositivos elétricos e eletrônicos. Do sistema de posicionamento global que fornece continuamente a localização de um veículo a gigantescos geradores de energia elétrica, os engenheiros elétricos e eletrônicos são responsáveis por uma grande variedade de tecnologias. A engenharia elétrica tem várias especialidades, das quais as mais comuns serão apresentadas a seguir.

Uma das áreas de atuação dos engenheiros elétricos e eletrônicos que mais tem crescido ultimamente é a de **telecomunicações**. Entre as tarefas de um engenheiro de telecomunicações está o desenvolvimento de equipamentos para as redes de computadores com fio e sem fio, domésticas e comerciais e para as comunicações por satélite, micro-ondas e fibra ótica, que constituem a base da

infraestrutura moderna de telecomunicações civis e militares.

Os **engenheiros elétricos** lidam com a geração de energia elétrica em usinas termelétricas, hidrelétricas, geotérmicas, eólicas, solares e outras. Também lidam com a transmissão de energia elétrica das usinas para os consumidores e com a distribuição de energia elétrica em edifícios residenciais e comerciais, fábricas, hospitais e laboratórios, além de projetarem baterias e motores elétricos. Na indústria, os engenheiros elétricos trabalham em todos os lugares onde a energia elétrica é usada para fabricar ou montar algum produto. Os engenheiros elétricos também projetam sistemas de distribuição de energia elétrica e sistemas de instrumentação e controle para operação segura, eficaz e eficiente de unidades de produção.

A **indústria de computadores** serve a vários setores, e os engenheiros elétricos desempenham um papel importante nesse atendimento. A engenharia elétrica tem grande afinidade com a engenharia de computação; em muitas universidades, os programas de engenharia de computação e de engenharia elétrica pertencem ao mesmo departamento.

A tecnologia principal da florescente indústria de componentes eletrônicos para computadores é a **tecnologia dos semicondutores**, em particular o desenvolvimento e a fabricação de circuitos integrados. Na busca de dispositivos mais rápidos e potentes, as empresas de circuitos integrados precisam de engenheiros para investigar novos materiais e encapsulamentos, engenheiros capazes de enfrentar a pressão dos competidores e dos prazos exíguos. Os fabricantes de microprocessadores e placas de memória, por exemplo, aperfeiçoam continuamente os produtos existentes e introduzem no mercado novos produtos para suplantar os competidores e atender às expectativas dos consumidores. Entre os produtos baseados em semicondutores estão não só circuitos integrados digitais, mas também circuitos analógicos, circuitos integrados híbridos (analógicos

e digitais) e circuitos integrados de radiofrequência (RF), além de componentes para fontes de alimentação.

Engenharia Ambiental Usando os princípios da biologia e da química, os engenheiros ambientais tentam encontrar soluções para problemas ambientais. Sua área de atuação está ligada a questões como o controle da poluição do ar e da água, reciclagem, tratamento do lixo e saneamento. Os engenheiros ambientais estudam o gerenciamento de rejeitos de alto risco, analisam métodos de tratamento e contenção e ajudam a criar regulamentos para prevenção de acidentes. Estudam e tentam minimizar os efeitos da chuva ácida, do aquecimento global, das emissões dos automóveis e dos buracos na camada de ozônio. Também procuram meios de proteger os animais silvestres. Muitos engenheiros ambientais trabalham como consultores, ajudando os clientes a cumprir os regulamentos e limpar locais contaminados.

Entre as atividades dos engenheiros ambientais estão a coleta e análise de amostras de solo e água; o projeto de sistemas de esgotos residenciais e industriais; a análise de dados científicos; a pesquisa de projetos controvertidos; e a execução de testes de controle de qualidade. Alguns engenheiros ambientais executam serviços de consultoria jurídica ou financeira com relação a questões e processos ambientais.

Engenharia Industrial Os engenheiros industriais estudam os meios mais eficientes de usar os fatores básicos de produção (mão-de-obra, máquinas, materiais, informação e energia) para fabricar um produto ou prestar um serviço. Eles são a ponte entre as metas da administração e o desempenho operacional de uma empresa. Estão mais interessados em aumentar a produtividade através do gerenciamento de recursos humanos, métodos de organização e novos recursos tecnológicos do que os engenheiros de outras especialidades, que, em geral, trabalham mais com produtos ou processos. Embora a maioria dos engenheiros industriais trabalhe em indústrias

manufatureiras, alguns prestam serviços de consultoria, saúde e comunicações.

Para resolver problemas de organização, produção e outros, os engenheiros industriais estudam minuciosamente o produto e seus requisitos, usam modelos matemáticos como os da pesquisa operacional para atender a esses requisitos e projetam sistemas de fabricação e informação. Desenvolvem sistemas de gerenciamento para facilitar o planejamento financeiro e a análise de custos e projetam sistemas de planejamento e controle da produção para coordenar atividades e assegurar a qualidade do produto. Também projetam ou aperfeiçoam sistemas de distribuição de bens e serviços. Os engenheiros industriais determinam a localização de uma fábrica que proporciona a melhor combinação de disponibilidade de matérias-primas, meios de transporte e custos. Os engenheiros industriais usam computadores para fazer simulações e para controlar várias atividades e dispositivos, como linhas de montagem e robôs. Também desenvolvem sistemas de administração de cargos e salários e programas de avaliação de mão-de-obra. Graças à natureza do seu trabalho, muitos engenheiros industriais terminam por ocupar posições administrativas.

Engenharia de Produção Os engenheiros de produção participam do processo de fabricação, desde o planejamento até a embalagem do produto acabado. Trabalham com máquinas como robôs, controladores numéricos e programáveis e sistemas de visão para gerenciar os processos de montagem, embalagem e distribuição. Estudam o fluxo de matérias-primas e o processo de fabricação, em busca de formas de agilizar a produção e reduzir os custos. Muitas vezes, o engenheiro de produção trabalha com um protótipo, quase sempre criado eletronicamente com o auxílio de computadores, para planejar o processo final de produção. Em um mercado globalmente competitivo, a função do engenheiro de produção é determinar

métodos e sistemas para levar ao mercado um produto competitivo.

Engenharia de Materiais A engenharia de materiais é um campo da engenharia que envolve materiais de todos os tipos, como metais, cerâmicos, polímeros (plásticos), semicondutores e combinações de materiais chamados compósitos, e seu uso industrial. Vivemos em um mundo que ao mesmo tempo depende dos materiais e é limitado por eles. Tudo que vemos e usamos é feito de materiais: carros, aviões, computadores, geladeiras, fornos de micro-ondas, aparelhos de TV, pratos, talheres, equipamentos esportivos, e até mesmo dispositivos biomédicos como próteses e órteses. Todos esses produtos necessitam de materiais adequados para as aplicações a que se destinam. As propriedades do produto final resultam de uma escolha criteriosa dos materiais e de um controle apropriado do processo de fabricação. Novos e melhores produtos muitas vezes só são possíveis graças ao desenvolvimento de novos materiais e/ou novas formas de processamento.

Novas tecnologias de materiais, desenvolvidos através da engenharia e da ciência, continuarão a introduzir mudanças significativas em nossas vidas no futuro, e as pessoas que trabalham em engenharia e ciência dos materiais serão fundamentais para essas mudanças e avanços. Os engenheiros de materiais lidam com a ciência e tecnologia de produção de materiais com as propriedades e formas adequadas para aplicações práticas.

As funções dos engenheiros de materiais vão desde a produção de matérias-primas, incluindo a reciclagem, até o projeto e desenvolvimento de novos materiais e a fabricação confiável e econômica do produto final. Essas atividades são comuns nas indústrias aeroespacial, de transportes, eletrônica, biomédica e de conversão de energia. O futuro trará novos desafios e oportunidades para a introdução de novos materiais e melhores métodos de processamento. Os materiais estão evoluindo mais depressa que em

qualquer período da história. Materiais novos e melhores são uma "tecnologia incubadora", ou seja, uma tecnologia capaz de estimular inovações e melhorias nos produtos. No futuro, haverá uma preocupação cada vez maior com a reciclagem e com o controle de rejeitos. Por essas e outras razões, a maioria das pesquisas cita a engenharia de materiais como uma das carreiras com melhores oportunidades nos anos vindouros.

Engenharia Mecânica A engenharia mecânica é uma das maiores, mais abrangentes e mais antigas disciplinas da engenharia. Os engenheiros mecânicos usam os princípios de energia, materiais e mecânica para projetar e fabricar máquinas e dispositivos de todos os tipos. São eles que criam os processos e sistemas que impulsionam a tecnologia e a indústria.

As características principais da profissão são a abrangência, a flexibilidade e a individualidade. É a escolha individual dos engenheiros mecânicos que determina suas carreiras. Mecânica, energia e calor, matemática, ciências de engenharia, projeto e fabricação constituem as bases da engenharia mecânica. A atividade do engenheiro mecânico pode envolver a mecânica dos fluidos, desde a água parada até os gases hipersônicos a que estão sujeitos os veículos espaciais, e o movimento de objetos como partículas, peças e máquinas complexas.

Os engenheiros mecânicos pesquisam, desenvolvem, projetam, fabricam e testam ferramentas, motores, máquinas e outros dispositivos mecânicos. Trabalham com máquinas que produzem energia, como geradores elétricos, motores de combustão interna e turbinas a vapor e a gás, e com máquinas que usam energia, como refrigeradores, aparelhos de ar condicionado, máquinas ferramentas, sistemas de processamento de materiais, elevadores, escadas rolantes, equipamentos industriais e robôs de linhas de montagem. Os engenheiros mecânicos também projetam ferramentas que outros

engenheiros usam em seus trabalhos. Alguns engenheiros mecânicos trabalham em operações de produção industrial e agrícola, manutenção e vendas; muitos são administradores ou gerentes.

Engenharia de Minas Os engenheiros de minas descobrem, extraem e preparam carvão, metais e minerais para uso em usinas e fábricas. Projetam minas profundas e a céu aberto, supervisionam a construção dos poços e galerias das minas e desenvolvem métodos para transportar os minerais para usinas de processamento. Os engenheiros de minas são responsáveis pela operação segura, econômica e ecologicamente correta das minas.

Alguns engenheiros de minas trabalham com geólogos e engenheiros metalúrgicos para localizar a avaliar novos depósitos de minérios. Outros desenvolvem equipamentos de mineração ou dirigem operações de processamento de minérios, separando os minérios da terra, da rocha ou de outros materiais com os quais estão misturados.

Os engenheiros de minas frequentemente se especializam em um mineral ou metal, como carvão ou ouro. Com o aumento das preocupações ecológicas, muitos engenheiros de minas trabalham para resolver problemas relacionados à conservação do solo e à poluição da água e do ar. Os engenheiros de segurança de minas usam seus conhecimentos da estrutura e funcionamento das minas para garantir a segurança dos operários e atender às normas de segurança estaduais e federais. Inspecionam as paredes e os tetos das galerias, monitoram a qualidade do ar e examinam os equipamentos de mineração para verificar se são seguros.

Engenharia Nuclear Os engenheiros nucleares pesquisam e desenvolvem processos, instrumentos e sistemas para laboratórios, fábricas e universidades que fazem uso da energia nuclear na indústria, agricultura, medicina, geração de energia e muitas outras

aplicações.

Muitos engenheiros nucleares projetam, desenvolvem, monitoram e operam usinas nucleares de geração de energia elétrica. Podem trabalhar no ciclo de combustível nuclear, ou seja, na produção, transporte e uso do combustível nuclear e armazenamento seguro dos rejeitos produzidos pela geração de energia nuclear. Outros pesquisam a produção de energia através da fusão nuclear. Alguns se especializam no desenvolvimento de fontes de energia para naves espaciais que usam materiais radioativos. Outros desenvolvem e cuidam da manutenção de equipamentos nucleares usados na medicina, tanto para diagnóstico como para tratamento de doenças.

Engenharia de Petróleo Os engenheiros de petróleo viajam pelo mundo em busca de campos de petróleo e gás natural. Depois de descobrir esses recursos, os engenheiros de petróleo trabalham com geólogos e outros especialistas para conhecer a formação geológica e as propriedades das rochas do campo, determinar os métodos de perfuração a serem usados, e monitorar as operações de perfuração e produção. Também projetam equipamentos e processos para recuperar, de forma economicamente viável, o máximo possível de petróleo e gás. Os engenheiros de petróleo usam modelos em computador para simular o uso de diferentes técnicas de recuperação em situações concretas. Também usam modelos em computador para simular o efeito de vários métodos de perfuração.

Somente uma pequena fração do petróleo e do gás presentes em um campo pode ser recuperada apenas com base em forças naturais; assim, os engenheiros de petróleo desenvolvem e utilizam vários métodos de recuperação forçada, como a injeção de água, produtos químicos, gases ou vapor nos campos de petróleo para aumentar a pressão, e o uso de perfurações ou explosões programadas em computador para ligar uma área maior de um campo petrolífero a um único poço. Como até mesmo as melhores técnicas usadas atualmente

permitem recuperar apenas uma parte do petróleo e do gás contidos em um reservatório, os engenheiros de petróleo pesquisam e desenvolvem equipamentos e métodos para aumentar o índice de recuperação e reduzir o custo das operações de perfuração e produção.

Outras Especialidades da Engenharia Além das especialidades da engenharia discutidas no site Try Engineering, existem muitos outros cursos de engenharia reconhecidos oficialmente. Entre eles estão os seguintes:

- Engenharia Cerâmica
- Engenharia de Construção
- Engenharia de Projeto
- Engenharia Geral
- Engenharia Operacional
- Engenharia Mecatrônica
- Engenharia Física
- Engenharia Florestal
- Engenharia Geológica
- Engenharia Metalúrgica
- Engenharia Naval
- Engenharia Oceânica
- Engenharia de Plásticos
- Engenharia Topográfica
- Engenharia de Solda

1.4.3 Organizações Profissionais

As organizações e associações profissionais oferecem uma grande variedade de recursos para os estudantes interessados em seguir uma carreira na área da engenharia. Esses grupos podem desempenhar um

papel importante na formação do estudante e mantê-lo a par do que está acontecendo na indústria. As associações promovem os interesses dos seus membros e estabelecem uma rede de contatos que podem ajudar o jovem recém-formado a encontrar um emprego e avançar na profissão. Podem oferecer uma grande variedade de serviços, como ofertas de emprego, cursos de extensão, seguros, planos de viagem, assinaturas de revistas especializadas e calendários de congressos e seminários. Muitas sociedades profissionais também aceitam estudantes como membros. Os estudantes de engenharia só têm a ganhar se procurarem se associar a uma dessas organizações e participar de programas e atividades que os aproximem de outros estudantes e de engenheiros formados.

Uma lista parcial de associações profissionais para engenheiros nos Estados Unidos pode ser encontrada no Apêndice C. Uma lista mais ampla de associações profissionais está disponível no site Sloan Career Cornerstone (http://www.careercornerstone.org/assoc.htm).

1.4.4 Inovações nas Interfaces entre Disciplinas

No período de 2001 a 2004, uma comissão organizada pela National Academy of Engineering (NAE), com membros de instituições de ensino, da indústria e do governo, discutiu a seguinte questão: “Como deve ser a engenharia na década de 2020?” Os resultados foram publicados em dois relatórios: *The Engineer of 2020/O Engenheiro de 2020* [Nat04] e *Educating the Engineer of 2020/Educando o Engenheiro de 2020* [Nat05]. Os relatórios apontam para um futuro complexo, com oportunidades associadas a tecnologias revolucionárias e desafios, como o de sustentar uma população mundial cada vez maior em face de uma quantidade limitada de recursos naturais e uma infraestrutura em processo de envelhecimento. De acordo com os relatórios da NAE, “devido à complexidade crescente dos problemas de engenharia, existe uma necessidade cada vez maior de grupos multidisciplinares” [Nat04]. Além disso, as tecnologias de ponta

normalmente estão na interface entre disciplinas, usando inovações em várias áreas para criar novas possibilidades. Para ilustrar este ponto, vamos dar uma olhada rápida em duas áreas "quentes": a *nanotecnologia* e a *biotecnologia*.

Nanotecnologia e Engenharia Molecular Nanotecnologia é a ciência e engenharia de componentes e sistemas de dimensões moleculares. Nas próximas décadas, materiais, estruturas e sistemas produzidos por engenharia molecular serão usados em praticamente todos os ramos da engenharia, e veremos aplicações da nanotecnologia em produtos tão diversos como tintas e revestimentos, tecidos, circuitos elétricos, órgãos artificiais, telas de computador e mesmo robôs microscópicos ou nanobôs. A Figura 1.12 mostra os tamanhos relativos de algumas microestruturas e nanoestruturas, da largura de um fio de cabelo ao diâmetro de um átomo de hidrogênio.

Figura 1.12 Objetos de dimensões microscópicas e nanoscópicas.

A nanotecnologia representa uma extensão natural da revolução que começou com a fabricação de circuitos integrados e componentes mecânicos de dimensões extremamente reduzidas, da ordem de micrômetros. Um exemplo de "sistema microeletromecânico" atualmente em uso é o sistema de Processamento Digital de Luz (DLP, do inglês *Digital Light Processing*) desenvolvido pela Texas Instruments. Como mostra a Figura 1.13, o sistema DLP combina circuitos de computador com uma matriz de microespelhos para produzir imagens em televisões e projetores de tela grande [You93]. Uma pastilha DLP

contém uma matriz com até 2 milhões de pixels; cada pixel é formado por um elemento de memória e um microespelho. Cada microespelho muda de inclinação milhares de vezes por segundo, controlando o brilho do pixel em uma imagem. Para criar essa nova tecnologia foi necessário o trabalho combinado de especialistas em eletrônica, mecânica, materiais e processamento de informação.

A nanotecnologia pretende construir estruturas microeletromecânicas mil vezes menores que os espelhos do sistema DLP. Boa parte das pesquisas atuais está voltada para o uso de átomos de carbono. O nanotubo de carbono é uma estrutura cilíndrica, de dimensões nanométricas, feita de átomos de carbono. Os nanotubos de carbono têm propriedades mecânicas e elétricas muito especiais. Estão entre os materiais mais resistentes e flexíveis que conhecemos, com uma razão entre resistência mecânica e peso 500 vezes maior que a do alumínio. Além disso, conduzem eletricidade um milhão de vezes melhor que o cobre. Os nanotubos foram combinados com plásticos para criar compósitos condutores de eletricidade de alta resistência mecânica. Uma aplicação desse material, que já está sendo comercializado, é o revestimento de tubos condutores de gasolina em automóveis para dissipar cargas de eletricidade estática que podem provocar explosões [Bau02]. Os engenheiros anteveem milhares de outras aplicações para os nanotubos de carbono, desde coletes à prova de bala e trajes espaciais até ligações elétricas em circuitos integrados.

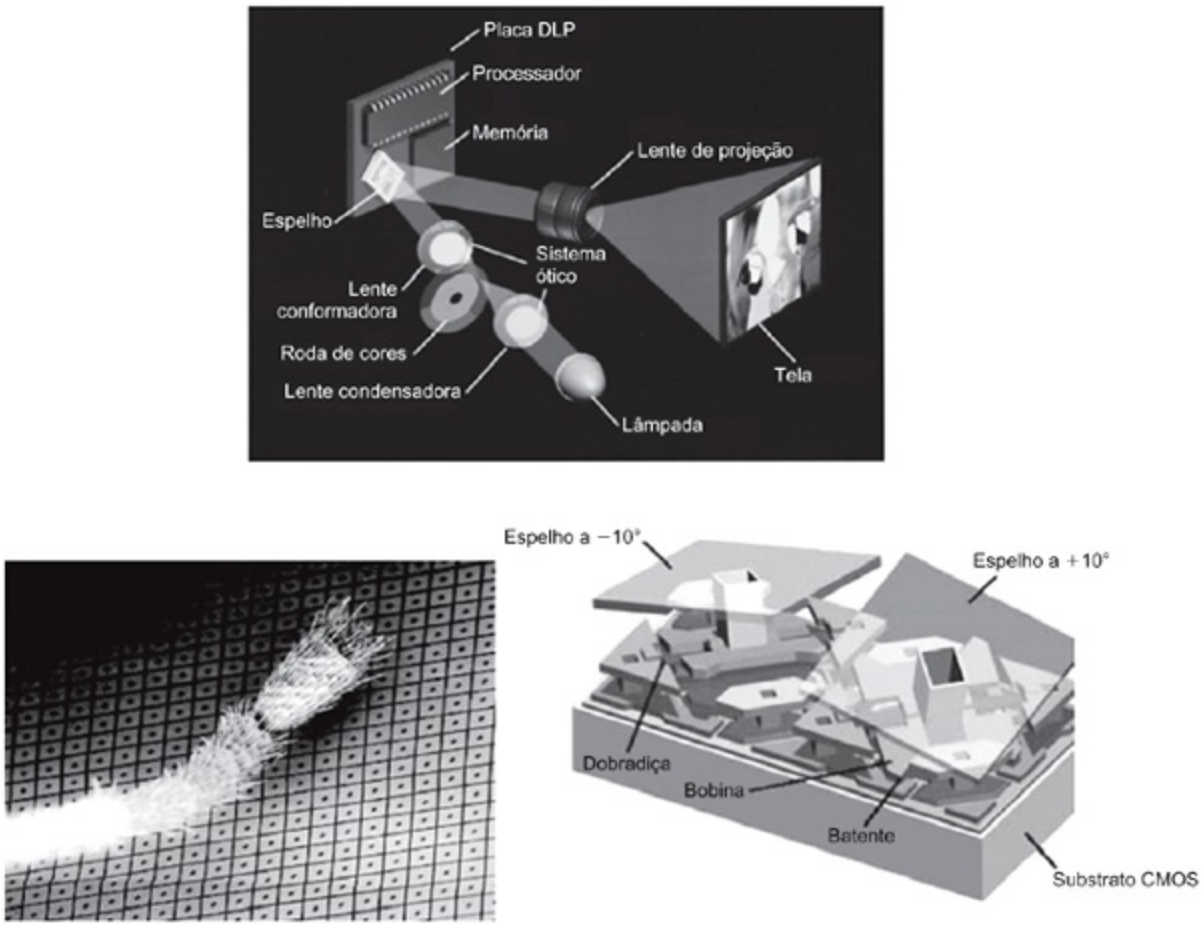


Figura 1.13 O sistema de Processamento Digital de Luz (DLP) da Texas Instruments integra um sistema microeletromecânico em uma pastilha. No alto, uma pastilha DLP como parte de um sistema para processar imagens coloridas em uma televisão de tela grande. Embaixo à esquerda, uma matriz de microespelhos DLP comparada com uma pata de formiga. Embaixo à direita, estrutura de um microespelho. (Imagens cortesia da Texas Instruments.)

Combinando nanotubos com moléculas, os pesquisadores pretendem construir componentes minúsculos como engrenagens, sondas elétricas e mesmo veículos, como mostra a Figura 1.14. Em 2005, um grupo de pesquisadores liderado por Jim Tour, professor de Química, Engenharia Mecânica, Ciência dos Materiais e Ciência da Computação da Rice University, fabricou o primeiro nanocarro molecular do mundo; um ano depois, o veículo recebeu um motor [Tou][SOZ$^+$05][SMS$^+$06]. Os veículos medem apenas 4 $\times$ 3 nanômetros (20.000 deles poderiam ser estacionados lado a lado ao

longo do diâmetro de um fio de cabelo) e são formados por uma molécula orgânica, que faz o papel de chassi, e quatro eixos rotativos independentes. As rodas são moléculas esféricas de carbono, hidrogênio e boro. O motor, desenvolvido por Ben Feringa na Universidade de Groningen, Holanda, tem a forma de um catavento e é movido pela luz. Tour e seus colaboradores pretendem continuar o projeto fabricando nanocaminhões capazes de transportar átomos e moléculas em sistemas inorgânicos, da mesma forma como a hemoglobina transporta oxigênio em células vivas.

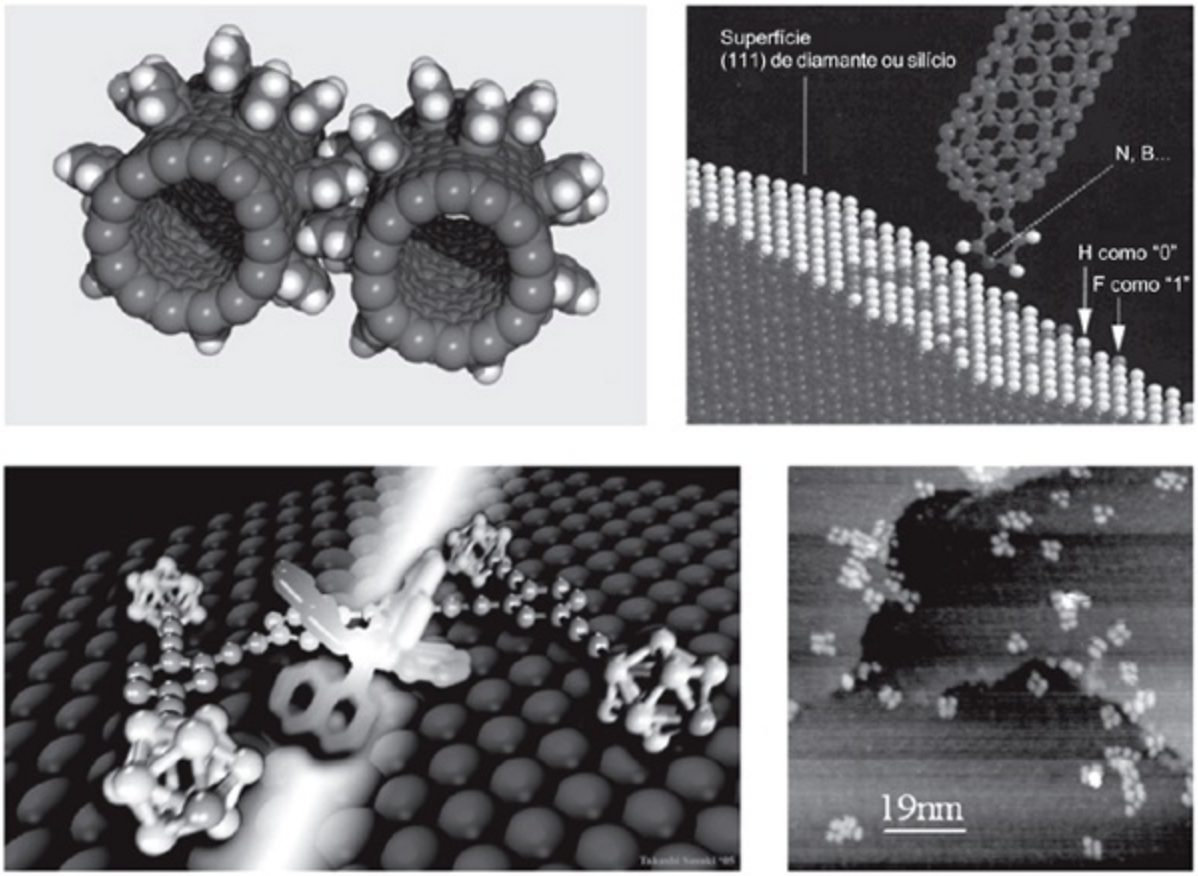


Figura 1.14 No alto: Engrenagens e pontas de prova feitas de nanotubos de carbono [HGJD97]. Imagens cortesia do Ames Research Center da NASA. Embaixo: Modelo, em computador, de um nanocarro [SOZ+05] (esquerda) e uma frota de nanocarros de verdade em uma superfície de ouro, visualizada através de um microscópio de tunelamento (direita). Imagens cortesia da Rice University.

Bioengenharia e Biotecnologia "Steve Austin, astronauta. Um homem

semimorto. Senhores, nós podemos reconstruí-lo… temos a tecnologia.” Assim começavam os episódios da série de TV *O Homem de Seis Milhões de Dólares*, que foi ao ar na década de 1970. Três décadas depois, os Estados Unidos estão gastando quase 20 *bilhões* de dólares por ano em bioengenharia e pesquisas de biotecnologia. *Bioengenharia* é um termo genérico, usado para designar a integração da engenharia com qualquer processo ou sistema biológico. Ela engloba a engenharia biomédica, que se concentra nas aplicações da engenharia à medicina, e a *biotecnologia*, que utiliza materiais biológicos ou organismos vivos para desenvolver uma grande variedade de produtos e processos. A biotecnologia proporciona os meios para controlar características inatas dos seres vivos, e assim levanta muitas questões morais e éticas com relação à essência da vida, o que torna cada organismo uma entidade única, o que é apropriado para usar ou modificar e o que não é. Em consequência, a pesquisa e o desenvolvimento neste campo devem incluir colaborações não só de uma grande variedade de especialistas, mas também de políticos e eticistas.

Há milhares de anos que as pessoas encontram meios de usar e modificar organismos vivos para atender a uma grande variedade de necessidades humanas. Os hieroglifos mostram que os antigos egípcios sabiam usar leveduras para fermentar o pão e fabricar bebidas alcoólicas. Os agricultores primitivos sabiam que era possível selecionar plantas com certas características favoráveis, como resistência a pragas, e descartar outras, como forma de melhorar a lavoura de geração para geração. Mais tarde, aprenderam a cruzar plantas e animais para produzir espécimes híbridos com traços paternos e maternos. O evento mais importante da história da biotecnologia, porém, teve lugar em 1953, quando James Watson e Francis Crick descobriram a estrutura do DNA, a molécula presente em todas as células e que contém as instruções necessárias para o funcionamento e reprodução dos seres vivos. Hoje em dia, os

cientistas e engenheiros sabem como modificar a estrutura de uma molécula de DNA, programando um organismo para se desenvolver de uma certa forma. Muitos acreditam que essa tecnologia tem o potencial para transformar radicalmente o modo como desenvolvemos produtos de todos os tipos, de alimentos a computadores, bem como o modo como tratamos as doenças. Avanços na tecnologia da computação provavelmente nos permitirão processar informações genéticas e desenvolver remédios personalizados.

Existem possibilidades muito interessantes na interface entre bioengenharia e nanotecnologia. Robôs nanométricos ou nanobôs podem ser usados em uma grande variedade de tarefas, como reparar tecidos, desentupir artérias e transportar remédios para locais específicos do corpo [Nat04]. A Figura 1.15 mostra uma concepção artística de um microbívoro, um leucócito robótico que poderia ser usado para caçar micróbios patogênicos no sangue e destruílos [FJ05].

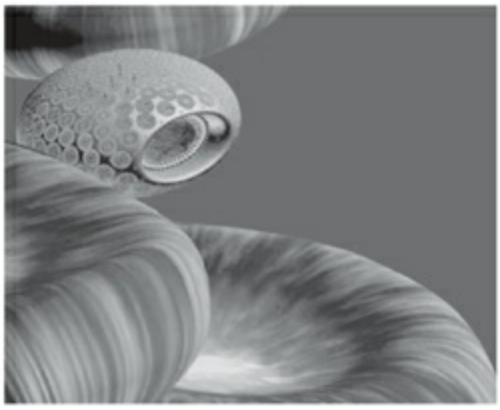


Figura 1.15 Concepção artística de um microbívoro, um leucócito artificial. Imagem cortesia da Zyvex Corporation.

1.5 ENGENHARIA E COMPUTAÇÃO

Como todos os profissionais modernos, os engenheiros utilizam os computadores como instrumentos para gerenciar e processar

informações. Entre os principais usos dos computadores estão as comunicações, a busca de informações e a produção de documentos. É justo afirmar que, de modo geral, os engenheiros têm mais intimidade com os computadores que a maioria dos profissionais de outras áreas. Nesta seção, vamos examinar dois aspectos dessa relação: primeiro, o uso do computador para desenvolver o raciocínio lógico; segundo, o uso do computador para processar dados numéricos.

1.5.1 Programação e Raciocínio Lógico

Da criação de um sistema para colher e distribuir água potável ao planejamento de uma linha de produção para a fabricação de circuitos integrados e à formulação de uma estratégia para testar uma nova aeronave, engenheiros de todas as especialidades desenvolvem "programas" para resolver problemas. Uma das qualificações mais importantes de um engenheiro é a capacidade de descrever programas de forma clara e livre de ambiguidades.

Em última análise, os computadores são máquinas que seguem automaticamente um conjunto de regras, escritas por engenheiros, para realizar cálculos. Assim como as fábricas executam processos de produção, os computadores executam *processos de computação*. A "matéria-prima" utilizada pelos computadores em seus processos são os *dados*, uma palavra que vem do latim "datu" e significa algo que se deu, oferecido, presenteado, gratuito. As regras e procedimentos que governam a operação dos processos de computação são chamados de *programas de computador*, e são escritos em linguagens precisas, especializadas, conhecidas como *linguagens de programação*.

Os engenheiros sempre estiveram entre os primeiros a adotar novas tecnologias; quando o computador digital se tornou comum na segunda metade do século XX, os engenheiros logo encontraram meios de usar o computador para tornar seu trabalho mais produtivo. No início, para poder usar computadores, os engenheiros *tinham* que

aprender a programá-los. Hoje, porém, com o advento da indústria de software, a maioria dos engenheiros usa ferramentas de computação desenvolvidas por especialistas. Com a notável exceção dos muitos engenheiros cuja função é produzir software para computadores, a programação para a maioria dos engenheiros seguiu o mesmo caminho que a transmissão manual nos automóveis: ainda possui alguns adeptos por causa do maior grau de controle que proporciona, mas existem, disponíveis no mercado, opções mais simples e fáceis de usar.

Curiosamente, depois que foram integrados às escolas e lares na década de 1990, através do uso cada vez maior da Internet, e da queda dos preços do hardware e do software, a tal ponto que praticamente todos os estudantes que entram hoje na universidade já usaram computadores, é que os estudantes se sentem menos confortáveis com essas ferramentas que os da geração anterior. Os estudantes de engenharia não são exceção, e muitos encaram a programação de computadores com desconfiança, talvez por causa do medo de serem considerados “hackers” ou “geeks”. Andy Downard, que se formou em Engenharia Química e obteve um MBA na Universidade de Notre Dame antes de fazer o curso de doutorado no Caltech, tem algo a dizer sobre o assunto. Diz Andy:

> Eu gostava de matemática e ciências no segundo grau, mas não sabia programar computadores. Quase deixei de cursar engenharia porque os computadores me intimidavam. Pensava, tolamente, que meus colegas que estudavam Ciência da Computação estavam em vantagem, e eu jamais conseguiria alcançá-los… Felizmente, não desisti da Engenharia Química e descobri que programar era uma atividade lógica, que não dependia muito da linguagem usada. Os conhecimentos básicos a respeito de Excel, MATLAB, Mathematica e C, que adquiri com relativa rapidez, permitiram-me escrever programas capazes de resolver, em cinco minutos, problemas que eu levaria mais de cinco horas para resolver à mão. Depois de me formar, trabalhei durante um ano em comercialização de tecnologia e raramente escrevia meus próprios programas. A maior parte das minhas necessidades era atendida facilmente pelo Excel ou MATLAB, o que

considero básico para a maioria dos trabalhos de engenharia. Hoje me sinto feliz por estar de volta à universidade para fazer um curso de pós-graduação; acabo de aprender a linguagem FORTRAN e comecei a usá-la para escrever um programa de diagnóstico de doenças.

Não foi pequeno o número de especialistas em educação na área de engenharia que me aconselharam a deixar de fora a programação de computadores neste livro, alegando que o tema poderia afastar da engenharia os estudantes, em uma época na qual atrair e conservar estudantes constitui um dos principais problemas da profissão. Na verdade, como aconteceu com Andy Downard, a maioria dos engenheiros *não precisa* saber programar para colher os benefícios do uso de computadores. Embora eu esteja de acordo com *algumas* das preocupações de meus colegas, acredito que uma certa exposição à programação de computadores é parte importante da formação intelectual de um engenheiro. Assim como a leitura e a redação de relatórios técnicos nos ensinam a formular e expressar argumentos com clareza e simplicidade, a leitura e a escrita de programas de computador nos ensinam a descrever procedimentos complexos de forma lógica e precisa. Enquanto as pessoas podem interpretar os passos de um programa da forma que mais lhes convém, um computador faz exatamente o que foi determinado pelo programa, sem tentar adivinhar qual era a intenção do autor. Como todo programador experiente tem conhecimento, o verdadeiro sistema que você está testando quando roda um programa de computador pela primeira vez são seus próprios processos mentais e sua capacidade de formular claramente uma série de instruções.[4]

1.5.2 Processamento de Dados Numéricos

Como tomadores de decisões técnicas, os engenheiros realizam cálculos, e o computador, de uma forma ou de outra, é simplesmente *a* ferramenta para esse trabalho. Embora o processamento de dados seja apenas uma das muitas atividades nas quais os computadores são

empregados hoje em dia, trata-se, afinal de contas, da atividade para a qual foram inventados. Até a palavra "calcular" presta homenagem a um dos primeiros instrumentos que o homem inventou para trabalhar com números: a pedra, chamada de *calculus* em latim. Durante o século XX, a base dos instrumentos de cálculo voltou às origens com a criação do microprocessador, que não passa, em última análise, de uma pedrinha de silício. Até o ano de 1897, quando o número de 22 de janeiro da revista *Engineering* usou o nome pela primeira vez para designar um dispositivo mecânico que fazia cálculos matemáticos, o nome "computador" foi usado exclusivamente para designar uma pessoa que realiza cálculos matemáticos.

Quando pensamos em engenheiros, computadores e processamento de dados, a imagem que nos vem à mente, com frequência, são longas listas de dados e cálculos complexos rolando em uma tela. Na verdade, a maior parte dos cálculos que os engenheiros executam é relativamente simples. Mesmo assim, o computador facilita muito o seu trabalho. Vamos ver quais são algumas dessas tarefas e o modo como o computador é usado em cada uma delas.

Cálculos Aritméticos Os cálculos que os engenheiros executam com mais frequência (como acontece, na verdade, com indivíduos de todas as profissões) são os cálculos aritméticos: as quatro operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão, além de operações *transcendentais* ou "funções científicas", como raiz quadrada, funções trigonométricas, exponenciais e logaritmos. Como os cálculos aritméticos são tediosos e rotineiros, eles constituem uma excelente aplicação para as máquinas de calcular. A Figura 1.16 mostra alguns marcos importantes da história das máquinas de calcular.

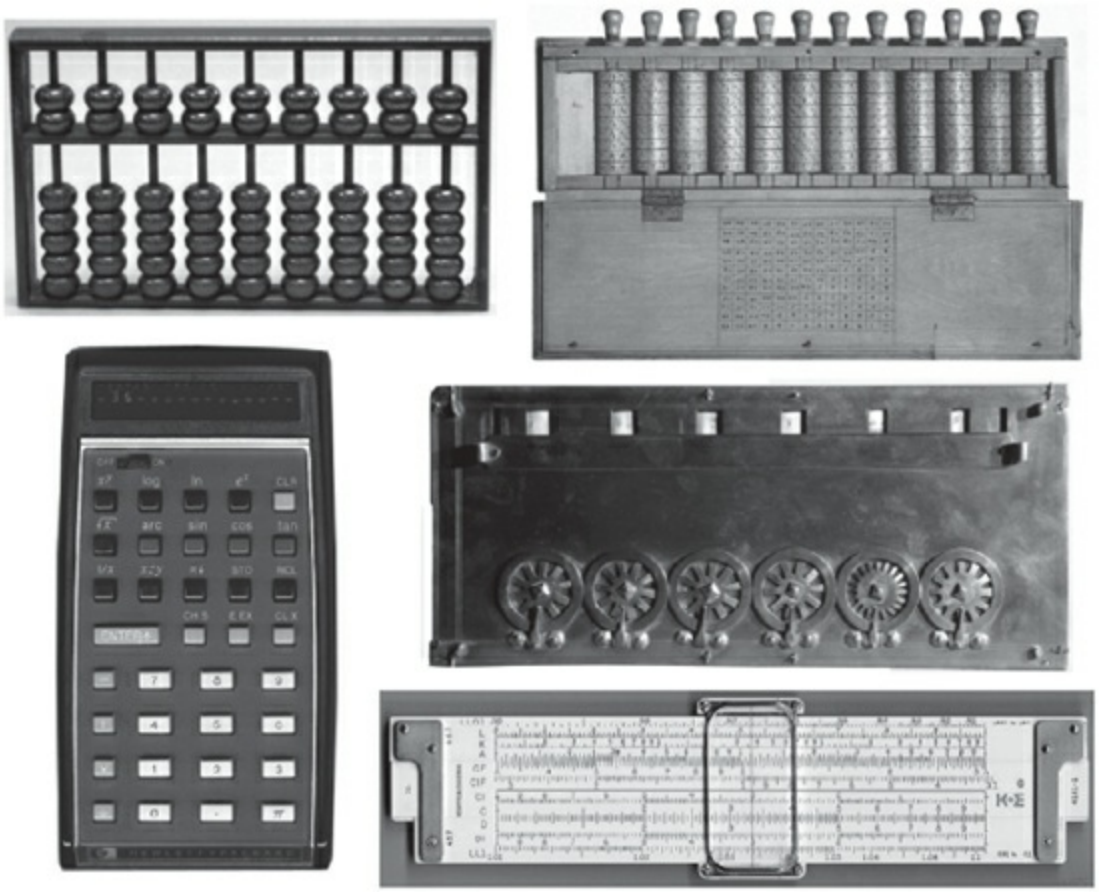


Figura 1.16 Máquinas de calcular através dos séculos, no sentido horário a partir da extremidade superior esquerda. O *ábaco* foi criado na antiguidade e é usado até hoje. John Napier, que inventou os logaritmos no início do século XVII, construiu uma calculadora conhecida como *Ossos de Napier* para executar as operações de multiplicação e divisão (foto copyright Science Source/Photo Researchers, Inc.). Em meados do século XVII, Blaise Pascal inventou uma máquina chamada *Pascaline,* que usava um sistema de engrenagens para executar somas com "vai um" (foto copyright J-L Charmet/Photo Researchers, Inc.). A *régua de cálculo*, uma versão mais recente dos Ossos de Napier, foi muito usada por cientistas e engenheiros antes da invenção da calculadora eletrônica. A *HP-35* da Hewlett-Packard, que recebeu este nome porque tinha 35 teclas, foi a primeira calculadora científica de bolso; custava 395 dólares quando foi lançada, em 1972 (foto copyright David G. Hicks, Museu de Calculadoras HP).

Substituição de Números em Fórmulas O modo mais comum para resolver um problema de engenharia através da matemática consiste em expressá-lo através de equações, usando símbolos para representar as variáveis e constantes, e resolver algebricamente as equações,

obtendo assim uma fórmula, e finalmente substituir os símbolos por valores conhecidos para chegar a um resultado numérico. Esta substituição final de números nas fórmulas requer apenas cálculos aritméticos, mas é um processo tedioso e sujeito a erros, mesmo que seja usada uma calculadora.

Uma das principais diferenças entre os computadores digitais inventados no século XX (que, de agora em diante, serão chamados simplesmente de "computadores") e as antigas máquinas de calcular é que os computadores são capazes de processar *qualquer* tipo de informação que possa ser codificada como uma sequência de zeros e uns. Isso inclui não apenas números, mas também textos, imagens, sons, e muito mais. O fato de que os computadores podem processar vários tipos de informação tem muitas implicações importantes, mas, no que diz respeito ao processamento de dados numéricos, o importante é observar que os computadores são capazes de lidar não só com valores numéricos, mas também com fórmulas e expressões literais. Isso significa que podemos digitar as fórmulas e deixar que o computador cuide da substituição dos valores numéricos, da execução dos cálculos e da impressão dos resultados. Esta é uma grande vantagem em relação às máquinas de calcular, em termos de eficiência, confiabilidade e capacidade de documentar, não só a resposta, mas também os passos intermediários. A importância da interpretação de fórmulas se reflete no nome de uma das primeiras linguagens de programação, o FORTRAN, cujo nome tem como origem a expressão FORmula TRANslator, ou seja, Tradutor de Fórmulas.

Análise e Plotagem de Dados Outra atividade frequente na engenharia é a análise de dados. Esses dados podem ser os resultados de experimentos, simulações ou dados financeiros. O objetivo de qualquer tipo de análise de dados é interpretar uma série de números. As principais técnicas usadas para isso consistem em dispor os

números em tabelas, plotá-los em gráficos ou reduzi-los a parâmetros estatísticos como médias e desvios-padrão.

As ferramentas baseadas em computador se tornaram indispensáveis para a análise de dados, particularmente no caso de dados numerosos ou complexos. Uma dessas ferramentas é a *planilha eletrônica*, ilustrada na Figura 1.17. A primeira planilha eletrônica foi o programa VisiCalc, lançado em 1979 para o computador Apple II. Foi por causa das planilhas eletrônicas que muitas firmas compraram seus primeiros computadores pessoais no início da década de 1980, e elas continuam a ser, juntamente com os programas de comunicação, processamento de texto e apresentação de *slides*, o software mais usado pelas empresas.

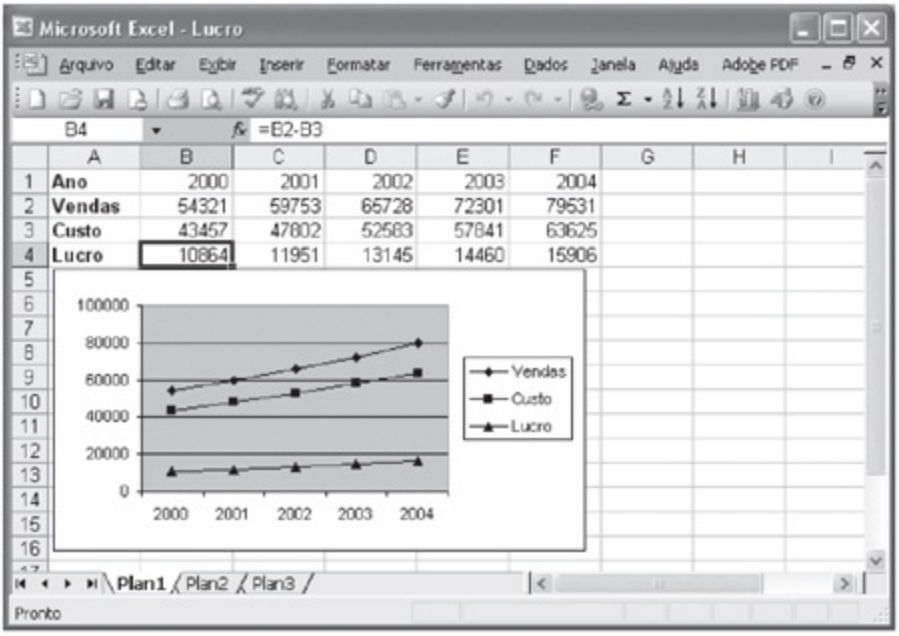


Figura 1.17 Nas planilhas eletrônicas, os dados são dispostos em linhas e colunas.

Métodos Numéricos Outra aplicação comum dos computadores na engenharia é o uso de *métodos numéricos* para resolver problemas matemáticos. Método numérico é uma sequência precisa de passos executados à mão ou implementados em um computador para resolver um problema sem recorrer aos métodos simbólicos da

álgebra e do cálculo. Exemplo comum do uso de métodos numéricos é a determinação da área sob uma curva, ilustrada na Figura 1.18. Neste exemplo, suponha que estamos interessados em conhecer a área sob a curva descrita pela função $f(x) = x^2$, para x compreendido entre 0 a 10. Usando os métodos do cálculo, podemos obter a solução exata deste problema, que é $a^3/3$ para x compreendido entre 0 e um limite superior a. Um método numérico para resolver este problema é aproximar a área por uma série de 10 retângulos, fazendo a largura de cada retângulo igual a 1 e a altura igual ao valor de x^2 no centro do intervalo coberto pelo retângulo. O importante do método numérico é que não exige conhecimentos de cálculo para obter a solução, mas apenas a capacidade de calcular o valor de x^2 para vários valores de x. Este é o objetivo de todos os métodos numéricos: reduzir problemas matemáticos complexos a uma série de operações aritméticas simples. Antes do advento dos computadores, grupos de funcionários executavam os cálculos em “linhas de montagem” nas quais uma pessoa fazia somas, outra elevava números ao quadrado, e assim por diante, cada uma passando um resultado parcial à pessoa seguinte do processo. Durante o projeto da primeira bomba atômica, em Los Alamos, Novo México, esses grupos eram formados pelas esposas dos cientistas envolvidos no projeto, que usavam calculadoras mecânicas para a tarefa.

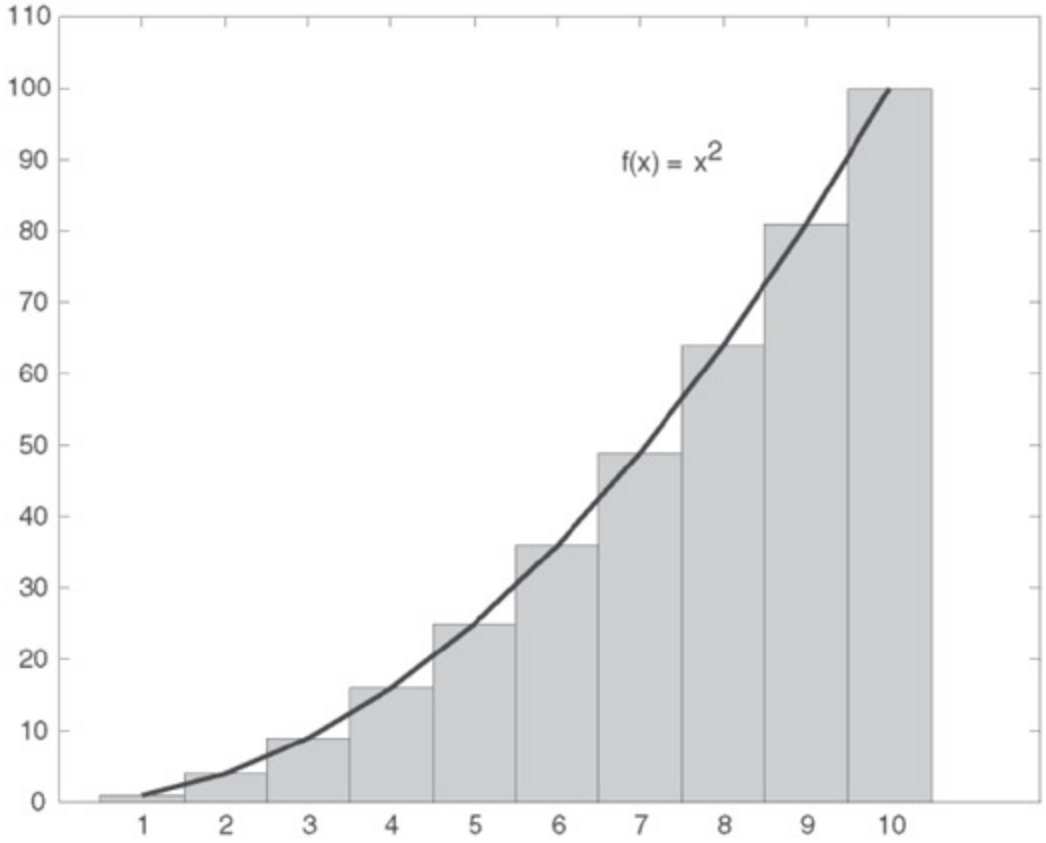


Figura 1.18 Um método numérico para calcular a área sob uma curva como uma série de retângulos.

No início da era dos computadores, os engenheiros e cientistas tinham que escrever programas para implementar métodos numéricos. Hoje em dia, existem bibliotecas de aplicativos para resolver uma grande variedade de problemas, como calcular áreas, interpolar valores entre os pontos de uma curva, resolver sistemas de equações e determinar os pontos em que uma função passa por um máximo ou por um mínimo. Na maior parte das vezes, os engenheiros usam métodos numéricos sem ter consciência disso, já que esses métodos fazem parte de uma ferramenta de computação mais sofisticada, como um programa de simulação. Um videogame realista, por exemplo, executa cálculos como determinar a área sob uma curva milhões de vezes por segundo para simular o movimento de um objeto.

PROBLEMAS

1. **Problemas Abertos**
   O que é um “problema aberto”?

2. **TryEngineering.org**
   TryEngineering.org (www.tryengineering.org) tem alguns jogos online destinados a familiarizar os estudantes com os métodos da engenharia. Experimente alguns desses jogos e descreva-os, indicando quais achou mais interessantes e por quê.

3. **Análise de Relações**
   Na Seção 1.3.2 e na Figura 1.8 é mostrado que a miniaturização dos circuitos integrados nas últimas décadas (a Lei de Moore) envolveu uma rede de atividades correlatas da qual participaram muitas pessoas, empresas e especialidades. Prepare uma palestra ou relatório a respeito de uma situação semelhante em outra área. Não é preciso realizar uma pesquisa extensa; o importante é destacar a complexidade das relações e o papel desempenhado pela engenharia. Buscas na Internet podem ser uma boa forma de conseguir exemplos de firmas e pessoas envolvidas no processo, semelhantes aos apresentados na Seção 1.3.2. Eis alguns temas sugeridos:
   - Sistemas de transporte coletivo
   - Redes de lanchonetes
   - Aparelhos portáteis de som/multimídia
   - Peças de vestuário

4. **Atividades de Pesquisa na Sua Faculdade**
   Além de dar aula em cursos de graduação, os professores de engenharia normalmente também realizam pesquisas. Informe-se a respeito de um projeto de pesquisa que envolva os professores

do curso de engenharia da sua faculdade e responda às seguintes perguntas:

(a) Qual é o nome do projeto?
(b) Quais são os objetivos do projeto?
(c) Quem financia o projeto?
(d) Quantas pessoas, entre professores e estudantes, estão envolvidas no projeto? O projeto envolve mais de uma faculdade?
(e) Existem alunos de graduação envolvidos no projeto? Se a resposta for afirmativa, dê um exemplo de contribuição de um aluno de graduação para o projeto. Quais eram os conhecimentos do estudante antes de entrar para o projeto?

5. Papel das Especialidades da Engenharia

Tomando como base as descrições da Seção 1.4, discuta o papel que engenheiros de duas ou mais especialidades diferentes podem desempenhar nas seguintes questões:

- implantar uma fonte de energia adequada para residências ou meios de transporte
- prevenir ou combater uma epidemia de uma doença como a gripe
- produzir um filme de cinema

6. Entrevista com um Veterano

Entreviste um estudante de engenharia da sua faculdade que esteja no último ano, fazendo-lhe as seguintes perguntas:

- Qual é a sua especialidade?
- Quais foram os cursos que mais lhe agradaram?
- Quais foram os cursos mais difíceis? Qual foi o ano mais difícil?
- Qual foi o projeto mais interessante em que você trabalhou?

- Que conselhos você tem a dar para quem está começando?
- O que você pretende fazer depois que se formar?

7. Entrevista com um Engenheiro

Na Seção 1.4.1 é dito que os engenheiros devem estar preparados para se adaptar e que poucos dos amigos e colegas do autor, que se formaram entre 20 e 25 anos atrás, estão fazendo o que imaginavam que iriam fazer quando se formaram. Entreviste um engenheiro (o encontro pode ser arranjado através de uma indústria local ou de uma organização de ex-alunos) que tenha se formado há pelo menos 10 anos e verifique se ele se enquadra nesta categoria.

8. Sociedades Profissionais de Engenharia

O Sloan Career Cornerstone Center fornece links para várias sociedades e organizações profissionais de engenharia (http://www.careercornerstone.org/engineering/engprofassn.htm) Escolha uma que lhe interesse particularmente e responda às seguintes perguntas:

(a) Quais são os principais objetivos da organização?

(b) Quais são os principais benefícios que ela oferece aos membros?

(c) A organização permite a admissão de estudantes? Caso a resposta seja afirmativa, que benefícios e atividades ela oferece especificamente aos estudantes? Existe um ramo dessa organização no seu campus?

[1]Isso não quer dizer que o cientista e o matemático não possam usar suas habilidades para ganhar no xadrez!

[2]www.oracleofbacon.com.

[3]www.imdb.com.

[4]Veja Pirsig, Robert M. *Zen and the Art of Motorcycle Maintenance/Zen e a Arte da Manutenção de Motocicletas* (New York: HarperTorch 2006), página 417.

CAPÍTULO

2

Organização e Representação de Sistemas de Engenharia

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- definir os atributos de um projeto de engenharia e descrever a relação entre o objetivo, o ambiente e a forma de um produto;
- descrever um *modelo cognitivo* simples para o modo como a mente humana armazena, organiza e recupera informações;
- desenhar *mapas conceituais*, diagramas com círculos e setas que ilustram ideias e as relações entre elas; preparar mapas conceituais para algumas situações simples;
- definir uma *hierarquia* e discutir por que as hierarquias são importantes na representação de ideias; usar mapas conceituais hierárquicos para ilustrar a organização das partes de um sistema.

2.1 O QUE PENSAMOS A RESPEITO DE COMO PENSAMOS

De todos os fatores que influenciam a forma de um sistema de engenharia, o mais importante é a mente humana. Como os sistemas de engenharia são produtos de processos mentais humanos, esses sistemas são organizados da forma como as pessoas os imaginam.

Nesta seção, vamos discutir algumas das teorias a respeito de como a mente humana armazena, recupera e processa informações, ou seja, vamos falar do "engenho" que está por trás da engenharia. Os pesquisadores de *psicologia cognitiva* e campos correlatos, entre eles o campo da ciência da computação, vêm estudando ativamente a solução de problemas por seres humanos nas últimas décadas, mas a questão de "como pensamos" remonta aos filósofos da Grécia antiga.

Pode parecer estranho que uma seção a respeito da cognição humana apareça em um livro introdutório de engenharia, mas, por várias razões, acreditamos que é importante para os engenheiros estarem cientes do assunto. No final da década de 1990 e início da década de 2000, o National Research Council (NRC), trabalhando em nome da National Academy of Science e da National Academy of Engineering, executou um estudo de vários anos sobre o modo como as pessoas aprendem e sobre as melhores técnicas de ensino. O estudo deu origem a dois livros importantes, *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School* (*Como as Pessoas Aprendem: Cérebro, Mente, Experiência e Escola*) [BBC00] e *How Students Learn: History, Mathematics, and Science in the Classroom* (*Como os Estudantes Aprendem: História, Matemática e Ciência na Sala de Aula*) [DB05]. Um princípio básico do estudo do NRC é que o conhecimento de como se aprende e a capacidade de avaliar o próprio aprendizado são fatores importantes para o desenvolvimento de um estudante independente. Os autores do estudo chamam de *metacognição* esse conhecimento dos próprios processos mentais; o prefixo "meta" significa "depois de", "juntamente com" ou "além de". A educação formal não é suficiente para equipar um indivíduo com todos os conhecimentos de que vai necessitar no futuro. Como observa o estudo do NRC,

> Vocês são os donos e operadores do seu cérebro, mas ele veio sem um manual de instruções. Vocês precisam aprender a aprender. [DB05]

Assim como um motorista pode conseguir melhor quilometragem e

desempenho de um automóvel adquirindo conhecimentos básicos a respeito do funcionamento do motor e da transmissão, um solucionador de problemas pode conseguir melhor quilometragem e desempenho de sua máquina cognitiva adquirindo conhecimentos básicos a respeito de como ela funciona!

2.1.1 Exemplo: Fazendo Contas de Cabeça

Vamos começar nossa introdução à solução de problemas por seres humanos considerando um problema simples de aritmética.

$$2 \times 7 = ?$$
$$5 \times 4 = ?$$
$$2 + 0 = ?$$
$$9 + 6 = ?$$

A maioria dos adultos é capaz de resolver problemas como este em um piscar de olhos; menos de um segundo. Na verdade, somos tão competentes para resolver esse tipo de problema que não sabemos explicar o que fazemos; simplesmente conhecemos a resposta.

Considere agora o problema de multiplicar um número de quatro algarismos por um número de dois algarismos.

$$4132 \times 57 = ?$$

Com papel e lápis, a maioria dos adultos é capaz de resolver esse problema em menos de um minuto, mas temos dificuldade para resolver de cabeça, esse problema, independentemente do tempo disponível. Por quê? Não nos falta uma estratégia para resolver o problema, já que somos capazes de explicar o método básico de multiplicar um dos números pelo algarismo das unidades do outro, somar o resultado com o resultado da multiplicação do número pelo algarismo das dezenas deslocado de uma posição, e assim por diante. Também não nos faltam informações, pois o problema pode ser reduzido a uma série de operações de multiplicação e adição de

números de um algarismo, algo que sabemos fazer. O problema que enfrentamos para resolver esse problema é apenas de memória; mais especificamente, temos dificuldade para guardar os resultados parciais e recuperálos quando precisamos deles.

2.1.2 Um Modelo de Processamento Cognitivo

As teorias atuais de psicologia cognitiva modelam o sistema humano de solução de problemas usando três componentes, ilustrados na Figura 2.1:

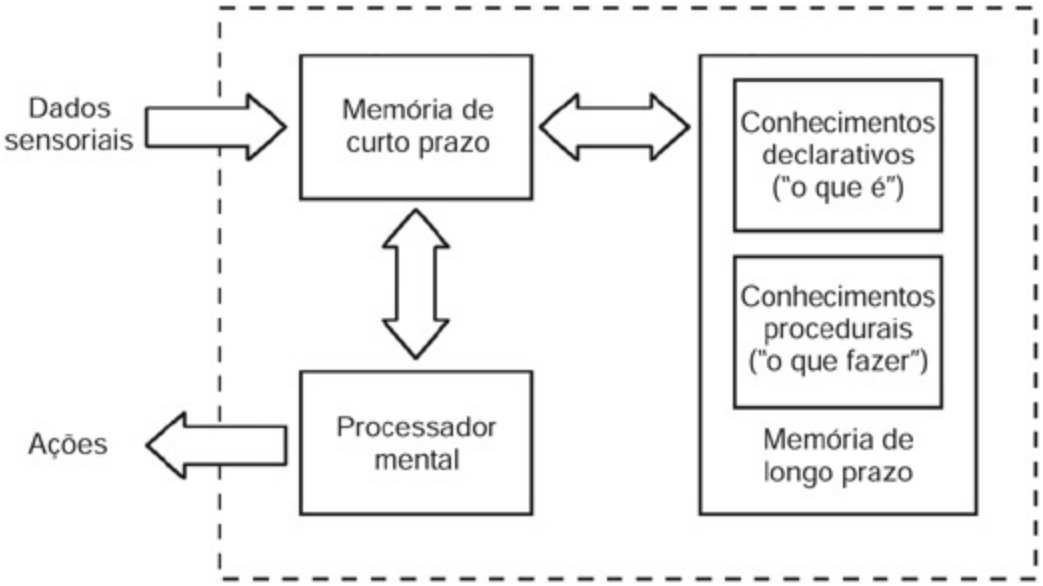


Figura 2.1 O sistema humano de processamento de informações.

- a **memória de longo prazo**, o repositório gigantesco de fatos que acumulamos durante a vida, e que inclui conhecimentos *declarativos*, do tipo "o que é", e conhecimentos *procedurais*, do tipo "como fazer";
- a **memória de curto prazo**, um repositório muito menor de informações de uso imediato;
- um **processador mental**, que age sobre os fatos guardados na memória de curto prazo.

Segundo esse modelo, a memória de curto prazo armazena temporariamente informações colhidas por nossos sentidos (audição, visão etc.) antes de passá-las para a memória de longo prazo. As pesquisas mostraram que, se uma informação da memória de curto prazo não é transferida para a memória de longo prazo dentro de alguns segundos, ela é esquecida. Além disso, o processamento mental utiliza apenas as informações contidas na memória de curto prazo; para podermos processar uma informação armazenada na memória de longo prazo, precisamos transferi-la de volta para a memória de curto prazo. A memória de curto prazo é, portanto, o gargalo do sistema.

Memória de Curto Prazo Duas questões básicas para compreendermos o funcionamento da memória de curto prazo são as seguintes:

- Qual é a capacidade da memória de curto prazo e que tipo de informações ela é capaz de armazenar?
- Como podemos acessar as informações da memória de longo prazo para transferi-las para a memória de curto prazo?

Em 1956, George Miller, da Universidade de Harvard, escreveu um artigo na revista *The Psychological Review*, intitulado "O Número Mágico Sete, Mais ou Menos Dois: Alguns Limites de Nossa Capacidade de Processar Informações", no qual afirma que o número de itens de informação que uma pessoa é capaz de armazenar na memória de curto prazo é sete, mais ou menos dois. O exemplo a seguir ilustra esse fato. Faça a seguinte experiência: observe a sequência de letras abaixo durante cinco segundos, tentando memorizá-la a partir do início. Em seguida, escreva a sequência em uma folha de papel.

c d a a o m c n o a c a

Se você é como a maioria das pessoas, deve ter se lembrado corretamente de cinco a nove letras. Este modelo nos ajuda a

compreender por que é tão difícil multiplicar mentalmente um número de quatro algarismos por um número de dois algarismos. Se contarmos todos os itens independentes de informação de que necessitamos para resolver o problema (produtos de algarismos, casos de “vai um”, somas parciais etc.), encontraremos mais de sete itens. Isso quer dizer que nossa memória de curto prazo fica saturada e não conseguimos processar todas as informações.

Miller também estava interessado em descobrir o que pode ser considerado um “item” de informação para a memória. Ele chegou à conclusão de que organizamos as informações em “pedaços” (um termo que é usado até hoje) e que combinamos pedaços pequenos de informação para formar pedaços maiores. Miller descobriu que a memória de curto prazo tem capacidade para sete pedaços, seja o que for que esses pedaços representem. Para verificar este fato com outro experimento simples, passe cinco segundos memorizando a lista de palavras abaixo e depois tente escrevê-las em uma folha de papel:

cano doca cama bola ouro pano cone lima

A grande maioria das pessoas consegue se lembrar de pelo menos cinco palavras, e muitas são capazes de reproduzir as oito. Observe que as letras das três primeiras palavras (“cano”, “doca” e “cama”) são as mesmas do exemplo anterior, apenas em outra ordem. Agrupando as letras em palavras, somos capazes de armazenar mais de sete letras em nossa memória de curto prazo, mas ainda estamos limitados a sete palavras sem nexo, mais ou menos duas. Considere agora a lista de dez palavras a seguir e tente memorizá-las durante cinco segundos antes de escrevê-las em uma folha de papel:

cada macaco no ladrão que rouba tarda mas não falha

A maioria dos leitores reconhecerá esta lista como uma combinação de trechos dos provérbios “cada macaco no seu galho”, “ladrão que rouba ladrão tem cem anos de perdão” e “a justiça tarda, mas não

falha". Agrupando as palavras em três pedaços, a maioria das pessoas consegue facilmente memorizar as dez palavras, que têm, no total, 42 letras. Além disso, as primeiras três palavras, "cada macaco no", têm as mesmas 12 letras do primeiro exemplo, que agora são muito mais fáceis de lembrar. Finalmente, se alguém cometer um engano ao escrever a lista, não vai trocar uma letra por outra, mas omitir ou acrescentar palavras inteiras.

A Memória de Longo Prazo e os Esquemas Os experimentos de Miller e de outros pesquisadores mostram que o conhecimento é transferido da memória de curto prazo para a memória de longo prazo, e vice-versa, na forma de pedaços. O que define, porém, os pedaços de conhecimento, e de que forma são organizados e acessados na memória de longo prazo?

Os cientistas acreditam que, na memória de longo prazo, o conhecimento está organizado na forma de uma série de conceitos conectados por relações chamadas *esquemas*. De acordo com este modelo, os pedaços de conhecimento são coleções de ideias correlatas ligadas a um conceito central. Os *fatos* são pedaços muito pequenos de conhecimento que ligam um conceito a outro através de uma relação simples. Lembrar-se de um fato armazenado na memória de longo prazo envolve um "passeio" pelas relações, de conceito em conceito, até que a informação seja localizada. Aprender significa armazenar um fato na memória de longo prazo formando ligações entre a nova informação e as informações existentes. As ideias podem ser conectadas por muitos tipos de relações; o leitor pode ter uma ideia da variedade dessas relações deixando a mente divagar em uma "livre associação". A Figura 2.2 mostra um esquema baseado no conceito "um quilo de prevenção é melhor que uma tonelada de cura". Vários conceitos estão ligados a esta ideia central, incluindo os conceitos que essa máxima defende, ou seja, o de que "um planejamento cuidadoso pode evitar problemas" e o de que "a solução

de problemas pode custar caro". Ligadas a este último conceito podem estar histórias de fracassos clássicos da engenharia, como a queda da ponte Tacoma Narrows. Porém, para o problema de memorizar uma lista de letras que descrevemos na seção anterior, os conceitos importantes são simplesmente as palavras que formam uma frase e as letras que formam uma palavra; os outros conceitos são irrelevantes. Para tirar vantagem do uso de uma frase como recurso para memorizar as letras, é necessário localizar o pedaço de conhecimento delimitado pela linha pontilhada dentro da vasta rede de conceitos da memória de longo prazo e transferi-lo para a memória de curto prazo para ser processado.

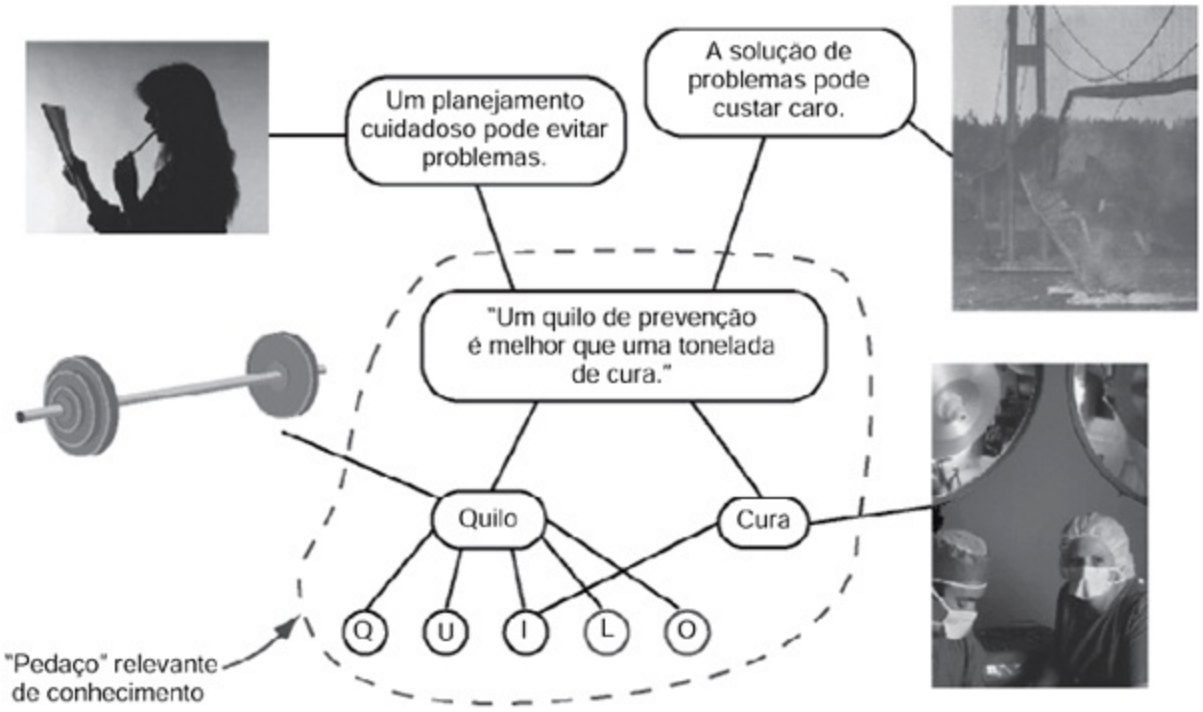


Figura 2.2 Diagrama de um esquema.

2.1.3 O Conhecimento de "Como Fazer" e a Solução de Problemas

Até aqui, estivemos com a atenção voltada para a representação de conhecimentos usados para responder a perguntas da forma "o que

é". Esse tipo de conhecimento é frequentemente chamado de *conhecimento declarativo*, pois declara fatos a respeito de conceitos. Um segundo tipo de conhecimento, chamado *conhecimento procedural*, responde a perguntas do tipo "como fazer" alguma coisa, e é a base de todos os métodos humanos de solução de problemas. Ninguém sabe exatamente como a mente humana armazena e usa os conhecimentos procedurais. Os psicólogos cognitivos e os cientistas de computação que trabalham no campo da inteligência artificial, porém, criaram modelos que simulam o modo como as pessoas usam conhecimentos procedurais para resolver problemas [And80] [And83]. Nesta seção, vamos discutir uma abordagem popular da representação de conhecimentos procedurais e mostrar de que forma pequenos pedaços de conhecimentos procedurais podem ser combinados para resolver problemas complexos.

Uso de Regras para Representar Pedaços de Conhecimentos Procedurais Uma abordagem popular para modelar os conhecimentos procedurais consiste em representar pequenos pedaços de informações procedurais como *regras* da forma:

SE uma certa condição for satisfeita,
ENTÃO execute uma certa ação.

A parte de "condição" da regra examina fatos que podem ou não estar presentes na forma de um conhecimento declarativo. A parte de "ação" da regra acrescenta novos fatos ao conhecimento declarativo quando a condição é satisfeita, e pode também fazer com que uma pessoa execute uma ação concreta dentro do seu ambiente.

Quando o "processador mental" ativa uma certa regra, compara a condição com fatos armazenados na memória. Se a condição é satisfeita, ou seja, se está de acordo com um fato ou uma série de fatos, dizemos que a regra é *disparada* e a ação é executada.

Considere, por exemplo, a seguinte regra, que expressa um pedaço de conhecimento a respeito de “como” determinar se o objeto X é um pássaro:

	X é um animal
SE	e X pode voar
	e X tem penas
ENTÃO	X é um pássaro

Às vezes, mais de uma regra pode ser aplicada a uma certa situação. Considere, por exemplo, as duas regras seguintes:

SE	o objetivo é não se molhar e está chovendo
ENTÃO	use um guarda-chuva
SE	o objetivo é não se molhar e está chovendo
ENTÃO	use uma capa

Neste caso, não existe uma razão intrínseca para dar preferência à primeira ou à segunda abordagem, e qualquer uma das duas regras pode ser disparada. Em outras palavras, existe mais de uma solução para o problema de não se molhar quando está chovendo. Por outro lado, suponha que a primeira regra seja “refinada” da seguinte forma:

	o objetivo é não se molhar
SE	e está chovendo
	e uma de suas mãos está livre
ENTÃO	use um guarda-chuva

Neste caso, se nenhuma das mãos está livre, é disparada apenas a segunda regra, cuja ação é usar uma capa. Muitos problemas têm mais de uma solução possível, e nosso cérebro é capaz de manter uma lista dessas opções.

Uso de Regras em Cadeia para Resolver Problemas Complexos Às vezes, temos a sorte de encontrar uma regra que resolve totalmente o problema para nós. Na maioria dos casos, porém, não existe uma solução direta, e somos forçados a usar a criatividade para chegar à solução através de uma série de passos que ligam o ponto inicial ao nosso objetivo. Existem três estratégias diferentes para obter esse tipo de solução: partir do ponto inicial em direção ao ponto final, usando o chamado *encadeamento para a frente*; partir do ponto final em direção ao ponto inicial, usando o chamado *encadeamento para trás*; e partir de um *ponto intermediário* (Figura 2.3).

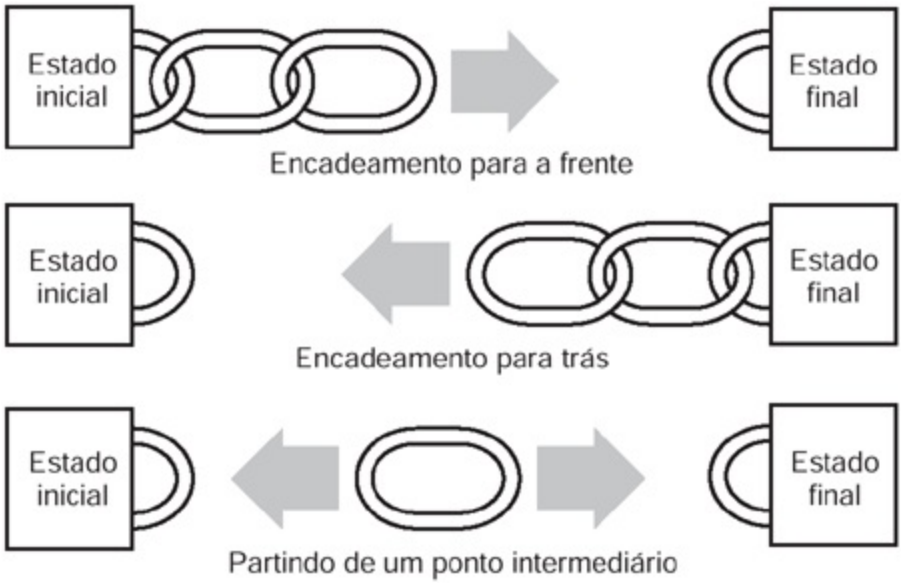


Figura 2.3 Estratégias para a solução de problemas. Acrescentar elos à cadeia corresponde a descobrir estados intermediários que diminuem a distância entre o estado inicial e o estado final.

Um exemplo do uso de regras em cadeia para chegar a uma solução é a compra de uma passagem aérea para voar de uma cidade a outra quando não existem voos diretos entre as duas cidades. Suponha, por exemplo, que você precise voar de South Bend, Indiana, para Monterey, Califórnia. Como não existem voos diretos entre South Bend e Monterey, será necessário passar por outros aeroportos. Examinando um mapa de rotas aéreas como o da Figura 2.4,

encontramos muitas soluções possíveis.

- Usando encadeamento para a frente, escolhemos um voo de South Bend para um *hub* que atenda à cidade, como Chicago ou Cincinnati, e em seguida escolhemos outros voos até chegarmos a Monterey.
- Usando encadeamento para trás, escolhemos primeiro um voo para Monterey a partir de um dos *hubs* que atendem à cidade, como San Francisco ou Los Angeles, e em seguida escolhemos outros voos, com partidas cada vez mais cedo, até chegarmos a South Bend.
- Partindo de um ponto intermediário, escolhemos primeiro um voo direto que cubra a maior parte da distância, como, por exemplo, um voo de Chicago a San Francisco, e depois cuidamos dos voos nas duas extremidades da jornada.

Um problema clássico proposto por Maier [Mai31] oferece outro exemplo da ligação de peças para encontrar a solução de um problema complexo. Suponha que você está em um aposento como o da Figura 2.5, onde existem duas cordas penduradas no teto, e sua missão é amarrar as extremidades das cordas. Embora elas tenham comprimento suficiente para serem amarradas, as pontas estão longe demais do chão para que você possa alcançá-las simultaneamente. O quarto também contém vários objetos, entre eles uma cadeira e um alicate, que você pode usar para resolver o problema. Como amarrar as duas cordas?

Uma solução é subir na cadeira, amarrar o alicate em uma das cordas, fazê-la balançar como um pêndulo, arrastar a cadeira para baixo da outra corda, pegar o alicate e, finalmente, amarrar as duas cordas. De que forma as estratégias de encadeamento para a frente e encadeamento para trás seriam aplicadas à busca da solução? Na abordagem do encadeamento para a frente, você verifica quais são os

objetos disponíveis, como o alicate, e considera a possibilidade de usá-los, talvez amarrando-os a uma das cordas. Na abordagem do encadeamento para trás, você imagina as duas cordas amarradas e pensa em formas de fazê-las se encontrarem: se você não é capaz de alcançar as duas cordas ao mesmo tempo, talvez haja um meio de fazer com que uma delas chegue até você. As duas abordagens levam a uma solução válida, e muitas vezes é interessante mudar de estratégia quando estamos diante de um problema aparentemente insolúvel.

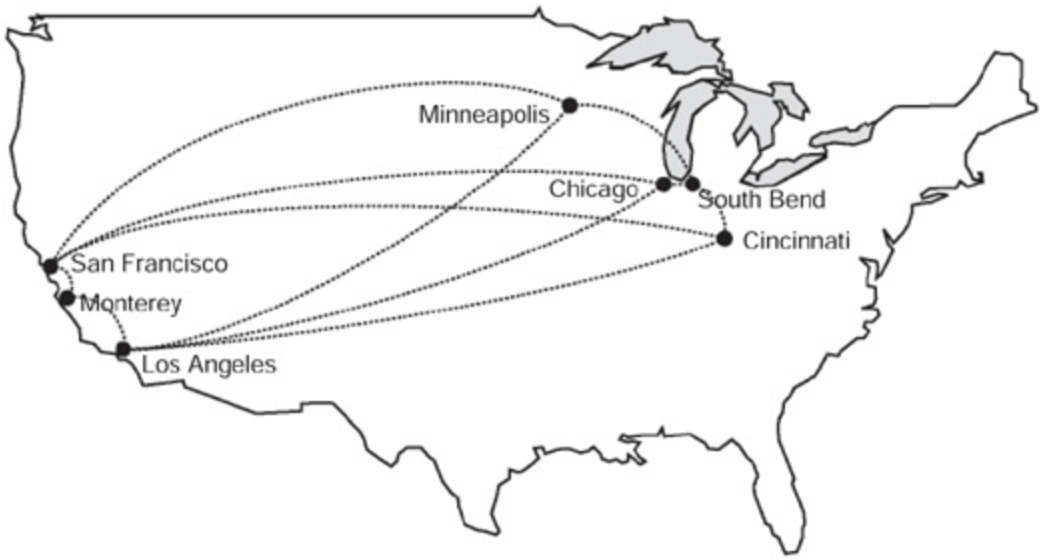


Figura 2.4 Um mapa de rotas aéreas é um diagrama do espaço de soluções para voar de um aeroporto de origem (o estado inicial) para um aeroporto de destino (o estado final) [Sky05].

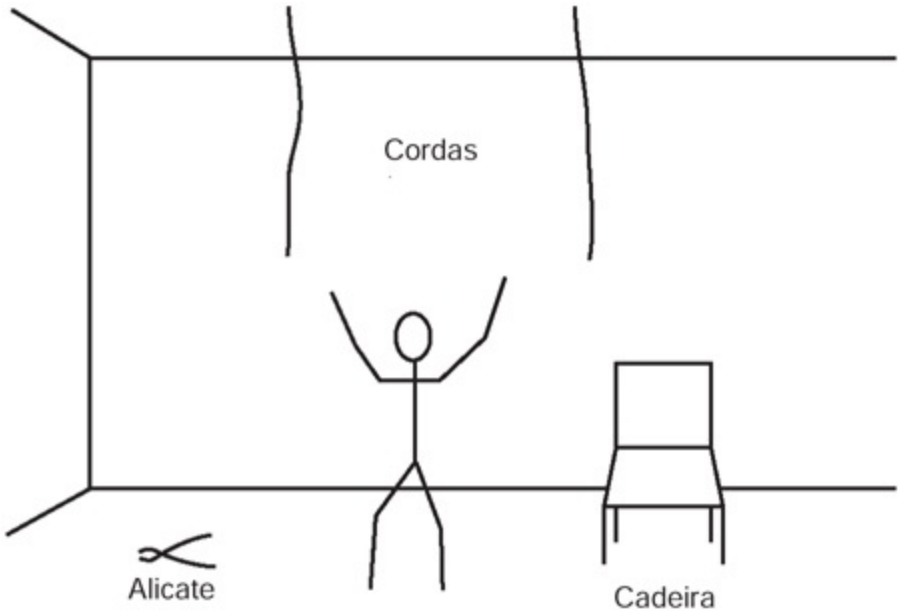


Figura 2.5 O problema da corda.

2.1.4 A Mente e o Cérebro

O modelo apresentado nas seções anteriores é uma visão *comportamental* do modo como processamos ideias. Quando combinamos esse modelo com o que conhecemos de anatomia, fisiologia, química e biologia molecular do sistema nervoso, compreendemos melhor o aprendizado e o desenvolvimento humano. Em particular, o estudo do National Research Council *How People Learn/Como as Pessoas Aprendem* [BBC00] discute três importantes descobertas na interface entre as pesquisas de psicologia cognitiva e neurociência:

1. O aprendizado muda a estrutura física do cérebro.
2. Essas mudanças estruturais alteram a organização funcional do cérebro; em outras palavras, o aprendizado organiza e reorganiza o cérebro.
3. Diferentes partes do cérebro podem estar preparadas para aprender em diferentes ocasiões.

Nesta seção é apresentada uma breve discussão desses pontos.

A Estrutura do Cérebro Nosso sistema nervoso, incluindo o cérebro, é formado por células chamadas *neurônios*. Os neurônios são responsáveis pelo tráfego de informações no interior do corpo, comunicando-se com as células dos órgãos sensoriais, com os músculos e com outros neurônios. A Figura 2.6 mostra a estrutura de um neurônio. O corpo celular possui dois tipos de projeções especializadas. Os *dendritos* introduzem informações na célula, enquanto os *axônios* conduzem informações para fora da célula. Um neurônio passa informações para outro neurônio liberando substâncias químicas chamadas *neurotransmissores* em um pequeno espaço vazio entre um axônio e um dendrito conhecido como *sinapse*. A liberação de neurotransmissores em uma sinapse pode excitar ou inibir a atividade da célula receptora. A resposta de um neurônio é determinada pelo efeito conjunto das informações recebidas pelos seus dendritos.

São as sinapses que determinam os circuitos de neurônios no cérebro. O cérebro humano contém aproximadamente 200 bilhões de neurônios; esse número permanece praticamente constante durante toda a vida, mas o número e a localização das sinapses estão sempre mudando. As modificações acontecem através de dois processos básicos: superprodução e "poda" de sinapses e criação de novas sinapses. O primeiro processo, superprodução e poda, é especialmente importante na infância. David Hubel e Torsten Wiesel receberam o Prêmio Nobel de Medicina de 1981 pela descoberta de que a área do cérebro responsável pela visão, o chamado córtex visual, é moldada por este processo; as crianças reduzem o número de sinapses do córtex visual nos primeiros meses de vida, enquanto acumulam experiências visuais [Hub88]. O segundo processo, criação de novas sinapses e crescimento de dendritos, acontece durante toda a vida e é controlado pela experiência; os neurocientistas acreditam que esse

processo é responsável pela maioria das formas de memória [BBC00].

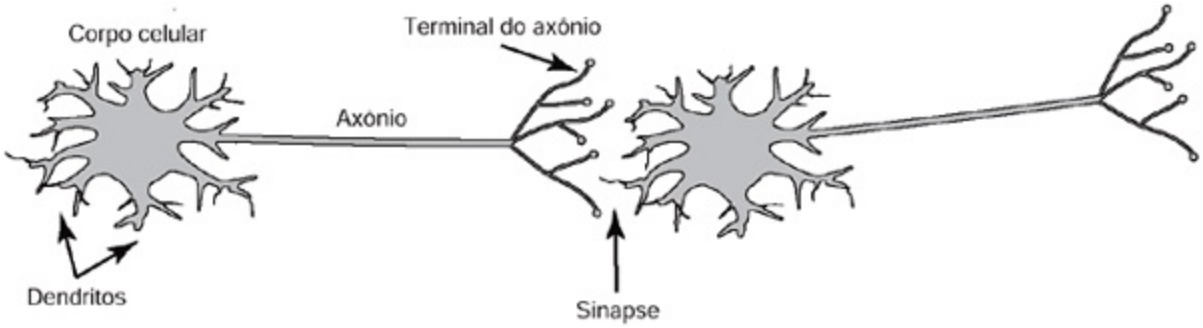


Figura 2.6 Neurônios.

O Treinamento Cria Novas Ligações Os experimentos com ratos que William Greenough e colaboradores realizaram na Universidade de Illinois mostraram que o aprendizado produz um aumento do número de sinapses [BIA+90] [BBC00]. Nesses experimentos, quatro grupos de ratos foram comparados. Um grupo foi ensinado a percorrer um labirinto durante um mês de treinamento, uma tarefa que exigia memória, mas não envolvia muito esforço físico. Um segundo grupo foi forçado a exercitar-se em uma esteira. Um terceiro grupo teve oportunidade de executar exercícios voluntários em uma roda. O quarto grupo não realizou nenhum tipo de exercício. No final do experimento, os dois grupos de "atletas" tinham uma concentração maior de vasos sanguíneos no cérebro do que o grupo de "intelectuais" e o grupo de "preguiçosos". O número de sinapses, porém, era maior no grupo de "intelectuais", mostrando que o aprendizado havia produzido mais sinapses que o exercício puro e simples.

Regiões Funcionais do Cérebro e Efeitos do Treinamento Técnicas não-invasivas como a *tomografia por emissão de pósitrons* (PET) e *ressonância magnética funcional* (MRI), além de cirurgias, permitem aos cientistas estudar as regiões do cérebro humano que mostram maior atividade em várias circunstâncias. Estes experimentos sugerem

que a memória está distribuída por diferentes partes do cérebro. O córtex pré-frontal, localizado logo atrás da testa, como mostra a Figura 2.7, desempenha um papel importante na memória de curto prazo [Bea97]. Partes diferentes do cérebro controlam a memória declarativa de fatos e eventos, e a memória procedural de como executar tarefas. Esses dois processos envolvem, respectivamente, o hipocampo e o neoestriado, como mostra a Figura 2.8.

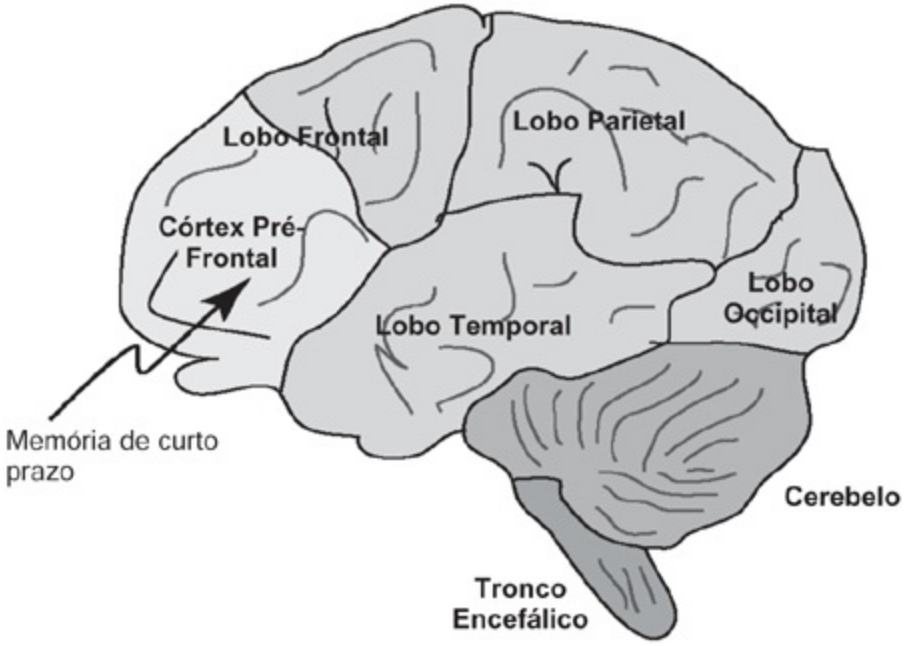


Figura 2.7 O córtex pré-frontal do cérebro desempenha um papel importante na memória de curto prazo.

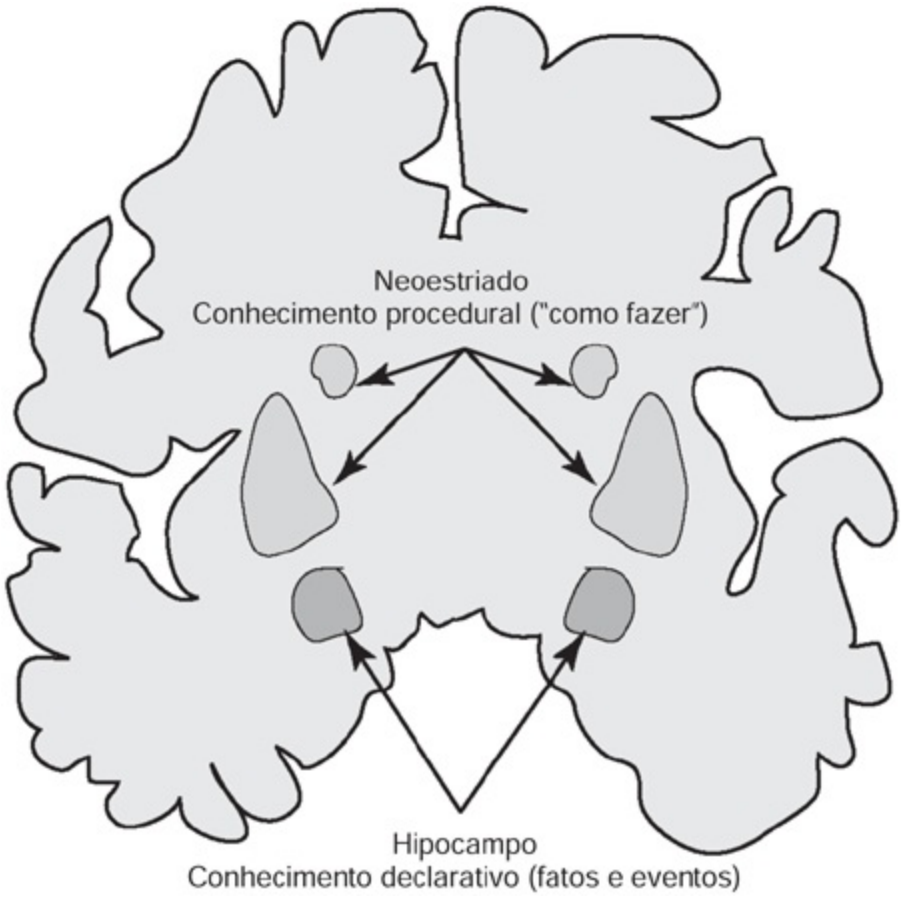


Figura 2.8 A memória declarativa de fatos e eventos envolve o hipocampo. A memória procedural de “como” executar tarefas envolve o neoestriado.

Embora a cada região do cérebro esteja normalmente associada uma certa função, algumas partes do cérebro podem ser “treinadas” para realizar novas funções. Nas pessoas surdas, por exemplo, partes do cérebro que normalmente processam informações auditivas passam a processar informações visuais [BBC00]. Além disso, os padrões de atividade elétrica no cérebro de pessoas que se comunicam usando a linguagem dos sinais não são os mesmos das pessoas comuns [FC86] [BBC00]. Outra prova de que o treinamento pode mudar a organização dos circuitos cerebrais é o fato de que as pessoas que sofrem um derrame ou têm parte do cérebro removida cirurgicamente conseguem recuperar funções perdidas através de um treinamento intensivo [BBC00].

2.2 MAPAS CONCEITUAIS

Diagramas que representam graficamente pedaços de informação são recursos importantes para a solução de problemas. Da mesma forma como escrever resultados parciais ajuda a resolver problemas de multiplicação que temos dificuldade para resolver, de cabeça, os diagramas poupam nossa memória de curto prazo. Muitos tipos de diagramas e outras representações são usados na engenharia; saber escolher (ou criar) uma representação adequada para um problema específico (para que seja possível compreender melhor o problema e resolvê-lo) é uma necessidade básica dos engenheiros. Nesta seção, vamos apresentar um tipo muito simples de diagrama, chamado *mapa conceitual*, e mostrar como pode ser usado para organizar informações.

2.2.1 O que É um Mapa Conceitual?

Mapa conceitual é um grafo cujos nós correspondem a conceitos e cujas arestas correspondem a relações entre conceitos. Rótulos são colocados nos nós e arestas para indicar os conceitos e relações envolvidos. Proposições são declarações formadas por dois ou mais conceitos ligados através de relações. “Enunciamos” proposições em um mapa conceitual dizendo primeiro o nome do objeto que está na cauda da seta, depois a relação, e finalmente o nome do objeto que está na ponta da seta. A Figura 2.9 mostra, por exemplo, um mapa conceitual para os dispositivos de armazenamento de um MP3 *player* portátil, que contém as seguintes proposições:

- um MP3 *player* portátil contém um dispositivo de armazenamento
- a memória *flash* é um tipo de dispositivo de armazenamento
- o disco rígido é um tipo de dispositivo de armazenamento

Vários tipos de “diagramas de círculos e setas” aparecem regularmente em muitos contextos diferentes. Como ilustram os exemplos da Figura 2.10, muitas ferramentas de desenho assistido por computador (CAD) usam grafos como parte da interface com o usuário. A razão é simples: esses desenhos dão uma boa ideia da situação e tendem a ficar “gravados” na mente das pessoas. Os mapas conceituais são particularmente eficazes porque ajudam a estabelecer padrões para situações que podem ser usados repetidas vezes para resolver problemas semelhantes; os mapas conceituais serão muito usados daqui em diante com este propósito. Além do seu valor para apresentar ideias, o ato de montar um mapa conceitual, peça por peça, pode ter uma grande influência na compreensão de um assunto por parte do aluno (ou do professor). Na verdade, as pesquisas revelaram que a capacidade de uma pessoa desenhar um mapa conceitual para um campo do conhecimento indica seu grau de compreensão do assunto e que as questões de exame baseadas na elaboração de mapas conceituais (que exigem que o estudante combine ideias diferentes) são ferramentas de avaliação muito melhores do que questões sobre temas isolados, que exigem pouco mais do que memorização e uma compreensão superficial dos conceitos.

Figura 2.9 Mapa conceitual para os dispositivos de armazenamento de um MP3 *player* portátil.

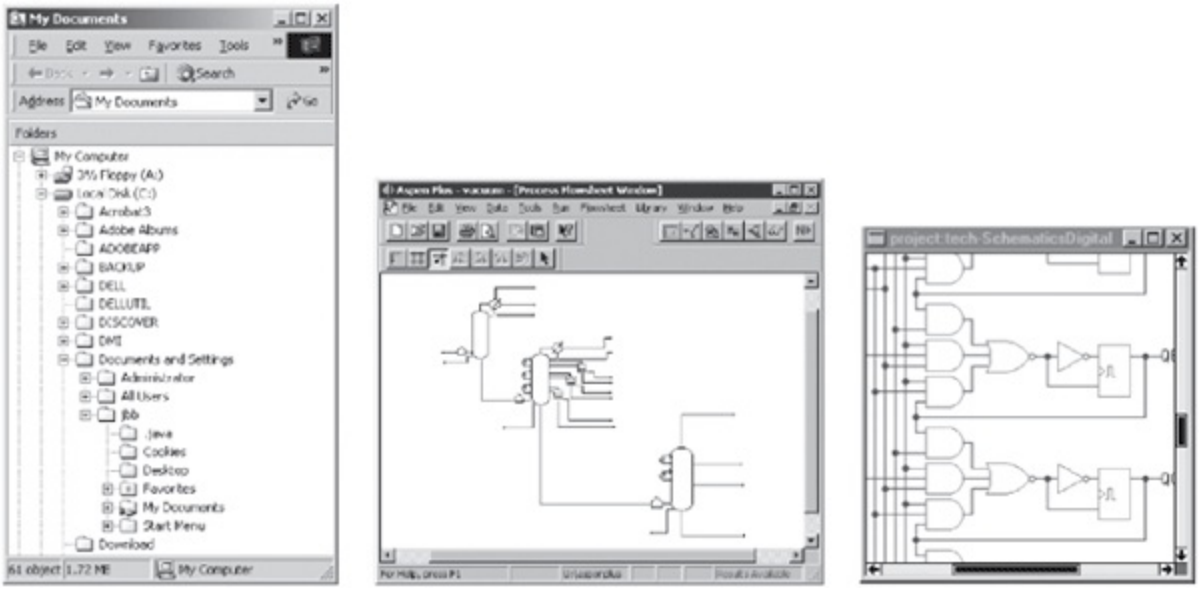


Figura 2.10 Exemplos de informações de engenharia representadas como grafos nas interfaces gráficas com o usuário de ferramentas de computação. Os nós e arestas têm formas diferentes, mas todas as representações são grafos; à esquerda, navegador de arquivos do Microsoft Windows; no centro, fluxograma de um processo químico do Aspen Plus; à direita, diagrama de um circuito digital do Electric.

Joseph Novak e seus colaboradores da Cornell University introduziram o uso de mapas conceituais como ferramenta formal de ensino e aprendizado durante suas pesquisas a respeito do aprendizado de ciência por parte das crianças [Nov91] [ANH78].

Outro sistema, chamado *Mapeamento Mental*[Buz95], com objetivos semelhantes aos dos mapas conceituais, também tem sido muito usado. O uso desses diagramas para representar o conhecimento, porém, tem uma longa história. No final da década de 1950, os pesquisadores no campo emergente da inteligência artificial desenvolveram uma notação muito parecida, conhecida como *redes semânticas* [Ric58] [Sim73] [Qui78].

Christopher Alexander, um arquiteto da Universidade da Califórnia, Berkeley, foi um dos primeiros a explorar o uso de "diagramas semelhantes a mapas conceituais" para organizar informações de projeto. Em seu livro *A Pattern Language/Uma*

Linguagem de Padrões [AIS77], Alexander apresenta um catálogo de 253 padrões inter-relacionados para o projeto de edifícios e comunidades, com detalhes que vão desde a escolha de janelas e cadeiras até a distribuição de centros populacionais em uma região. Desde que *A Pattern Language* foi publicado, outras comunidades de projetos usaram a mesma abordagem, e um livro a respeito de padrões de projetos para o desenvolvimento de software, com uma organização semelhante, despertou grande interesse [GHJV95].

2.2.2 Como Preparar um Bom Mapa Conceitual

Como foi discutido na seção anterior, os mapas conceituais são uma ferramenta valiosa para o ensino e o aprendizado, pelas seguintes razões:

1. preparar um mapa conceitual ajuda a organizar as ideias, proporcionando assim uma compreensão mais profunda do assunto;
2. monitorar a capacidade de preparar um mapa conceitual para uma determinada área do conhecimento é uma boa forma de testar a compreensão do assunto;
3. um mapa conceitual bem elaborado é uma ferramenta eficaz para apresentar ideias a outras pessoas.

Após essas considerações preliminares, vamos voltar a atenção para a preparação de mapas conceituais e a identificação de um bom mapa. Em primeiro lugar, os mapas conceituais não são certos ou errados, nem completos ou incompletos. A preparação de um mapa conceitual é um processo iterativo, começando com um esboço preliminar que passa por refinamentos sucessivos. Em termos do modelo cognitivo, o que acontece durante a elaboração de um mapa conceitual é que estamos explorando caminhos nos esquemas de nossa memória de longo prazo e procurando representá-los

graficamente. Ao observar um diagrama desse tipo, descobrimos novas formas de organizar e ligar conceitos. Quando modificamos o diagrama, criamos novos conhecimentos que são introduzidos em nossa memória e estimulam a mente a buscar novos caminhos para informações correlatas, caminhos esses que, por sua vez, são acrescentados ao diagrama. O processo é quase mágico; depois de começar, é impossível impedir a mente de buscar novas ideias! Quando você para de desenhar, tem nas mãos não só um diagrama que representa suas ideias, mas uma base de conhecimentos maior na sua mente.

O primeiro passo para construir um mapa conceitual é identificar o domínio, propondo uma questão. Para aprender a desenhar mapas conceituais, é uma boa ideia começar com domínios familiares. Considere, por exemplo, o domínio associado à pergunta: “O que é um carro?”

Depois de identificar o domínio, você está pronto para começar a desenhar. Como o mapa estará sujeito a várias revisões, escolha um sistema que permita fazer alterações com facilidade. Um quadro branco, por exemplo, é uma opção melhor que papel e caneta. Outro método é escrever os conceitos em papéis adesivos e grudá-los em uma folha de papelão. Um método ainda melhor é usar um programa de computador para desenhar, ou mesmo um programa especial para mapas conceituais.

Uma vez que os instrumentos de desenho estejam à mão, comece a introduzir conceitos no mapa. Comece pelo cerne do domínio, um “carro”, no caso, e acrescente os primeiros dez conceitos que lhe ocorrerem. Cada conceito deve envolver apenas uma palavra ou, no máximo, duas; se for preciso mais que isso para expressar uma ideia, é porque se trata de uma ideia complexa que pode ser dividida em vários conceitos, ou substituída por um conceito mais geral. A Figura 2.11 mostra um conjunto inicial de conceitos.

Figura 2.11 Conjunto inicial de conceitos para um mapa conceitual visando responder à pergunta “O que é um carro?”

Depois de formar o conjunto inicial de conceitos, o passo seguinte consiste em ligá-los através de relações. Como no caso dos conceitos, as relações devem ser descritas por um número pequeno de palavras. A Figura 2.12 mostra uma primeira versão do mapa conceitual com relações. Este mapa pode ser um começo, mas não contribui muito para aumentar nosso conhecimento a respeito dos carros. Embora todos os conceitos representados estejam relacionados ao conceito central de “carro”, não há nenhuma indicação de como estão relacionados entre si. Explicitando essas relações, chegamos a um melhor entendimento do que “é” um carro e como funciona. Além disso, em termos do nosso modelo cognitivo, o mapa conceitual da Figura 2.12 agrupa todos os conceitos em um grande pedaço, que pode ser difícil de buscar na memória de longo prazo porque excede a capacidade da memória de curto prazo.

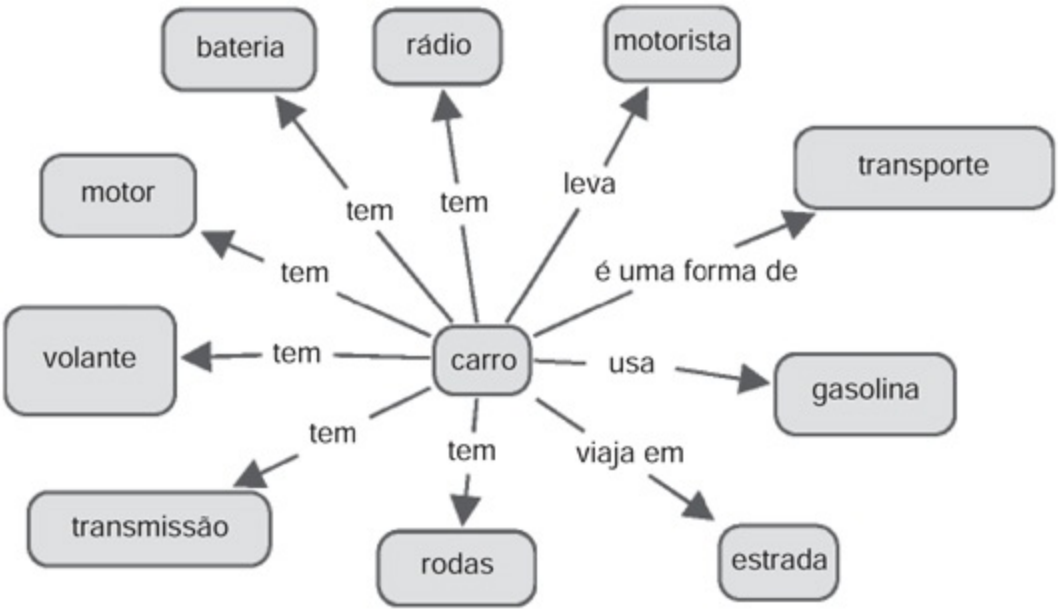


Figura 2.12 Uma versão do mapa conceitual de “O que é um carro?” que agrupa todos os conceitos em um grande pedaço.

Antes de mostrar um modo mais adequado de organizar o mapa conceitual de “O que é um carro?”, vamos dar uma olhada em outro mapa problemático, ilustrado na Figura 2.13. Neste caso, os conceitos estão dispostos em linha. Cada conceito, com exceção para os das extremidades, está ligado a dois outros conceitos; o problema desse tipo de mapa é que, para explicar a relação entre um conceito que está perto do início da linha e um conceito que está perto do final, precisamos seguir um caminho muito longo. Para ter uma ideia do problema que isto representa, observe a Figura 2.13 por 20 segundos e verifique de quantos conceitos você consegue se lembrar. Em termos do modelo cognitivo, os conceitos ainda formam um pedaço muito grande, com 11 conceitos e 10 relações, o que representa um total de 21 itens, muito mais que a memória de curto prazo é capaz de comportar.

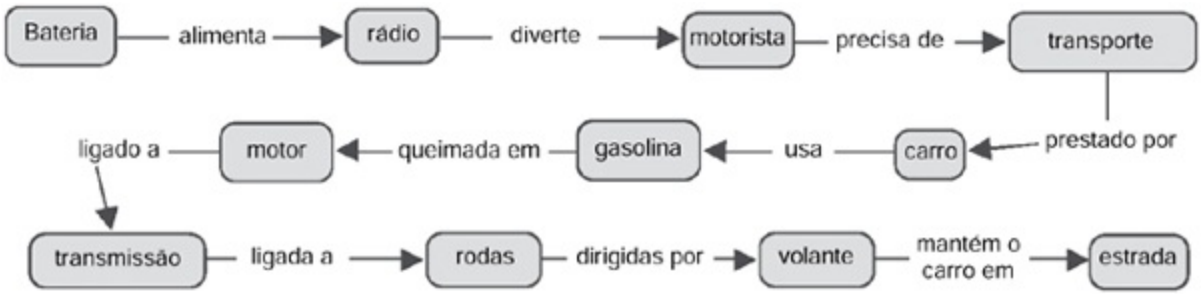


Figura 2.13 Uma versão do mapa conceitual de "O que é um carro?" que dispõe os conceitos em linha.

Para construir um mapa conceitual adequado (ou seja, *fácil de lembrar*), é preciso chegar a uma solução de compromisso entre os mapas das Figuras 2.12 e 2.13, dividindo o mapa em pedaços de tamanho razoável. De acordo com o modelo cognitivo, esse tamanho razoável é de cinco a nove itens, entre conceitos e relações. Para atingir nosso objetivo, procuramos conceitos que reúnam pequenos grupos de conceitos. Na maioria dos casos, isso requer a *introdução* de novos conceitos no mapa. A Figura 2.14 mostra uma versão do mapa conceitual de "O que é um carro?" organizada desta forma. Foram acrescentados ao mapa três novos conceitos: "compartimento dos passageiros", "sistema de propulsão" e "sistema elétrico". Cada um desses conceitos envolve um pedaço de conhecimento relativamente pequeno. Também foram usadas *relações plurais*, desenhadas como setas que se dividem em duas ou mais setas. Essas relações plurais servem para agrupar relações do mesmo tipo, aumentando a capacidade de um pedaço. Os cinco pedaços em que o mapa da Figura 2.14 pode ser dividido estão representados por linhas tracejadas. O pedaço central é formado pelo conceito de "carro", seus três subsistemas e seu objetivo, "transporte". Pedaços periféricos ligados ao pedaço central descrevem os subsistemas de um carro e sua finalidade.

Embora o mapa da Figura 2.14 tenha mais conceitos que os mapas das Figuras 2.12 e 2.13, é mais fácil de memorizar que os primeiros. Repita o experimento anterior examinando o mapa por 20 segundos e

verificando quantos conceitos você consegue lembrar. Mesmo que você não seja capaz de reproduzir perfeitamente o mapa, certamente conseguirá *reconstruir* as ideias principais que estão por trás dos pedaços de informação e as relações entre eles, que é o que realmente importa. Isso significa que você realmente *aprendeu* os conceitos representados no mapa, ligando-os a esquemas internos, em vez de simplesmente *memorizar* uma lista de fatos isolados. Entre as diferenças entre o mapa que você reproduziu, de memória, e o mapa da Figura 2.14 pode estar a inclusão do conceito "rádio" no sistema elétrico e não na "cabina". Essas diferenças podem ajudá-lo a compreender o que é um carro. Lembre-se de que o mesmo fenômeno foi discutido na Seção 2.1.2, quando falamos da memorização de listas de palavras.

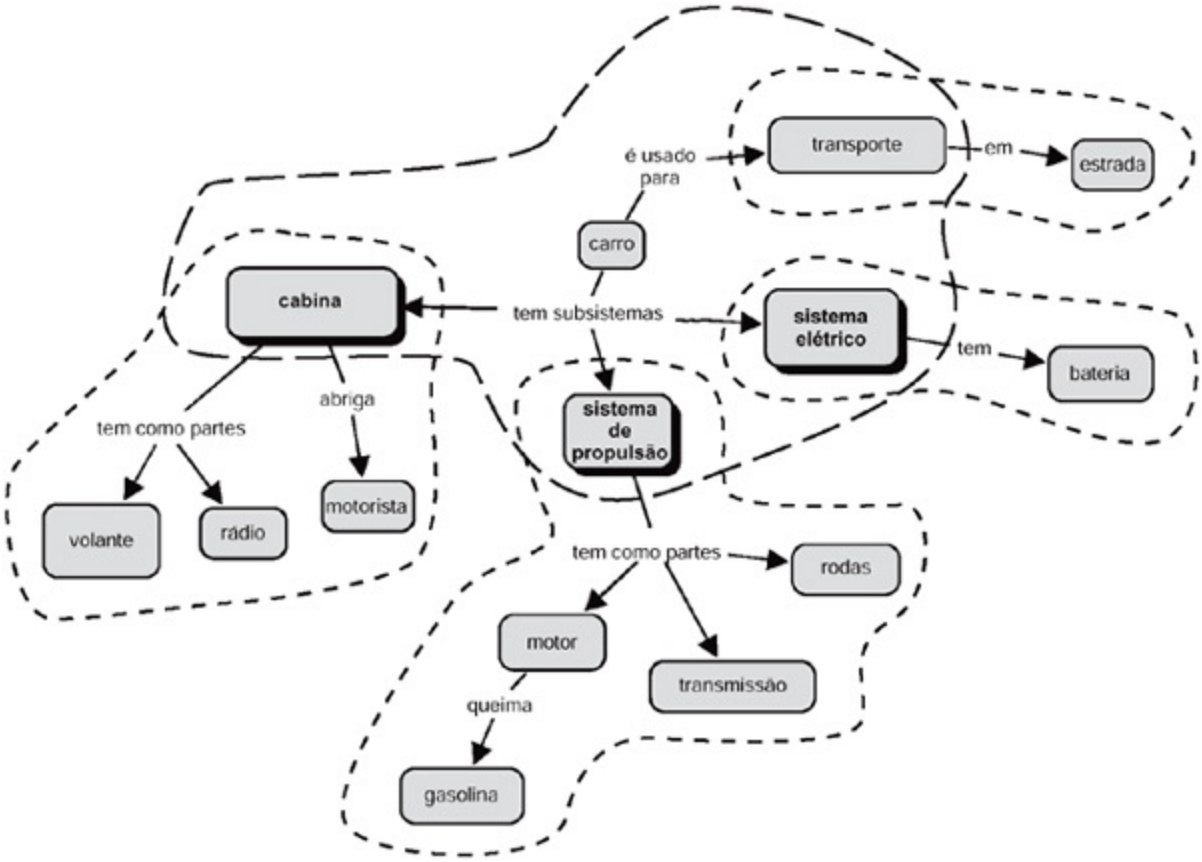


Figura 2.14 Esta versão do mapa conceitual de "O que é um carro?" pode ser facilmente dividida em pedaços menores, mostrados por linhas tracejadas. Os três

conceitos em negrito, acrescentados ao mapa, dão nome aos pedaços.

O passo final na construção de um mapa conceitual consiste em buscar *ligações cruzadas* entre conceitos do mesmo pedaço ou de pedaços diferentes. Este passo leva a uma compreensão ainda mais completa do domínio. Assim, por exemplo, o rádio, que está na cabina, também faz parte do sistema elétrico e é alimentado pela bateria. Da mesma forma, podemos descobrir ligações entre o sistema elétrico e o sistema de propulsão. Depois de refletir um pouco, talvez você se lembre de que alguns carros são movidos por motores elétricos, mas também existem ligações entre o sistema de propulsão e o sistema elétrico em carros com motor a gasolina. A questão é a seguinte: Como descobrir essas ligações adicionais? Uma abordagem que recomendamos enfaticamente é usar uma mistura de tempestade cerebral e pesquisa. Uma das melhores maneiras de pesquisar relações é usar um site de busca da Internet. Assim, por exemplo, se você entrar com a expressão “bateria de automóvel” ou com a lista de palavras “carro motor bateria gasolina”, encontrará referências a muitos sites que explicam o funcionamento de componentes como o alternador, que usa a força do motor para carregar a bateria, as velas, que usam uma centelha elétrica para inflamar a gasolina, e o distribuidor, que sincroniza a ignição com o movimento dos pistões. As ligações cruzadas também podem ser usadas para explicar detalhes de funcionamento dentro de um pedaço. Assim, por exemplo, no sistema de propulsão, a embreagem acopla o motor à transmissão. A Figura 2.15 mostra uma versão do mapa conceitual de “O que é um carro?” com ligações cruzadas. Um dos efeitos de acrescentar ligações cruzadas é que o número de ligações entre os conceitos aumenta e os pedaços iniciais se tornam menos evidentes. Para ressaltar os conceitos mais importantes, eles aparecem em corpo maior na figura. O mapa conceitual se expande a partir do conceito central de “O que é um carro?” à medida que você inclui novos conceitos, define novas relações e, o que é mais importante, adquire novos conhecimentos.

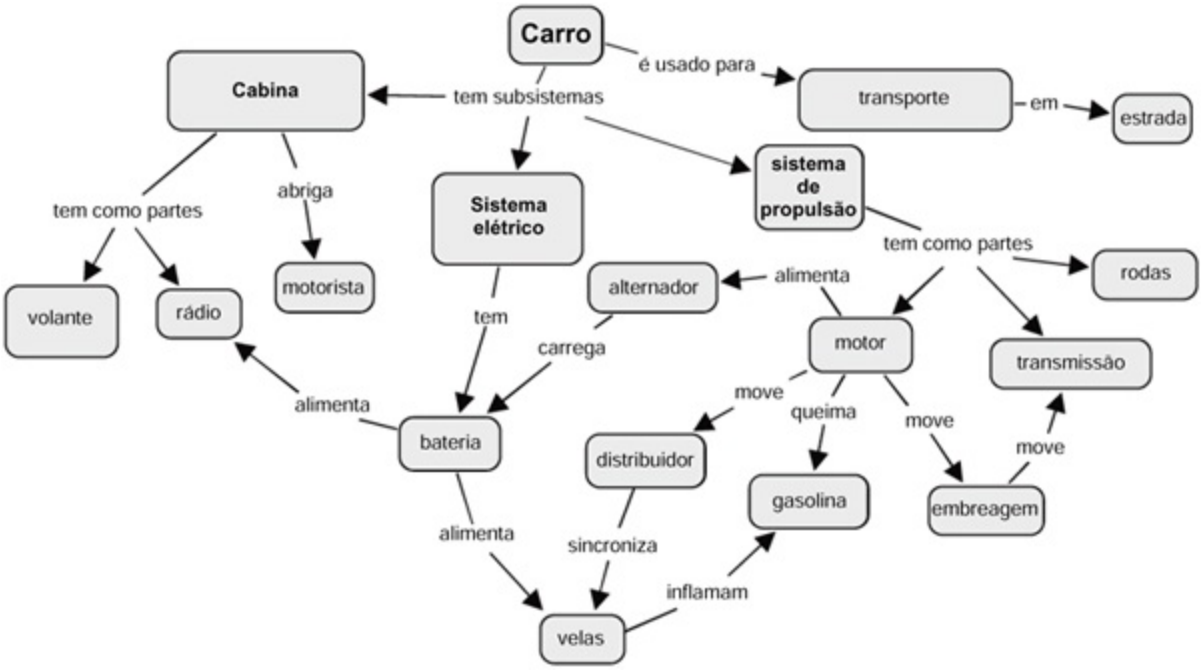


Figura 2.15 Mapa conceitual de “O que é um carro?” com ligações cruzadas.

2.2.3 Hierarquias

Ao explicar como se desenha um mapa conceitual, observamos que algumas formas de organizar o mapa refletem melhor a estrutura do sistema e são mais fáceis de lembrar. Em termos do modelo cognitivo, os melhores mapas são os que permitem transferir pedaços de informação de tamanho razoável da memória de longo prazo para a memória de curto prazo quando estudamos o sistema. Vimos que um conceito central ligado a uns poucos conceitos secundários é uma organização particularmente eficaz. Os conceitos secundários, por sua vez, podem ser ligados a uns poucos conceitos terciários, e assim por diante; organizações desse tipo são chamadas de *hierarquias*. A organização hierárquica é um dos conceitos mais importantes para o projeto e análise de sistemas, e a capacidade de organizar informações ou decompor problemas em uma estrutura hierárquica é uma das habilidades mais úteis que um estudante de engenharia pode adquirir.

O mapa de uma organização hierárquica é um grafo de forma

característica chamado *árvore*, ilustrado de duas formas na Figura 2.16. O grafo da esquerda tem forma de “aranha” ou de “floco de neve”, enquanto o da direita tem forma de “árvore clássica”. A terminologia das árvores é um festival de metáforas. Todo grafo tem um nó principal, que recebe o nome de *raiz*. Na forma de aranha, a raiz fica no meio; na forma de árvore clássica (que, na verdade, se assemelha a uma árvore de cabeça para baixo), a raiz fica no alto. Cada nó de uma árvore pode ser um *nó interno* ou uma *folha*. Todo nó interno tem um ou mais *filhos*, ligados a ele por arestas, e é chamado de *pai* desses filhos. Uma *folha* não tem filhos. Na forma de aranha, os filhos ficam em torno dos pais; na forma de árvore clássica, os filhos ficam abaixo dos pais.

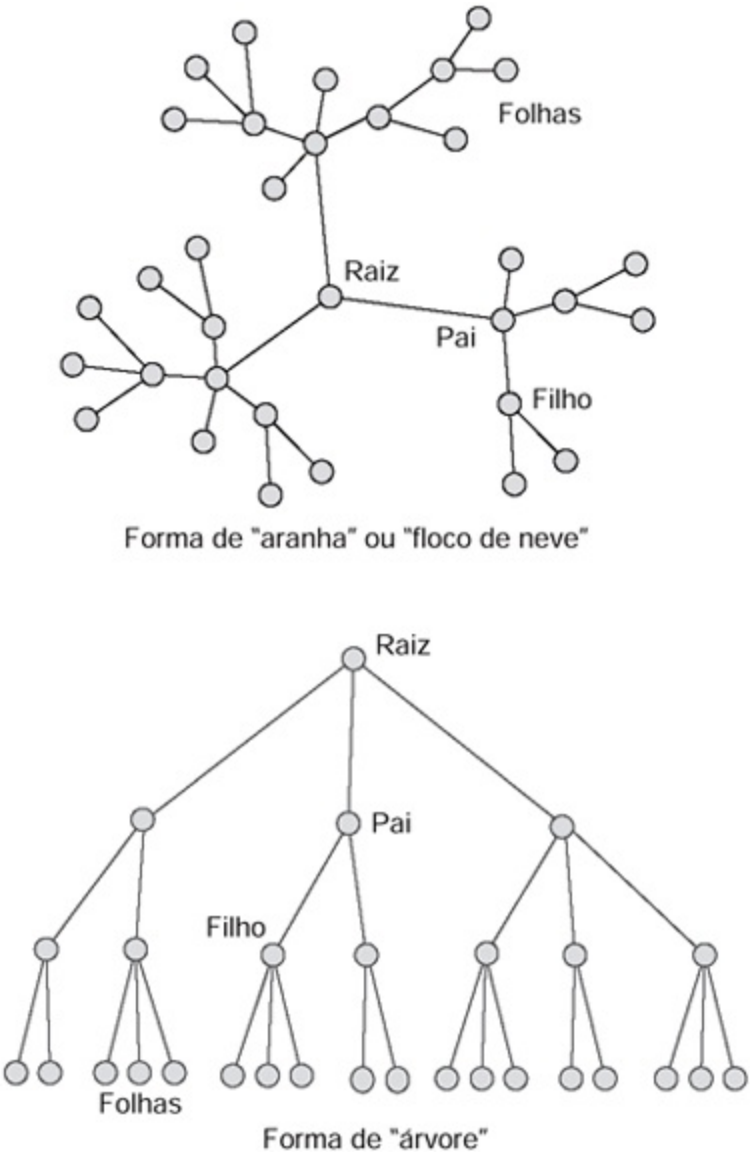


Figura 2.16 A forma característica de um mapa de organização hierárquica é um grafo denominado *árvore*.

Quando nos deslocamos ao longo de uma árvore em direção às folhas, passamos de conceitos gerais para conceitos mais específicos; cada pai é, de certa forma, uma generalização dos filhos. Os conceitos próximos da raiz são chamados de *conceitos de alto nível*, enquanto os conceitos afastados da raiz são chamados de *conceitos de baixo nível*; isto está de acordo com a posição que eles ocupam na forma de árvore clássica.

Hierarquia de Partes *Hierarquia de partes* é um mapa conceitual hierárquico que mostra um objeto complexo como sendo composto por uma série de partes; cada uma dessas partes pode ser composta por uma série de partes menores. Uma relação chamada “contém”, “tem” ou “tem como parte”, dirigida do pai para o filho, expressa a ideia de que um conceito filho é parte de um conceito pai. Também é possível usar uma relação “é parte de” dirigida do filho para o pai. Já encontramos a relação “tem como parte” no mapa conceitual de “O que é um carro?” nas Figuras 2.12 a 2.15, onde, por exemplo, o sistema de propulsão “tem como partes” o motor e a transmissão. Observe que os conceitos de uma hierarquia de partes podem representar objetos concretos ou ideias abstratas. Assim como um objeto concreto, como uma bicicleta, tem guidom e rodas, uma história tem trama e cenário; e um problema de um livro de engenharia tem resposta e dados. A Figura 2.17 mostra uma hierarquia dos Estados Unidos, do nível de país ao nível de condado.

Em uma hierarquia estrita, que pode ser representada por uma árvore, cada nó tem um e apenas um pai, exceto no caso da raiz, que não possui um pai. Muitas vezes, porém, é conveniente pensar em um conceito como parte de duas coisas diferentes. Em um carro, por exemplo, o motor de arranque pode ser visto como parte do sistema de propulsão, mas também como parte do sistema elétrico. A Figura 2.18 mostra um mapa conceitual que ilustra esta situação. Chamamos um mapa como este de hierarquia por partes, mas o grafo não pode ser considerado uma árvore porque o nó “motor de arranque” tem duas setas apontando para ele e, portanto, possui *dois* pais.

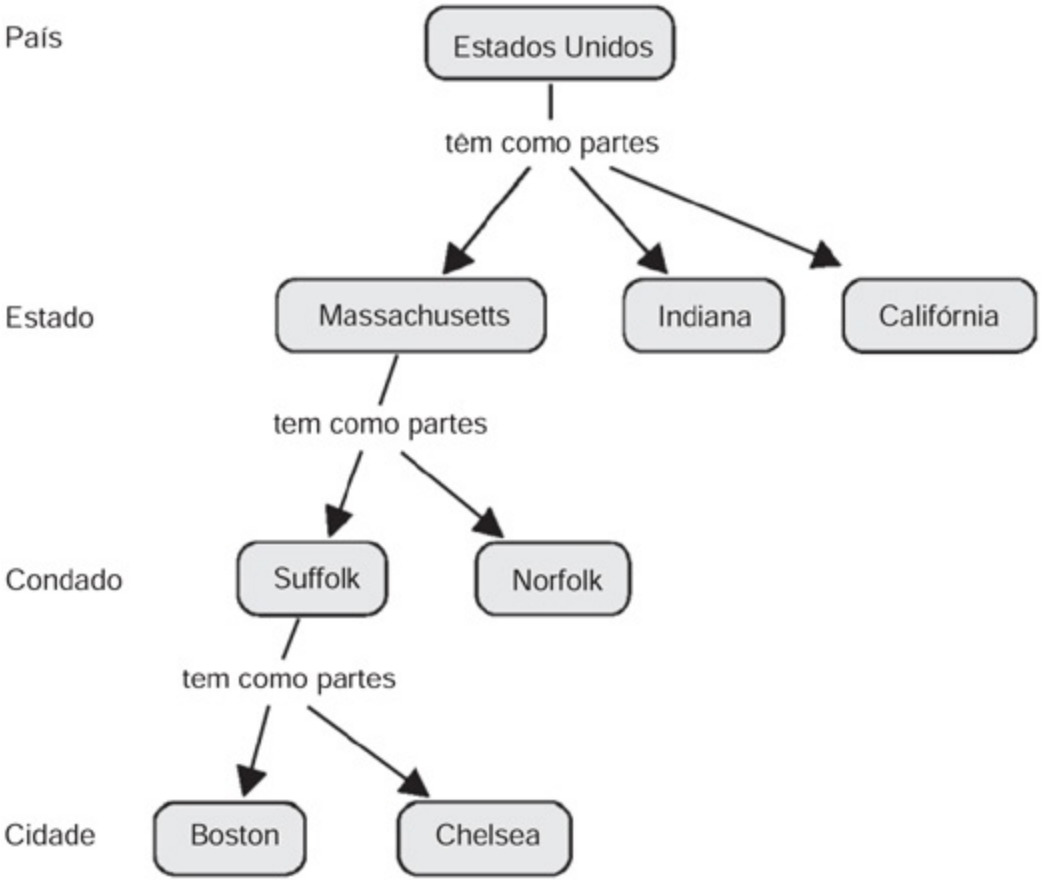


Figura 2.17 Uma hierarquia de partes mostrando partes dos Estados Unidos, do nível de país até o nível de condado.

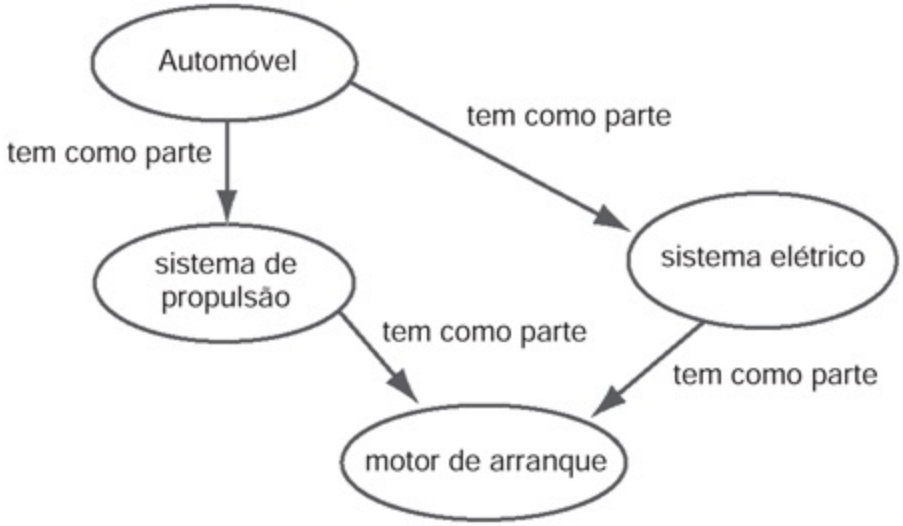


Figura 2.18 O motor de arranque pertence tanto ao sistema de propulsão como ao sistema elétrico de um automóvel. Este grafo não é uma árvore porque o nó "motor de arranque" tem dois pais, mas representa uma hierarquia.

Hierarquia de Classes Um método importante que as pessoas usam para compreender e organizar ideias é dividir os conceitos em classes. Uma *classe* pode ser definida como um conjunto de conceitos que possuem certos atributos ou propriedades em comum. Uma *hierarquia de classes*, também chamada de *taxonomia*, é uma hierarquia na qual classes mais gerais de conceitos são divididas sucessivamente em classes mais específicas. Em uma taxonomia, os nós filhos *herdam* atributos dos pais, o que significa que os filhos possuem todos os atributos dos pais, embora possam possuir também atributos próprios. A Figura 2.19 mostra duas formas de expressar relações de herança. Uma hierarquia de classes particularmente famosa é a taxonomia dos seres vivos criada pelo biólogo sueco Carl von Linné, mais conhecido como Lineu, em meados do século XVIII. A Figura 2.20 mostra uma parte da taxonomia de Lineu.

No grafo da Figura 2.20, as arestas rotuladas como "é um(a)" representam relações de herança. Assim, um animal é um ser vivo, um cão é um canino e, portanto, graças à herança de atributos, um cão, além de ser um canino, também é um animal e um ser vivo. As classes que ficam mais alto na hierarquia são consideradas mais *abstratas*. O Dicionário Aurélio – Século XXI define *abstrato* da seguinte forma:

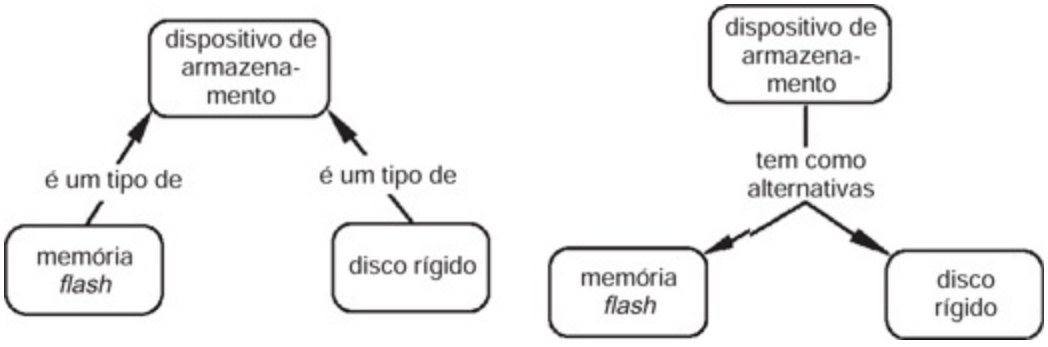


Figura 2.19 Formas de expressar o fato de que a memória *flash* e o disco rígido pertencem à classe de dispositivos de armazenamento.

abstrato *Adj*. *5*. Diz-se da representação à qual não corresponde

nenhum dado sensorial ou concreto, *i. e.*, daquela que apresenta seus objetos sem características individuadoras.

As classes que ficam mais abaixo na hierarquia são mais *concretas*, ou seja, têm mais substância. Uma *instância* é um exemplo concreto de um objeto pertencente a uma classe. Assim, por exemplo, "ser vivo" é uma descrição muito abstrata da instância "Lineu", enquanto "ser humano" é uma classificação mais concreta.

Na taxonomia de Lineu, como na maioria das taxonomias usadas em vários ramos das ciências naturais, a classificação se baseia na *forma* dos objetos, ou seja, em atributos como seu aspecto ou composição. Por outro lado, quando classificamos os objetos artificiais, em geral é mais conveniente classificá-los de acordo com a *função*. Nas lojas de ferragens, por exemplo, os produtos não estão divididos em "objetos de metal" e "objetos de plástico", e sim em canos, ferramentas, e componentes elétricos.

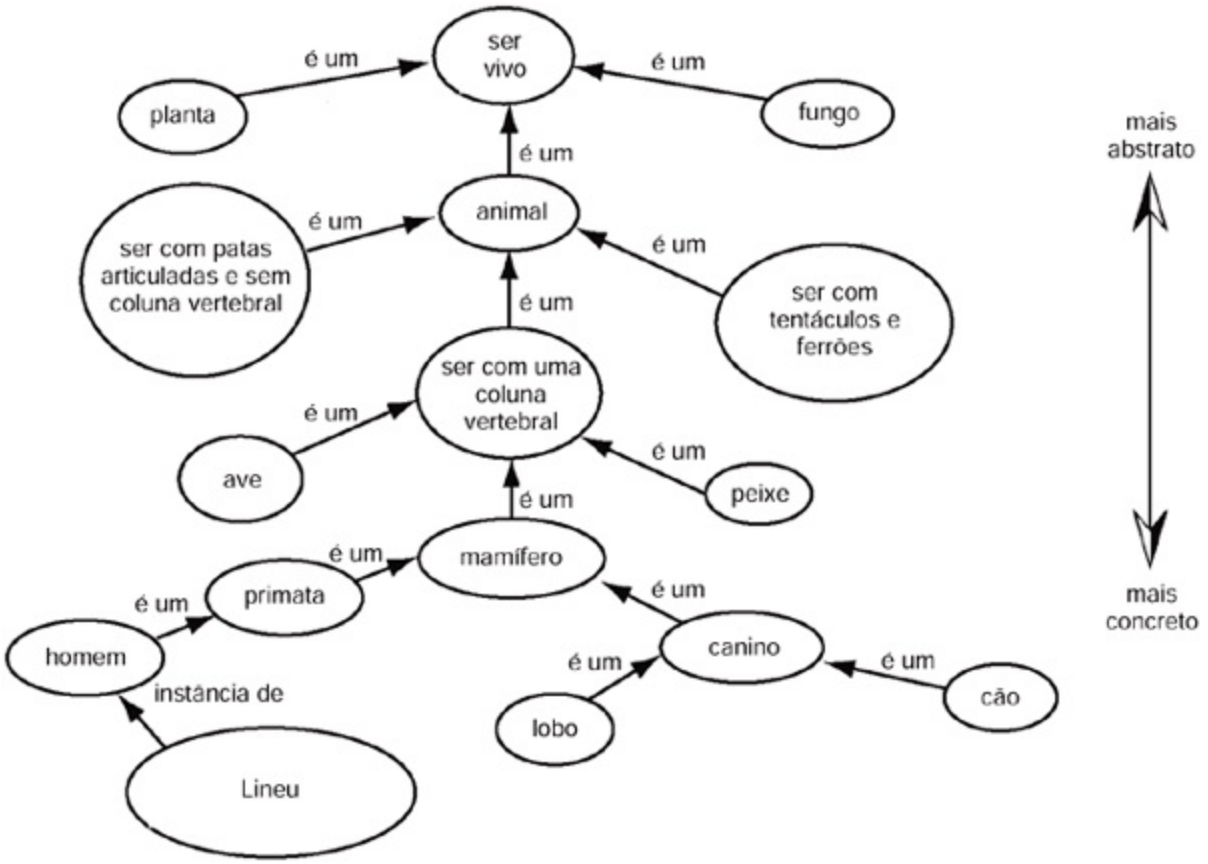


Figura 2.20 Taxonomia de seres vivos proposta por Lineu. As arestas rotuladas como “é um(a)” representam relações de herança entre classes.

2.3 REPRESENTAÇÃO E PROJETO

A Figura 2.21 é uma fotografia do quadro *A Traição das Imagens*, pintado por René Magritte em 1929, que mostra o desenho de um cachimbo. Abaixo do cachimbo está a frase em francês “Ceci n’est pas une pipe”, que significa “Isto não é um cachimbo”. Neste paradoxo, Magritte convida o espectador a meditar a respeito do que torna um “cachimbo” um “cachimbo”. O pintor surrealista talvez ficasse surpreso ao descobrir que os pragmáticos engenheiros se fazem constantemente perguntas semelhantes e, além disso, encontraram uma forma perfeitamente natural de respondê-las.

Figura 2.21 René Magritte, *A Traição das Imagens* (“Isto Não É um Cachimbo”), 1928-1929, copyright Los Angeles County Museum of Art.

Para entender de que forma os engenheiros respondem a esta pergunta, começamos por observar que os produtos não têm apenas uma forma, mas também uma *função*. Se um cachimbo é definido

como um utensílio “para fumar tabaco”, um objeto só pode ser considerado um cachimbo se for possível usá-lo para fumar tabaco. Embora o objetivo de Magritte fosse dizer que não podemos usar a *imagem* do cachimbo para fumar, também não é possível verificar se o objeto representado pelo desenho que aparece na tela pode ser usado como um cachimbo. Não há meios de saber, por exemplo, se a boquilha é oca. Assim, como engenheiros, não temos razão para duvidar da afirmação de Magritte.

2.3.1 Função, Ambiente e Forma

Como o cachimbo de Magritte ajudou a ilustrar, todos os produtos têm uma forma e uma função; além disso, para que um produto seja legítimo, sua forma deve ser apropriada para sua função. Quando os engenheiros precisam avaliar se uma certa forma é apropriada para um produto, eles abordam o problema de dois pontos de vista diferentes, como mostra a Figura 2.22. O primeiro ponto de vista leva em conta o *ambiente operacional* no qual o produto será usado; o segundo, o *ambiente de engenharia* no qual será produzido. O trio constituído por função, forma e ambiente, e o modo como se relacionam à aceitabilidade de um produto constituem um dos princípios básicos da visão do engenheiro.

Do ponto de vista do usuário, um produto foi projetado adequadamente se desempenha sua função a contento no ambiente operacional. O *ambiente operacional* engloba todas as características do local onde o produto é usado e inclui fenômenos naturais e artificiais, entre eles os seguintes:

- os efeitos do meio ambiente, como temperatura, umidade, gravidade e radiação;
- as condições socioeconômicas, como financiamentos, códigos de construção, normas ambientais, normas de fabricação e operação, e hábitos e costumes locais;

o modo como as pessoas interagem com o produto; por exemplo, a forma como operam e consertam o produto;
- o modo como outros produtos podem interagir com ele; por exemplo, o motor e a transmissão de um automóvel.

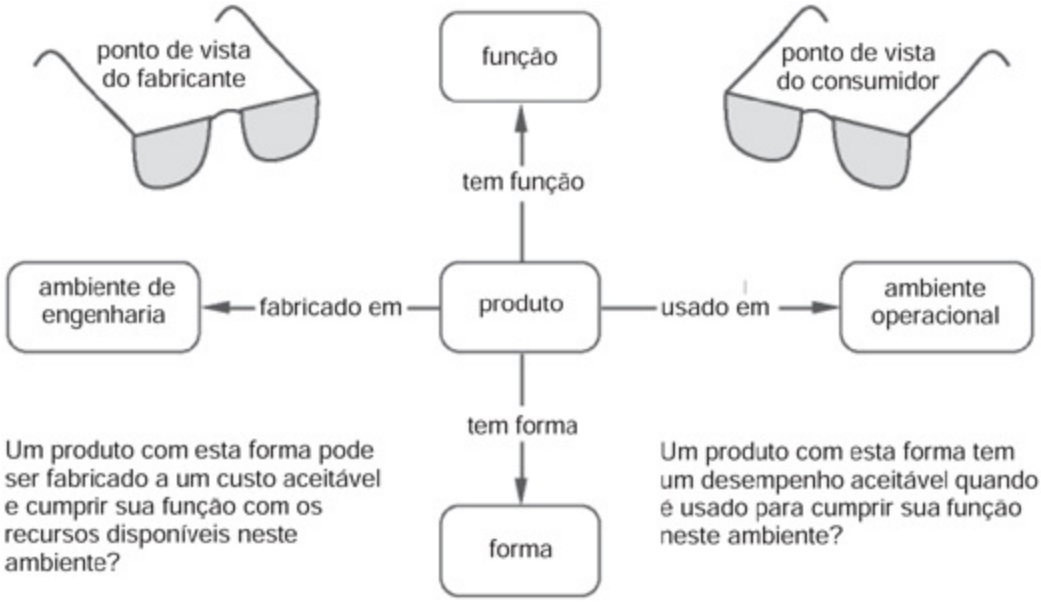


Figura 2.22 Na "visão do engenheiro", a aceitabilidade de um produto depende da função, da forma e dos ambientes em que é produzido e em que será usado.

Do ponto de vista do fabricante, um produto foi projetado adequadamente se pode ser fabricado por um custo aceitável, dados os recursos disponíveis no ambiente de engenharia. O *ambiente de engenharia* representa a organização completa que desenvolve e fabrica um produto, juntamente com todos os recursos de que dispõe, entre eles os seguintes:

- as pessoas envolvidas no projeto e fabricação do produto;
- as ferramentas e métodos usados no projeto;
- os materiais e tecnologia disponíveis;
- as fábricas e meios de produção.

Ao preparar um projeto, os engenheiros devem avaliar a forma do produto, dos dois pontos de vista, para assegurar que é aceitável tanto

no ambiente operacional como no ambiente de engenharia. Para ilustrar a relação entre função, forma, ambiente e aceitabilidade, vamos tomar o relógio como exemplo. Como afirma Simon, no livro *The Sciences of the Artificial/As Ciências do Artificial* [Sim96], a função de um relógio é "informar as horas". Ao longo dos tempos, as pessoas projetaram várias formas de relógios, e tipos de relógios que são aceitáveis em alguns ambientes e podem ser inaceitáveis em outros.

O Relógio Solar Como primeiro exemplo, considere o objeto da Figura 2.23. Trata-se de um relógio? Para um engenheiro, a pergunta pode ser expressa da seguinte forma: "Esta forma atende à função de informar as horas?" A resposta depende de vários fatores, como a precisão que se deseja e o lugar onde o objeto foi instalado. Como observa Simon, um relógio solar poderia funcionar satisfatoriamente a maior parte do dia em uma cidade ensolarada como Phoenix, mas teria menos utilidade em Seattle, e deixaria de trabalhar à noite [Sim96]. Do ponto de vista do fabricante, um relógio solar pode ser produzido com ferramentas rudimentares, pode ser calibrado apenas com uma bússola e, uma vez instalado, mostra a hora correta durante séculos!

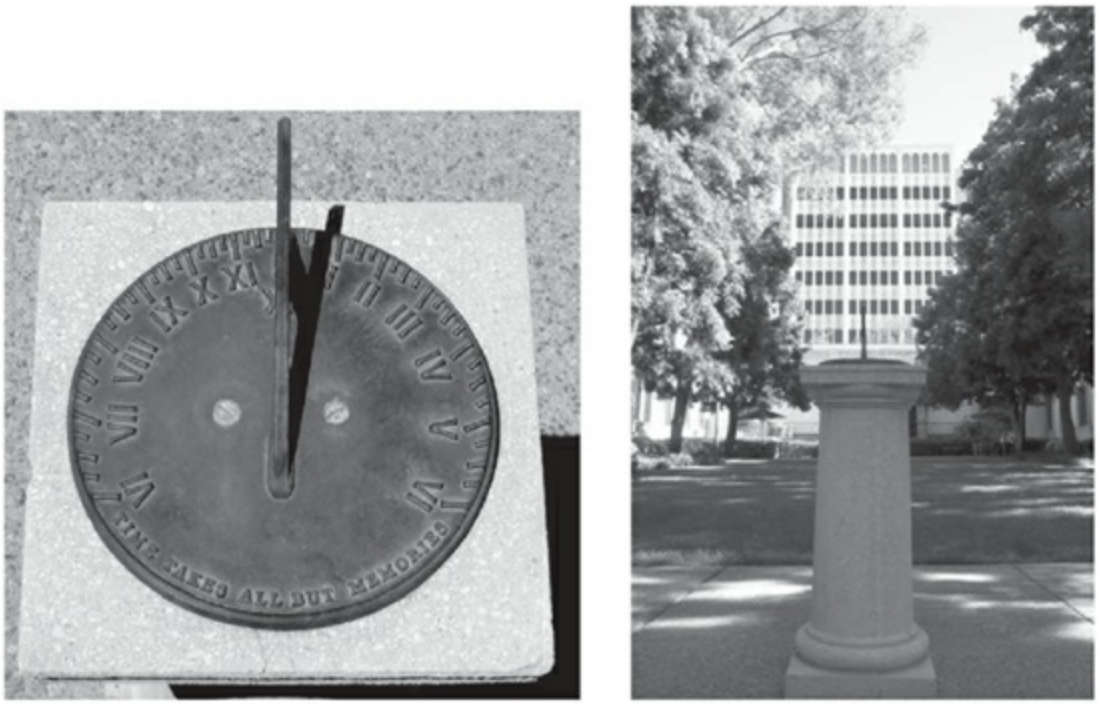


Figura 2.23 Isto é um relógio? Os relógios solares só mostram a hora quando o sol está visível. O relógio solar da foto, que fica no campo no Caltech, na ensolarada Califórnia, está cercado por árvores e passa o tempo todo na sombra, exceto por umas poucas horas no meio do dia.

O Cronômetro para Navios No século XVIII, um dos maiores desafios para os engenheiros era determinar a longitude de um navio no mar. O problema de navios perdidos tornou-se tão sério que, em 1714, o governo inglês ofereceu um prêmio de 20.000 libras (equivalente a 6 milhões de dólares de hoje) à primeira pessoa a descobrir um método para determinar a longitude de um navio com precisão de meio grau, que seria testado por um navio,

> … atravessando o oceano, da Grã-Bretanha a um porto das Índias Ocidentais escolhido pelos juízes… sem perder a longitude além dos limites já mencionados… avaliado e considerado prático e útil no mar.[1]

Teoricamente, a longitude é fácil de calcular. Como 15 graus de longitude equivalem a uma hora de diferença, uma simples regra de três permite obter a longitude a partir do tempo local do navio e do tempo local em um ponto de referência (a cidade de Greenwich, por

exemplo). O tempo local do navio podia ser medido por um navegador a partir da posição do sol; o problema estava em manter um registro da hora local no porto de origem com uma precisão de mais ou menos dois minutos durante uma viagem marítima de dois meses.

Foi aí que entrou em cena John Harrison, um carpinteiro e relojoeiro inglês. Harrison começou a trabalhar no projeto de um cronômetro para navios em 1730. Em meados de 1720, Harrison havia construído o relógio de pêndulo mais preciso da Inglaterra, que não adiantava ou atrasava mais que um segundo por mês, mas o relógio não funcionava em navios por causa do ambiente em que teria que trabalhar, ou, mais especificamente, por causa do balanço do navio e das variações de temperatura e umidade. Em 1765, 35 anos depois da primeira tentativa, Harrison recebeu a primeira metade do prêmio por haver construído um relógio capaz de mostrar a hora com um erro de apenas 39,2 segundos após uma viagem de 47 dias entre a Inglaterra e a Jamaica. Ele recebeu o resto do prêmio em 1773, com 80 anos, depois que a Comissão de Longitude finalmente se convenceu de que os resultados não eram fortuitos e que outros relojoeiros podiam reproduzir o relógio que Harrison havia projetado.

Um dos aspectos mais interessantes dos esforços de Harrison (além, é claro, de sua persistência inabalável) são as inovações introduzidas por ele, que não só tornaram possível a construção de um relógio extremamente preciso, mas também contribuíram para o aperfeiçoamento de muitos outros tipos de máquinas. Na verdade, as contribuições de Harrison para a pesquisa e desenvolvimento enriqueceram o ambiente de engenharia para as gerações de engenheiros que o sucederam. Uma de suas invenções, por exemplo, foi a caixa de rolamentos, precursora dos modernos rolamentos de bolas. Outra invenção, a tira bimetálica, servia para compensar variações de temperatura. A tira bimetálica usada por Harrison era composta por uma tira de aço rebitada a uma tira de latão. Como o

coeficiente de dilatação térmica do latão é maior que o do aço, a tira se enverga na direção do aço quando a temperatura aumenta e na direção do latão quando a tira esfria. Harrison usou esse efeito para ajustar as tensões das molas do seu relógio; hoje em dia, a tira bimetálica é usada em termostatos para ligar e desligar fornos e aparelhos de ar condicionado.

O Relógio de um Telefone Inteligente Finalmente, considere o relógio de um telefone celular/assistente pessoal digital, como o que aparece na Figura 2.24. O ambiente operacional deste relógio é um aparelho eletrônico que contém hardware e software de processamento de dados e comunicação sem fio, e é projetado para ser usado como telefone, agenda e para outras finalidades enquanto o portador atravessa vários fusos horários.

A maioria dos telefones celulares modernos contém um relógio que recebe periodicamente um sinal que o mantém sincronizado com a hora local. Este sinal, por sua vez, se baseia nos sinais transmitidos pelos satélites do sistema de posicionamento global (GPS). Os satélites do sistema GPS contêm relógios atômicos extremamente precisos que usam como referência as oscilações dos elétrons de um isótopo do elemento césio, o césio 133. Na verdade, a partir de 1967, o segundo passou a ser definido, no Sistema Internacional de Pesos e Medidas, como o tempo correspondente a 9.192.631.770 oscilações do átomo de césio 133. Entretanto, um telefone celular não pode usar o sinal de GPS para sincronizar o relógio, se estiver fora da área de cobertura da operadora; nesse caso, o usuário terá que ajustar manualmente o relógio quando mudar de fuso horário.

Figura 2.24 Relógio mundial de um telefone inteligente Palm Treo.

2.3.2 Requisitos, Especificações e as Forças que Ajudam a Definir um Produto

Quando estão projetando um produto, os engenheiros reveem continuamente seus parâmetros até que o produto seja aceitável dentro dos ambientes operacional e de engenharia. Uma forma de visualizar esse processo é imaginar a existência de "forças" no ambiente, que obrigam o engenheiro a mudar a forma do produto até que se torne adequada. Como mostra a Figura 2.25, as forças do ambiente operacional modificam os parâmetros do produto até que o *desempenho* seja satisfatório, enquanto as forças do ambiente de engenharia modificam os parâmetros do produto de modo a manter o *custo* dentro de limites aceitáveis. Agindo em conjunto, as duas forças "moldam" o produto, fazendo-o assumir a "forma" definitiva.

Para criar um modelo aceitável, um engenheiro precisa saber em que sentido deve mudar cada parâmetro do produto de modo a torná-lo aceitável. Isso exige que o desempenho real e o desempenho desejado, bem como o custo real e o custo máximo permitido, sejam expressos em termos de grandezas que possam ser medidas e comparadas de forma objetiva. A Figura 2.26 acrescenta essas ideias

ao nosso mapa conceitual anterior. Os valores das metas de desempenho e custo constituem a base de uma espécie de acordo ou contrato entre o fabricante de um produto e o consumidor. Para os consumidores, as metas são *especificações* que informam o que podem esperar do produto em um certo ambiente, enquanto, para o fabricante, as metas são *requisitos* que devem ser atendidos. É evidente que as duas visões das metas devem coincidir para que o produto tenha sucesso.

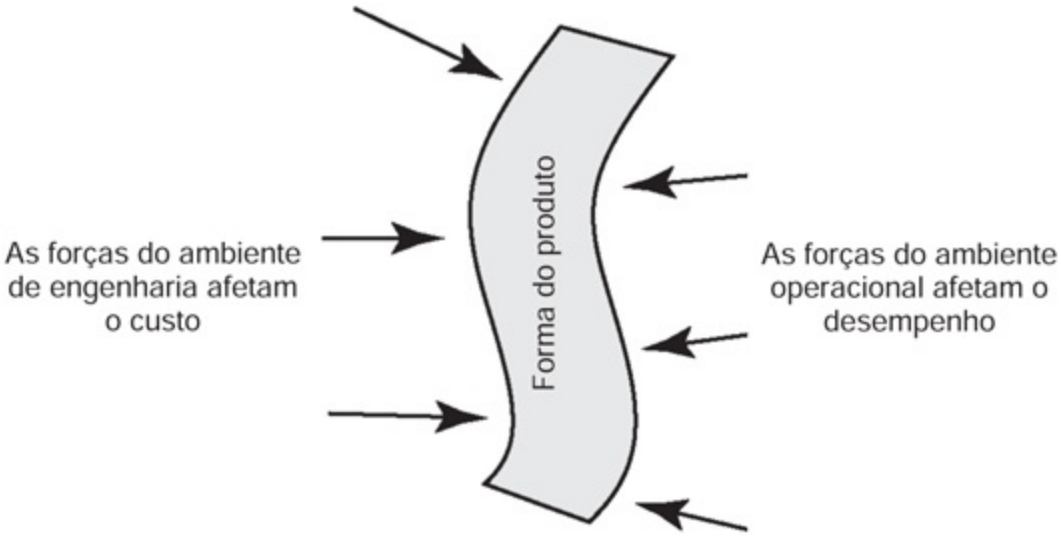


Figura 2.25 Forças a que um produto está submetido.

Restrições e Objetivos Os engenheiros costumam expressar quantitativamente as metas, de duas formas: como restrições e como objetivos. *Restrição* é um limite rígido do valor de um parâmetro, tipicamente expresso através de uma igualdade ou desigualdade matemática. Eis alguns exemplos de restrições nas especificações de um relógio:

- a imprecisão deve ser *menor ou igual* a ± 15 segundos por mês
- deve ser à prova d'água *até* 30 m
- a bateria deve durar *pelo menos* 2 anos

Objetivo é uma meta de minimizar ou maximizar um valor. A

principal diferença entre uma restrição e um objetivo é que, enquanto a violação de uma restrição torna o produto inaceitável, um objetivo indica uma tendência para tornar o produto melhor. Podemos também considerar o objetivo uma "restrição fraca" que é desejável mas não imperativa. Eis alguns exemplos de objetivos no projeto de um relógio:

- o custo de fabricação deve ser o *menor possível*
- deve ser o *mais fino possível*

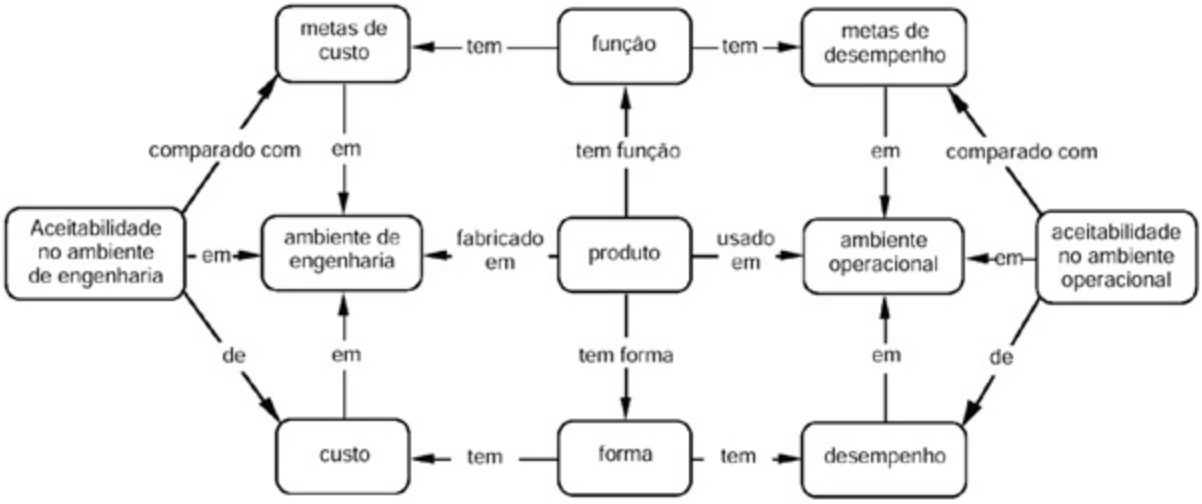


Figura 2.26 Para que um produto seja aceitável, deve atender às metas de custo e desempenho.

O Ambiente como um Molde para um Produto Em *The Sciences of the Artificial*, Simon descreve o ambiente como o "molde" de um produto; em outras palavras, são as restrições do ambiente que determinam a forma final do produto [Sim96]. Assim como um molde tem duas partes, uma "externa" e outra "interna", mostradas na Figura 2.27, o ambiente de projeto tem duas partes: o ambiente operacional e o ambiente de engenharia. Examinando de perto a analogia, formamos uma imagem mental que nos ajuda a compreender melhor a relação entre função, ambiente e forma.

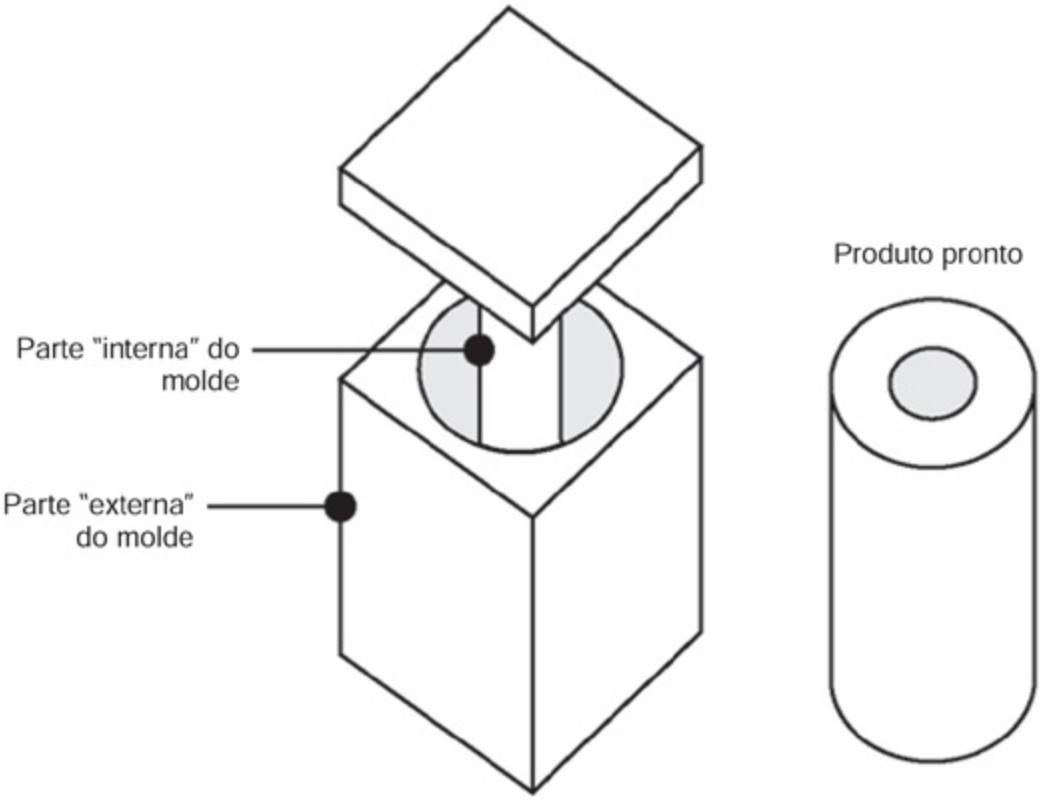


Figura 2.27 As partes interna e externa de um molde.

O Ambiente Operacional como o Ambiente "Externo" Simon considera o ambiente operacional de um produto como ambiente "externo" porque envolve forças alheias à engenharia. A Figura 2.28 mostra uma visão do ambiente operacional como parte externa de um molde. No interior do ambiente operacional existe um "buraco" poligonal, chamado *região aceitável*, cujos lados representam as restrições ao desempenho do produto. O produto em si é desenhado como uma área cuja periferia é o desempenho real. Se o comportamento observado fica totalmente no interior da região de aceitabilidade, definida pelas restrições, o produto é considerado aceitável nesse ambiente operacional; caso contrário, o produto é inaceitável e as partes do comportamento que ultrapassam os limites impostos pelas restrições constituem violações.

Usando o diagrama da Figura 2.28, podemos escolher muitas formas do produto que sejam aceitáveis do ponto de vista do usuário;

muitas outras formas, por outro lado, não serão aceitáveis. Se o objetivo do engenheiro é projetar um produto aceitável do ponto de vista do usuário, ele não precisa criar um produto que atenda exatamente às restrições; o produto precisa apenas *satisfazer* as restrições. Na prática, quando os engenheiros projetam alguma coisa, não tentam chegar ao produto ideal, mas a um produto "suficientemente bom" para satisfazer as restrições.

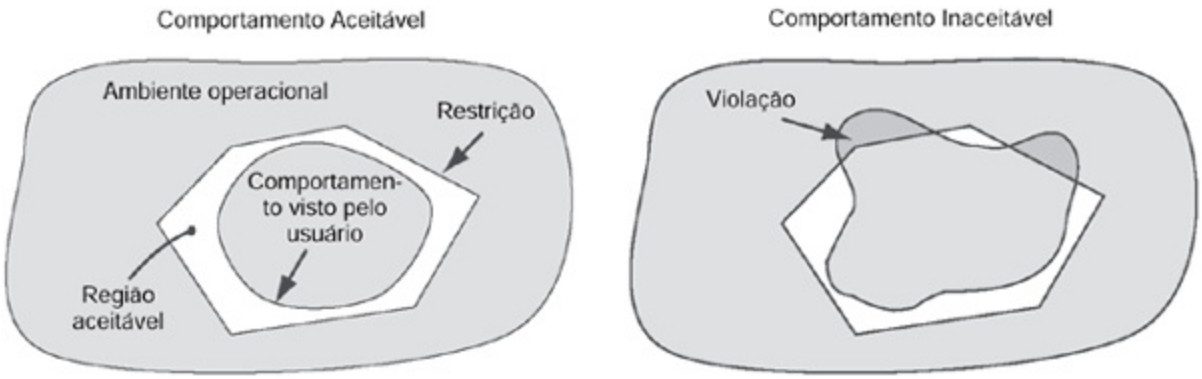


Figura 2.28 Diagrama para visualizar as relações entre um produto, sua forma e seu ambiente operacional ou ambiente "externo".

Os projetos de engenharia fracassam quando os engenheiros têm uma falsa ideia da função de um produto, do ponto de vista do usuário, ou deixam de levar em conta algum aspecto do ambiente operacional. Nos dois casos, o resultado é o mesmo: os engenheiros posicionam erradamente a região de aceitabilidade. A Figura 2.29 ilustra esta situação.

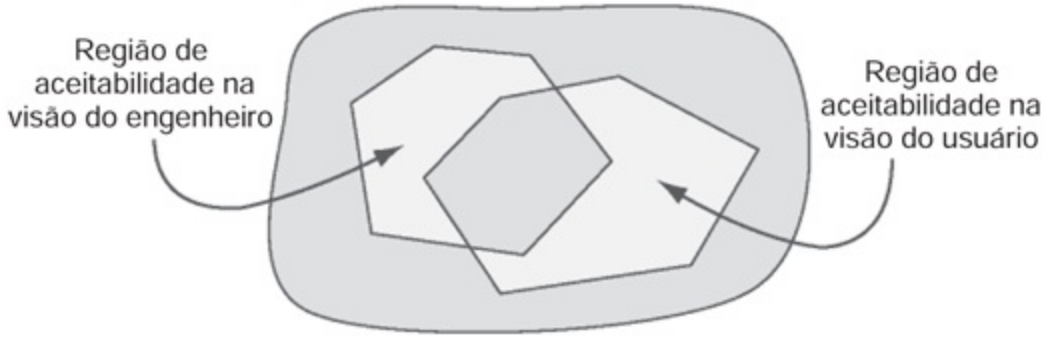


Figura 2.29 Os efeitos de uma visão errônea do que os usuários esperam de um produto ou de uma representação imperfeita do ambiente operacional.

O Ambiente de Engenharia como o Ambiente "Interno" O ambiente de engenharia é formado por todos os recursos disponíveis para projetar e fabricar um produto. As restrições impostas pelo ambiente de engenharia limitam o custo do projeto, medido em termos de gastos financeiros, tempo ou outro parâmetro qualquer. Simon chama o ambiente de engenharia de *ambiente interno* do produto, já que é este ambiente que mantém os recursos sob controle do fabricante.

Na Figura 2.30, o ambiente de engenharia foi acrescentado ao desenho anterior do ambiente operacional como parte "interna" de um molde. Na figura, o ambiente de engenharia (um polígono no interior da região aceitável) limita ainda mais a região aceitável. Cada lado do novo polígono corresponde a uma restrição de custo, assim como cada lado do polígono externo corresponde a uma restrição de desempenho. A região aceitável é agora o espaço entre os dois ambientes. O produto é desenhado como um anel cuja borda interna é o custo e cuja borda externa, como antes, é o desempenho. Para ser aceitável tanto no ambiente operacional como no ambiente de engenharia, o anel deve se encaixar na região de aceitabilidade sem violar nenhuma das restrições.

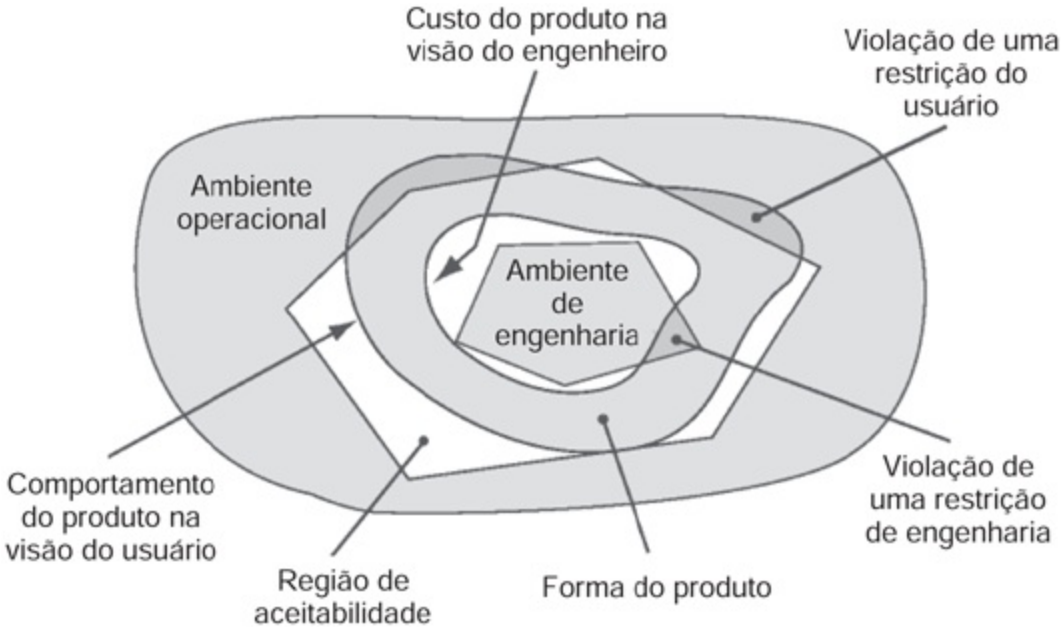


Figura 2.30 O ambiente operacional como *ambiente externo* de um produto e o ambiente de engenharia como *ambiente interno*. O produto deve ser compatível com ambos para ser "aceitável".

2.3.3 Hierarquias de Projeto

O restante deste capítulo será dedicado ao "modo" como, normalmente, o projeto de um produto assume uma forma característica, hierárquica, do tipo "matrioska". Mais especificamente, vamos ver que é possível dividir um projeto em uma hierarquia de projetos menores e que os engenheiros usam tanto uma hierarquia de composição ou de peças como uma hierarquia de abstração ou classificação para chegar ao projeto final. A Figura 2.31 mostra, como exemplo, o seguinte problema:

> Projete um sistema para uma pessoa de 70 kg levantar um peso de 140 kg, do chão, e colocá-lo em uma prateleira a 2 m de altura em um *closet* de 2,5 m de largura por 2,5 m de profundidade.

Talvez o leitor já tenha uma ideia de como resolver o problema, mas vamos examinar as possíveis soluções de forma *sistemática*, usando um método e uma terminologia que podem ser aplicados a problemas mais complexos.

Hierarquia de Decisões Os engenheiros raramente projetam um produto de uma só vez. Em vez disso, fazem vários projetos provisórios, refinando tanto a formulação do problema como sua solução cada vez que executam um novo projeto. Como mostra a Figura 2.32, podemos comparar o processo à descoberta do caminho correto em um labirinto. No início, o projetista conhece apenas um conjunto básico de requisitos, e o objetivo é chegar a um produto acabado que atenda a esses requisitos. À medida que o projetista avança no labirinto, ele determina um número cada vez maior de incógnitas e o projeto se transforma gradualmente, de um conceito abstrato, em uma implementação concreta. A fase inicial do projeto,

que corresponde aos anéis externos da Figura 2.32, é chamada de *conceitualização do projeto*, enquanto a fase final, que corresponde aos anéis internos, recebe o nome de *detalhamento do projeto*.

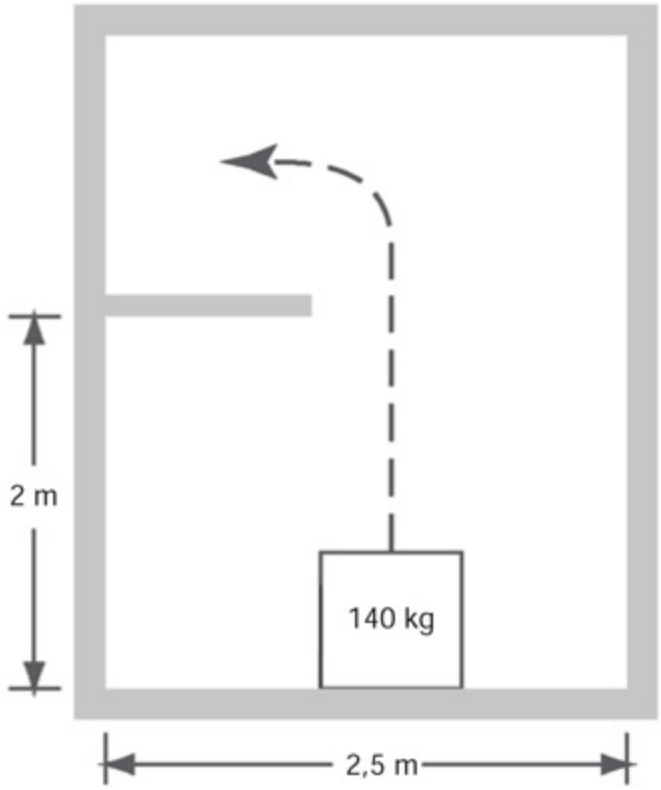


Figura 2.31 Como levantar um peso até uma prateleira.

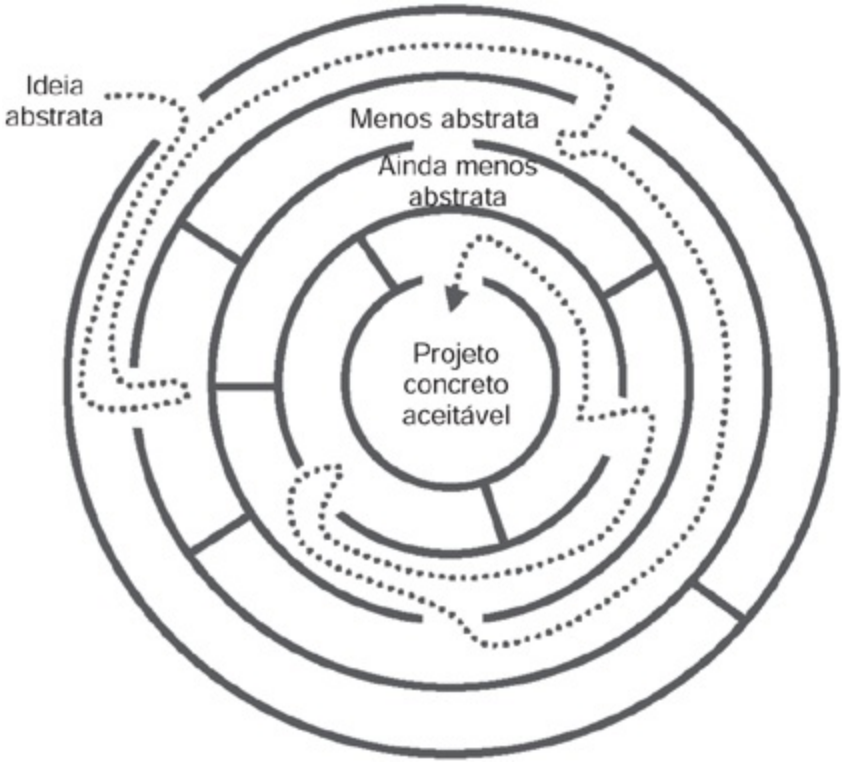


Figura 2.32 Projetar um produto é análogo a descobrir o caminho correto em um labirinto; nos dois casos, para avançar de um nível para outro é preciso tomar a decisão correta.

A Figura 2.33 mostra um mapa conceitual da fase inicial do projeto de um sistema de levantamento. A função do sistema é “levantar um peso até uma prateleira”. Entre as restrições do ambiente operacional estão as dimensões do *closet*, a altura da prateleira e os pesos da carga e do operador. As restrições e objetivos do ambiente de engenharia consistem em usar ferramentas domésticas comuns e minimizar o custo e a complexidade. Para ser considerado aceitável, o projeto deve satisfazer a esses objetivos e restrições.

Enquanto o projetista procura um caminho que conduza da formulação inicial do problema a um projeto final, concreto, ele é forçado a tomar uma série de decisões; cada uma dessas decisões envolve algum aspecto do projeto e limita as escolhas posteriores. Podemos comparar este processo ao de encontrar o caminho correto em uma estrada com uma série de bifurcações, como ilustra a Figura

2.34, onde, a cada bifurcação da estrada, o projetista deve decidir se continua pela estrada da direita ou pela estrada da esquerda. Algumas estradas desembocam em projetos aceitáveis, mas nem todas.

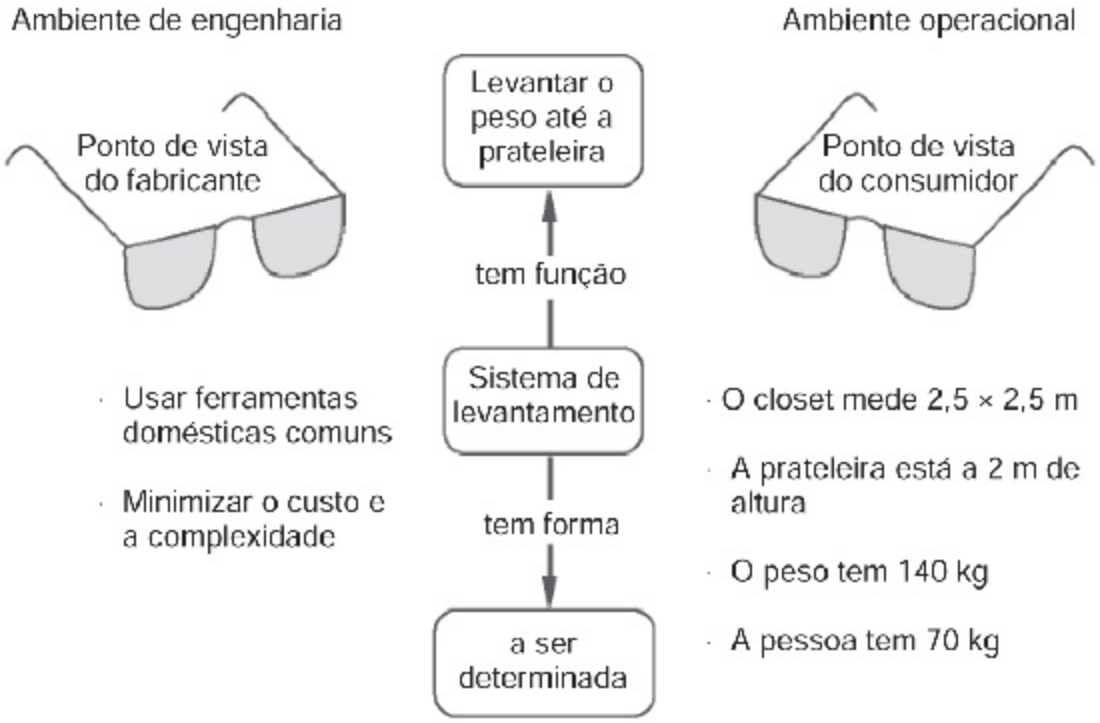


Figura 2.33 Mapa conceitual do problema de levantamento de um peso, mostrando as metas e restrições dos ambientes operacional e de engenharia.

Esta hierarquia de escolhas é chamada de *hierarquia de decisões* ou *árvore de decisões*. Trata-se de um tipo de hierarquia de classificação no qual cada nó representa uma classe de opções que atendem a um certo objetivo. A Figura 2.35 mostra uma árvore de decisões que contém algumas das opções iniciais. Observando a figura, vemos que a primeira decisão a ser tomada é a escolha de um método mecânico ou manual de levantar o peso, mostrando como os dois filhos da raiz são ligados a ela por relações do tipo “é um”, definidas na Seção 2.2.3. Em cada uma dessas classes existem novas opções, como a escolha de uma empilhadeira como método mecânico, ou de uma alavanca como método manual. Como um dos objetivos do ambiente de engenharia é minimizar a complexidade, descartamos os métodos

mecânicos, mas consideramos os dois métodos manuais merecedores de uma investigação mais aprofundada.

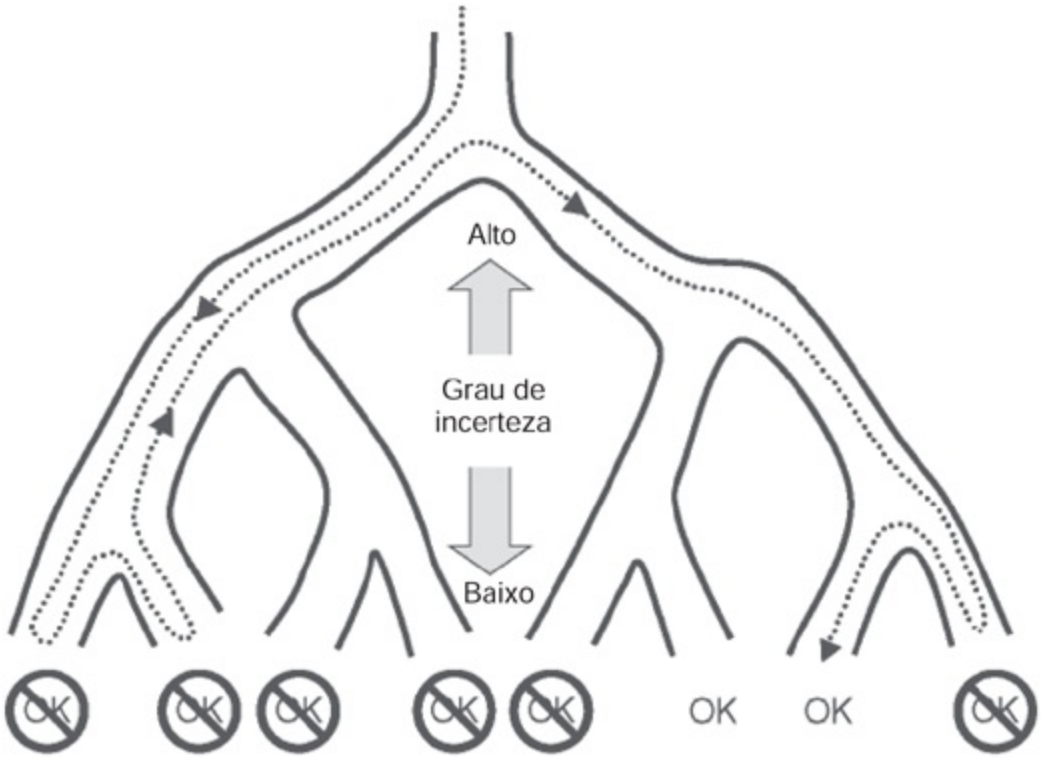


Figura 2.34 Árvore de decisões.

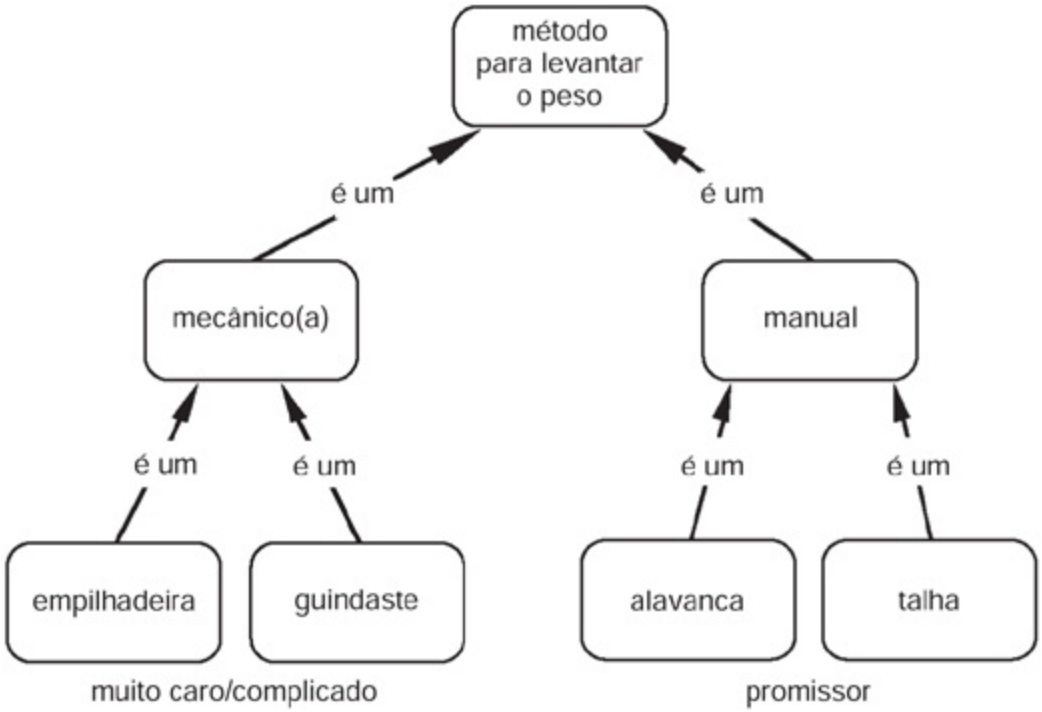


Figura 2.35 Hierarquia de classes para os métodos de levantar um peso.

Hierarquia Estrutural Para optar por um dos dois métodos manuais de levantar o peso (alavanca ou talha), é preciso examinar melhor a implementação de cada um para verificar se ambos satisfazem todos os objetivos e restrições.

Uma forma de representar esses detalhes adicionais consiste em decompor as estruturas das duas máquinas simples, como mostra a Figura 2.36. Esta *hierarquia estrutural* é um tipo de hierarquia de composição; os nós de cada nível estão ligados aos nós do nível imediatamente inferior através de relações do tipo “tem como parte”. Na figura, uma alavanca possui um fulcro e uma barra, enquanto uma talha possui um sistema de roldanas e uma corda. Cada uma dessas peças pode ser subdividida para revelar novos parâmetros de projeto. As “peças” do segundo nível da hierarquia estrutural não são componentes, mas informações a respeito das peças do primeiro nível, como o comprimento e material da barra da alavanca, ou o número de roldanas e tipo de corda da talha.

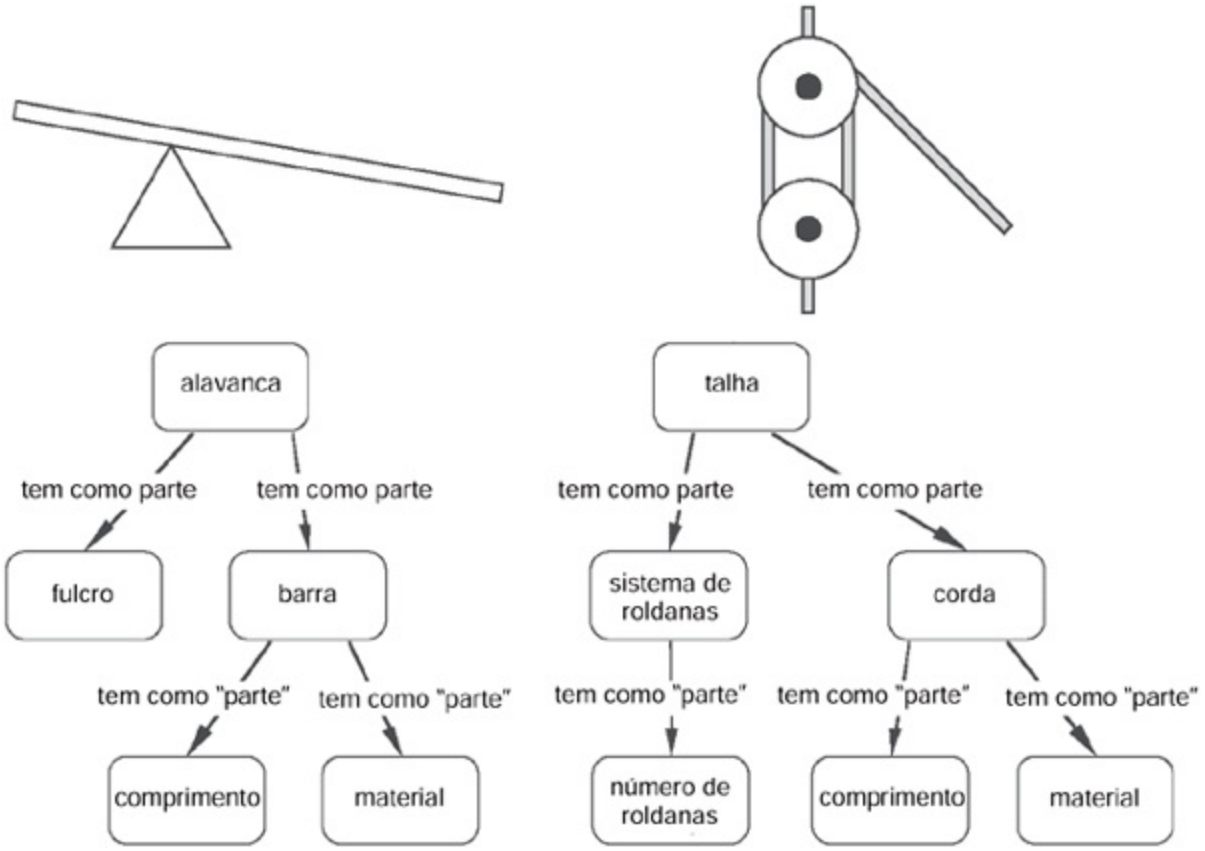


Figura 2.36 Hierarquia estrutural dos dois métodos manuais de levantamento.

Buscas no Espaço de Projeto Podemos combinar aspectos de uma árvore de decisões e de uma hierarquia estrutural em um único mapa conceitual que ofereça uma visão completa do espaço de soluções possíveis. À guisa de ilustração, a Figura 2.37 mostra um diagrama com opções de métodos para levantar o peso.

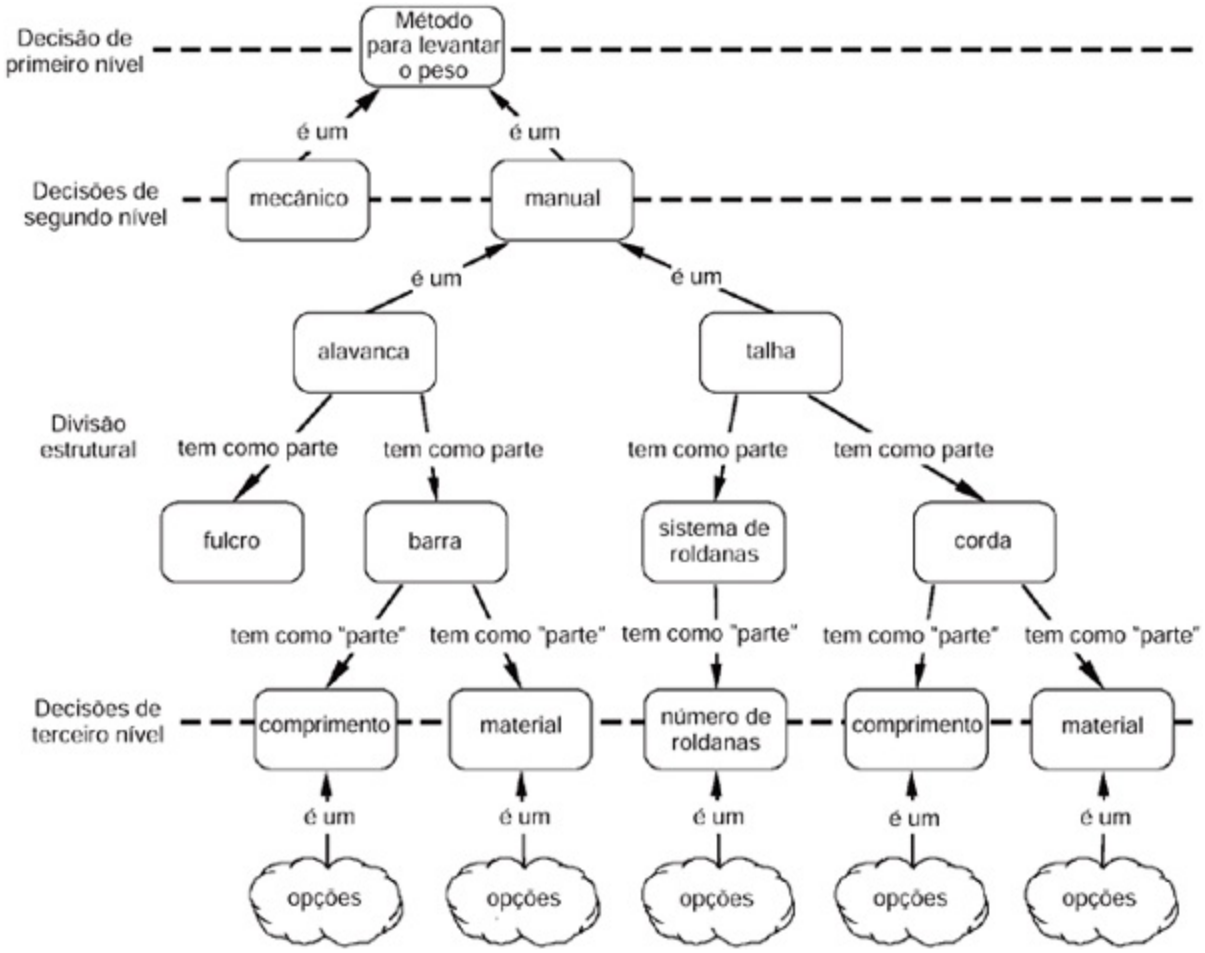


Figura 2.37 Mapa conceitual que usa uma combinação de relações de uma hierarquia de decisões (“é um”) e de uma hierarquia de componentes (“tem como parte”) para ilustrar as opções manuais para levantar um peso.

O diagrama contém três níveis decisórios: o primeiro nível envolve a escolha entre métodos mecânicos e manuais; o segundo, a escolha entre uma alavanca e uma talha como método manual; o terceiro, a escolha de parâmetros específicos de uma alavanca ou de uma talha. Esses três níveis são análogos aos anéis do labirinto da Figura 2.32, no qual avançar para o nível seguinte significa aproximar-se de um produto concreto.

Em muitos problemas de projeto, se não a maioria, não é possível desenhar logo de início um diagrama detalhado como o da Figura 2.37; o diagrama se desdobra cada vez que o projetista repassa as fases de planejamento, implementação e testes. Frequentemente,

apenas no momento em que você chega a um nó e começa a examinar as possíveis soluções de um problema específico é que são definidas as ramificações desse nó. Além disso, dependendo da estratégia adotada pelo projetista, o diagrama pode se desdobrar de cima para baixo, de baixo para cima, ou do meio para fora. No caso do problema de levantamento do peso, por exemplo, uma pessoa que entra no *closet* e encontra uma vara de madeira e um barril pode tentar primeiro uma solução "de baixo para cima", enquanto a mesma pessoa poderia tomar um caminho diferente se começasse o projeto do zero.

Além da decisão de subir ou descer a árvore, existe a decisão de escolher o galho da direita ou o da esquerda. Em complemento à decisão de trabalhar de cima para baixo ou de baixo para cima, existe a escolha de explorar caminhos em *profundidade* ou em *largura*. Na busca em *profundidade*, você segue um caminho da raiz da árvore até uma folha e verifica se o produto obtido no final do caminho é aceitável. Se a resposta é negativa, você volta à raiz e explora outro caminho até uma folha. Esta é a abordagem mostrada na Figura 2.34. Na busca em *largura*, você examina todas as opções disponíveis em cada nível e escolhe a que parece mais promissora. Em outras palavras, na busca em largura você perde algum tempo investigando todos os caminhos possíveis, enquanto na busca em profundidade você segue um dos caminhos até o final. É claro que a abordagem em largura pode economizar muito tempo e trabalho, mas às vezes é impossível decidir qual dos caminhos é mais promissor, sem descer alguns níveis em cada um deles.

Um dado caminho pode levar a um produto inaceitável porque é física ou economicamente *inviável* atender aos requisitos para certas opções de projeto. Em outras palavras, a partir de uma determinada opção, não existe uma combinação de decisões para a qual nenhuma das exigências impostas pelo ambiente de desempenho ou de engenharia seja violada. Como já foi dito, chegamos à conclusão de

que o uso de um método mecânico para levantar o peso não leva a uma solução aceitável por ser caro demais. A Figura 2.38 ilustra os resultados da investigação de um método manual usando uma alavanca ou uma talha. Como a barra da alavanca necessária para levantar o peso até a altura desejada é comprida demais para caber no *closet*, o uso de uma alavanca é inviável. Por outro lado, como a talha é compacta, este caminho leva a uma solução viável.

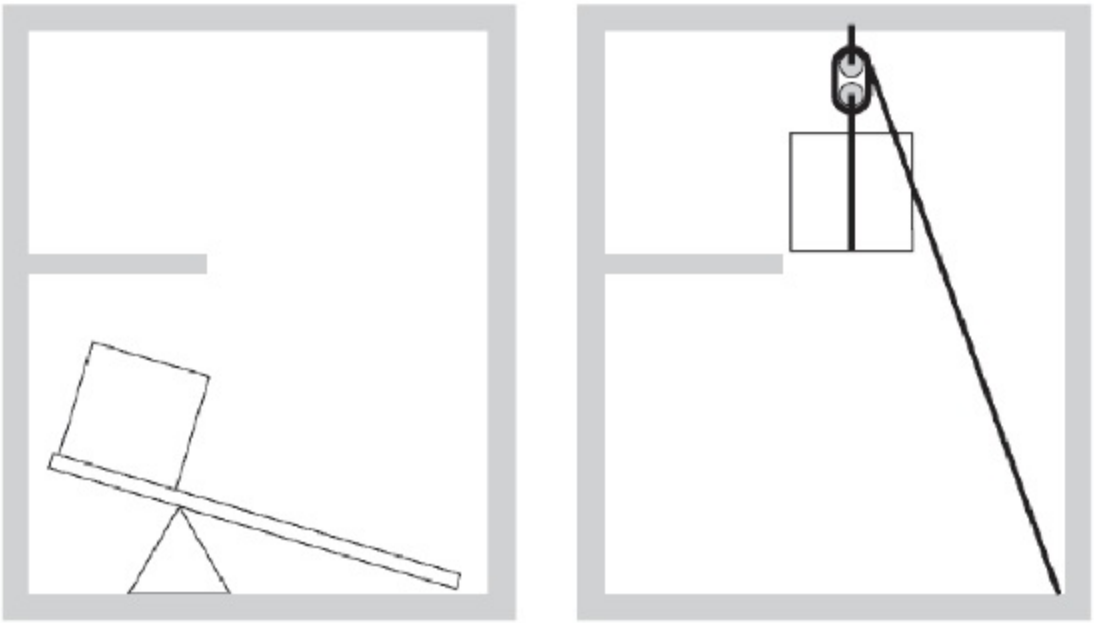


Figura 2.38 Não existe uma solução viável para o problema de levantamento do peso usando uma alavanca, mas existe uma solução usando uma talha.

2.4 EXEMPLO: FORNECIMENTO DE ÁGUA A COMUNIDADES RURAIS DE PAÍSES EM DESENVOLVIMENTO

Um dos problemas de engenharia mais importantes nos dias de hoje é o fornecimento de água potável. Nos países desenvolvidos, a maior parte da população ignora este problema. Frequentemente, as pessoas desconhecem a origem da água e não têm a menor ideia da infraestrutura necessária para fornecer água limpa a residências e

indústrias. Para boa parte da população mundial, porém, o acesso a água doce é uma luta diária. De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), hoje em dia 2,6 bilhões de pessoas não dispõem de saneamento básico e 1,1 bilhão não tem acesso a água potável [Wor05b]. Em boa parte dos países em desenvolvimento, o índice de mortalidade infantil é maior que dez por cento, com o índice de mortalidade aos cinco anos atingindo, às vezes, valores bem maiores; a maioria dessas mortes é causada por doenças relacionadas à qualidade da água. A OMS estima que 4.500 crianças morrem diariamente por falta de água potável e saneamento básico. A Figura 2.39 mostra o acesso a água tratada por região e por grau de desenvolvimento econômico. A Tabela 2.1 mostra uma lista dos países com menor acesso a água tratada. O Afeganistão é o que está em pior situação: apenas 13 por cento da população tem acesso a água potável, e apenas 2 por cento recebe água encanada. Na América, a pior situação é do Haiti: apenas 71 por cento da população tem acesso a água potável, e apenas 11 por cento recebe água encanada.

Nesta seção, vamos examinar a questão do fornecimento de água potável a comunidades rurais de países em desenvolvimento.[2] Além de chamar atenção para este importante problema global, demonstramos a aplicação dos conceitos apresentados na primeira parte do capítulo a um problema de engenharia real e multifacetado. Mais especificamente, o problema serve para ilustrar:

- a definição de aceitabilidade em termos das restrições técnicas e socioeconômicas impostas pelo ambiente operacional e pelo ambiente de engenharia;
- a divisão de um problema usando hierarquias de componentes e alternativas;
- o modo como um problema inicial de projeto se desdobra em subprojetos quando é dividido;
- o uso de mapas conceituais para facilitar a análise de um

problema de projeto.

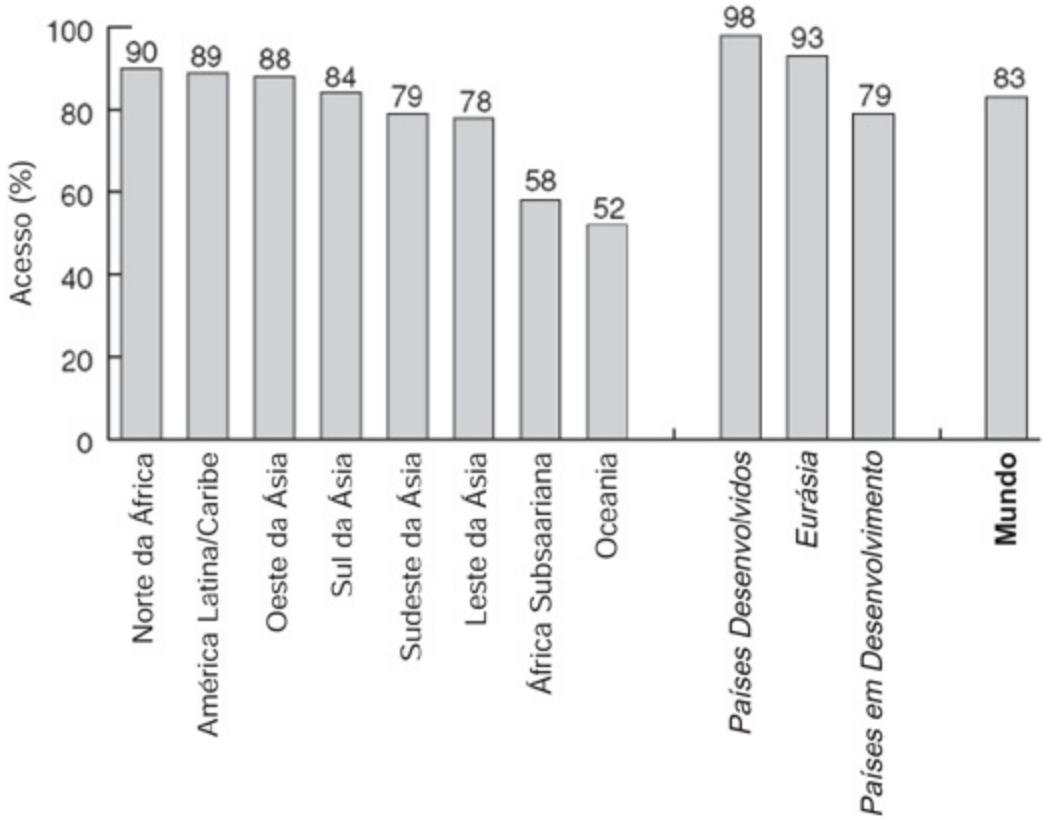


Figura 2.39 Acesso a água tratada, por região e por grau de desenvolvimento econômico. Fonte: Organização Mundial da Saúde/UNICEF [Wor05b].

TABELA 2.1 Países com menos acesso a água tratada.

	Total (% das residências)	Água encanada (% das residências)
Angola	50	5
Mali	48	10
República Democrática do Congo	46	10
Niger	46	8
Madagascar	45	5
Guiné Equatorial	44	8
República Democrática Popular do Laos	43	8
Moçambique	42	11

Camboja	34	6
Chade	34	5
Somália	29	1
Etiópia	22	4
Afeganistão	13	2
Haiti*	71	11

*O menor da América.
Fonte: World Bank Water and Sanitation Program [Wor05a].

Nesta seção, *não* executamos o tipo de análise quantitativa que é necessário para escolher uma opção ou verificar se uma solução é aceitável. No Capítulo 4, vamos voltar ao problema do fornecimento de água e discutir o uso de *modelos* para comparar projetos alternativos e tomar decisões. Finalmente, chamamos a atenção para o fato de que a análise deste exemplo é apenas *uma* das formas de encarar o problema de fornecer água potável à população; na verdade, não há uma "solução correta" para este problema complexo. Existem certamente muitas outras opções além das que são abordadas aqui, e o leitor talvez encontre outras formas de organizar os conceitos que, para ele, façam mais sentido. Mesmo assim, o uso das ideias apresentadas no início do capítulo e, mais especificamente, a caracterização da aceitabilidade a partir das perspectivas dos dois ambientes e o uso de mapas conceituais para ajudar a dividir o problema em partes tratáveis nos ajudaram a compreender melhor este problema complexo. Assim, encorajamos o leitor a encarar este exemplo como um roteiro para analisar outros problemas de projeto.

2.4.1 O Problema de Alto Nível: Como Atender às Necessidades da Comunidade

Objetivos e Restrições no Ambiente Operacional e no Ambiente de

Engenharia O primeiro passo para analisar este problema é definir as características de uma solução ‘’aceitável”; em outras palavras, definir quais são as metas que estamos tentando atingir. A Figura 2.40 mostra algumas características de aceitabilidade dos pontos de vista operacional e de engenharia. Essas características são examinadas em detalhes nos próximos parágrafos.

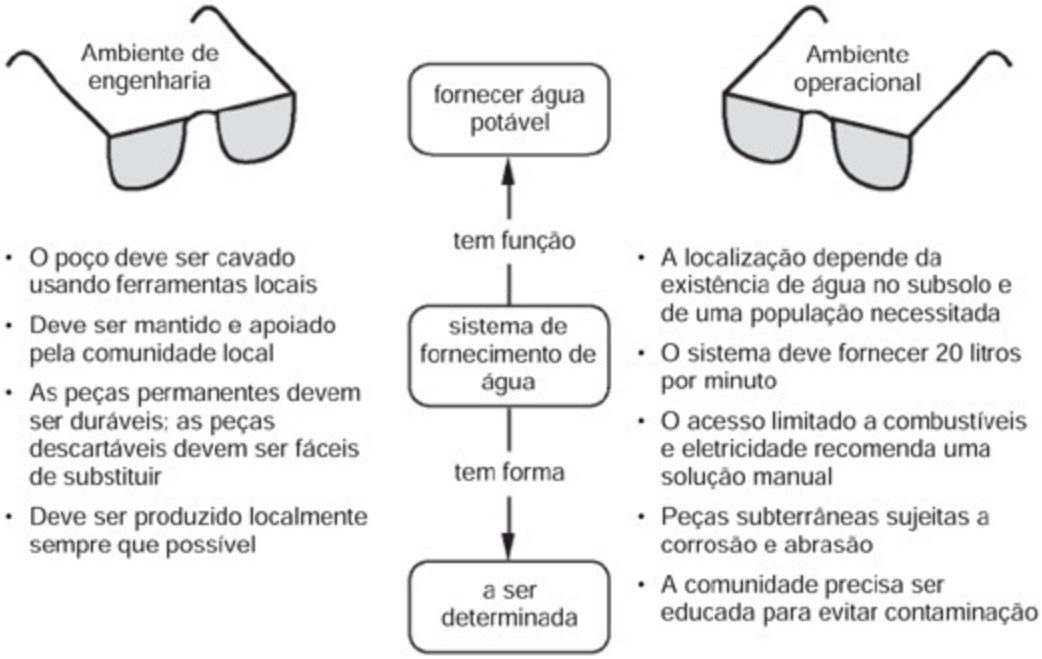


Figura 2.40 Restrições do ponto de vista operacional e de engenharia.

O Ambiente Operacional e as Metas de Desempenho O ambiente operacional de um sistema de fornecimento de água está sujeito a restrições de vários tipos: geológicas, tecnológicas e socioeconômicas. A principal restrição geológica é a disponibilidade de água limpa. A Figura 2.41 mostra a abundância relativa de diferentes tipos de água na terra. A água superficial é encontrada em lagos e rios. Embora às vezes seja de fácil acesso, esta água é altamente suscetível a contaminação e relativamente difícil de coletar, de modo que não é considerada uma opção viável. A água subterrânea é muito mais abundante que a água superficial e quase sempre mais limpa, mas só pode ser colhida através de poços. A água subterrânea ainda é pouco

usada nas regiões rurais dos países em desenvolvimento; por isso, a maioria dos programas para fornecer água potável aos habitantes dessas regiões se concentra na água subterrânea.

Para retirar água do subsolo, é preciso energia. Para uso doméstico, um poço deve ser capaz de fornecer pelo menos 20 litros de água por minuto, de modo que uma das principais restrições tecnológicas no projeto de um sistema de abastecimento de água é a disponibilidade de uma fonte de energia capaz de retirar a água de um poço com uma vazão adequada. Um vez que na maioria das comunidades rurais dos países em desenvolvimento não existe um suprimento confiável de eletricidade nem de combustível, uma solução baseada na força muscular constitui, em geral, a melhor opção. Porém, a mão de obra disponível nessas comunidades para a coleta de água é geralmente constituída por mulheres e crianças; por isso, qualquer solução baseada no trabalho humano deve levar em conta o tamanho e a força dos participantes. Como a água está no subsolo, o sistema tem que funcionar de modo confiável em um ambiente altamente abrasivo e corrosivo. Finalmente, o sistema deve ser projetado de tal forma que o processo de coleta da água não introduza contaminação.

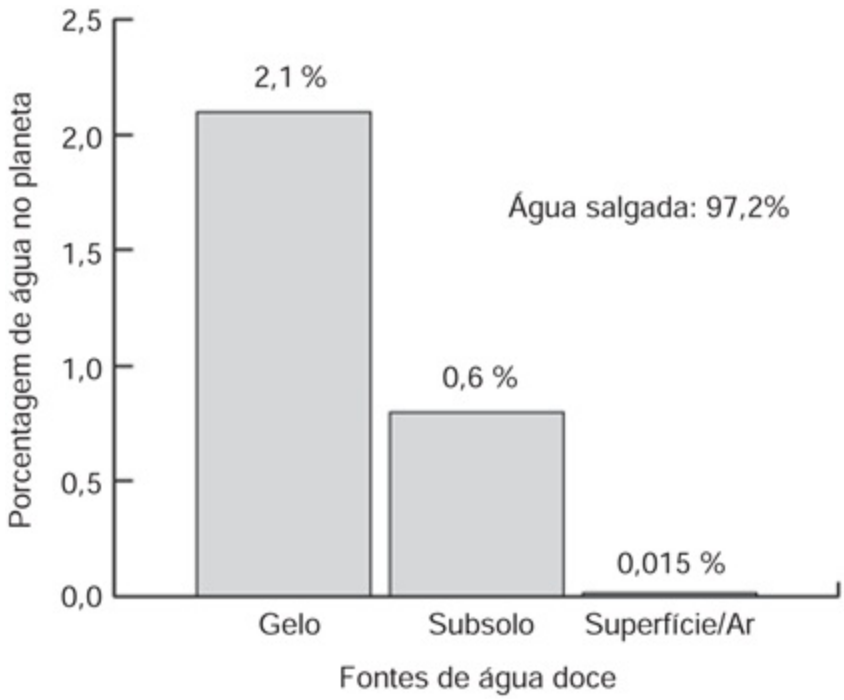


Figura 2.41 Abundância relativa dos diferentes tipos de água na terra. A água salgada representa cerca de 97% do total; a água doce superficial, apenas 0,015%.

A localização de um poço também deve considerar as atividades locais. Por conveniência, o poço deve ficar nas proximidades do centro populacional a que vai atender, mas é necessário controlar os movimentos das pessoas e animais nas vizinhanças para evitar contaminação. Além disso, o poço deve ficar a uma distância prudente das fossas. É necessário levar em conta a política local, para assegurar o acesso de toda a população aos novos recursos.

A educação também é importante para o projeto do sistema como um todo e de seu ambiente operacional. A comunidade precisa compreender as questões que envolvem o abastecimento de água e a saúde pública, bem como saber a importância de evitar que a água seja contaminada no seu trajeto até as residências. A natureza da contaminação pode ser difícil de explicar, já que os micróbios responsáveis pelas doenças são invisíveis, e a comunidade precisa aprender a usar o poço, mesmo que fontes de água superficial estejam disponíveis.

O Ambiente de Engenharia e as Metas de Custos O fator mais importante, do ponto de vista da engenharia, não é a criação do sistema de fornecimento de água, mas sua manutenção. Mesmo que o projeto de abastecimento de água tenha sido iniciado fora da comunidade, a experiência mostra que, para ter sucesso a longo prazo, esse projeto deve ser gerenciado localmente. É importante que o centro do ambiente de engenharia seja a comunidade e que os engenheiros de fora, mesmo que sejam os responsáveis pela criação do projeto, trabalhem apenas como consultores da população local. Esse conceito de gerenciamento local do sistema de abastecimento de água é chamado de *VLOM – village-level operation and maintenance* (*operação e manutenção a nível de aldeia*). De acordo com o Programa de Água e Saneamento do Banco Mundial [Rey92], os requisitos básicos de um sistema VLOM para bombeamento de água subterrânea são os seguintes:

- O poço deve ser projetado e instalado de forma compatível com a bomba e com as condições locais.
- A comunidade de usuários deve ter autonomia para executar serviços de manutenção de rotina, decidir quanto à necessidade de reparos e determinar quem vai executar o serviço e quem vai pagar por ele.
- As peças permanentes da bomba devem ser duráveis e confiáveis, e as peças sujeitas a desgaste devem ser baratas e de fácil substituição.
- Sempre que possível, a bomba deve ser produzida por indústrias locais. Componentes importados devem ser usados apenas se forem indispensáveis para atingir outros objetivos da VLOM.

Componentes de Alto Nível do Projeto A Figura 2.42 mostra os componentes de alto nível de um sistema de fornecimento de água extraída do subsolo. Dois componentes óbvios do sistema são um poço para acesso à água e um meio de retirar a água do poço. O

sistema completo, porém, tem outros componentes que precisam ser levados em consideração. Um deles é o meio de distribuir a água retirada do poço. Este sistema pode ser simples, como carregar a água em baldes, mas a contaminação deve ser evitada a todo custo. Muitos projetos de abastecimento de água não têm sucesso porque a comunidade deixa de implantar um programa de manutenção e um programa de educação.

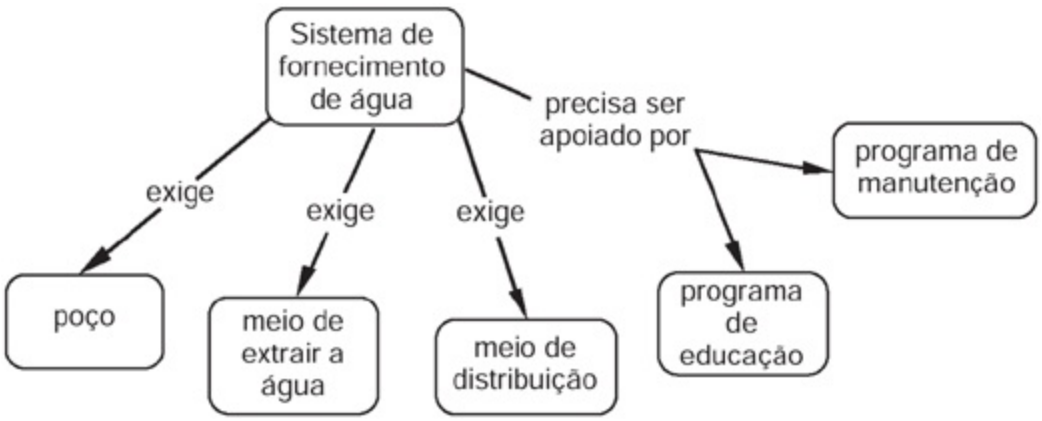


Figura 2.42 Componentes de alto nível de um sistema de fornecimento de água a uma comunidade rural de um país em desenvolvimento.

Cada um desses conceitos deve ser subdividido para que seja possível um melhor entendimento dos componentes e alternativas do projeto do sistema de fornecimento de água. A Figura 2.43 mostra esta subdivisão para os conceitos do poço e da remoção da água do poço, juntamente com comentários a respeito das várias opções relacionadas a objetivos e restrições. O poço deve ser perfurado, o que leva a opções adicionais. A profundidade e o diâmetro do poço dependem do nível do lençol freático e do método de perfuração.

Existem vários meios de retirar a água do poço. Um método usado desde a antiguidade é baixar baldes ou descer até o fundo do poço com um balde para recolher a água. Um dos problemas óbvios deste método é que ele funciona apenas no caso de poços relativamente rasos. Outro problema é o alto risco de contaminação, o que nos faz considerar inaceitável esta opção. É preferível perfurar um poço mais

estreito e retirar a água com uma bomba. Independentemente do método usado para retirar a água, é preciso energia para fazê-la subir à superfície. Como no problema de levantamento de peso discutido anteriormente neste capítulo, o método empregado pode ser manual ou mecânico. Uma vez que a maioria das comunidades rurais dos países em desenvolvimento não tem acesso a eletricidade nem a combustíveis, os métodos manuais, que apresentam ainda a vantagem da maior facilidade de manutenção, quase sempre constituem a melhor alternativa.

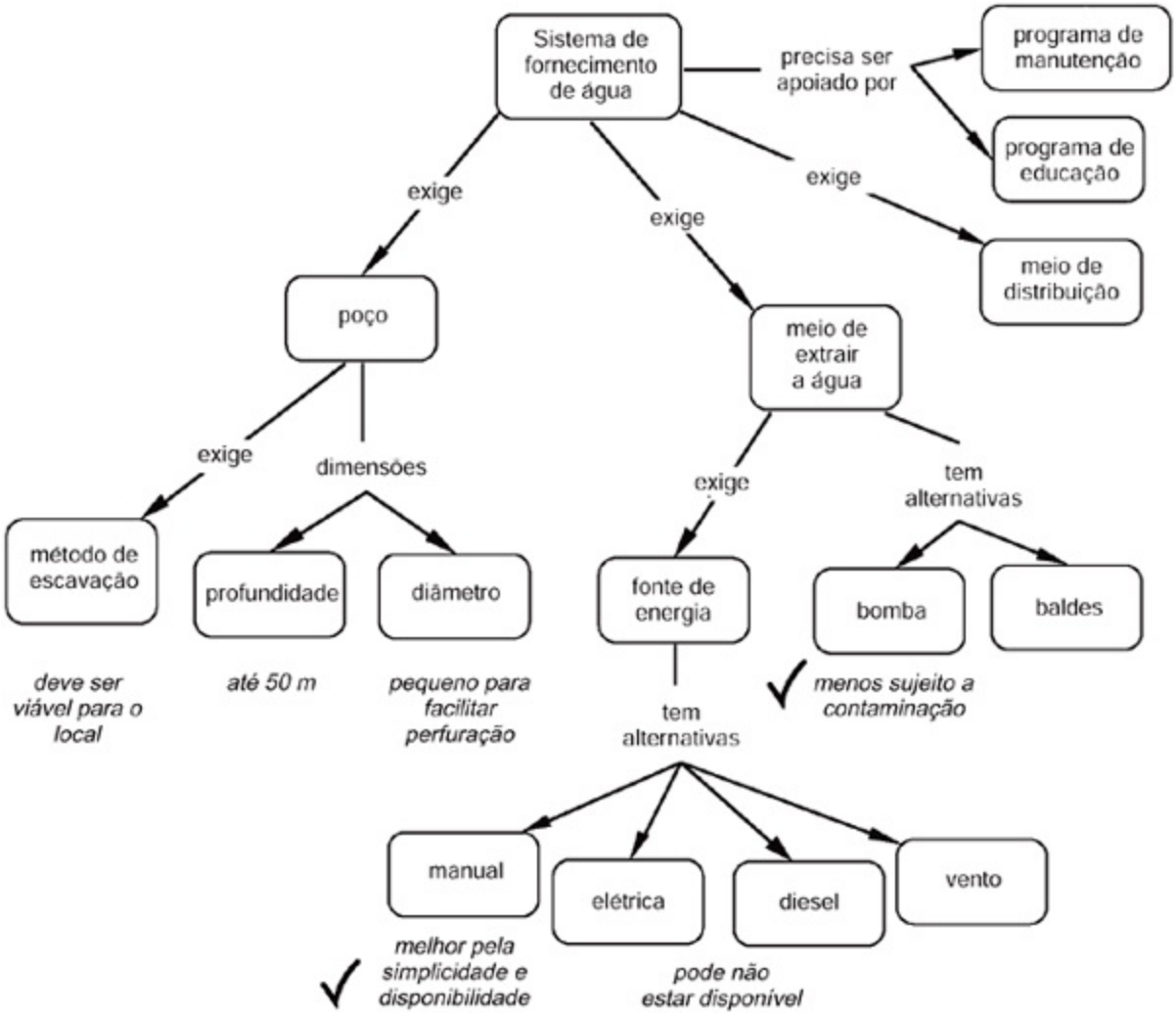


Figura 2.43 Subdivisão de alguns conceitos de um sistema de fornecimento de água, com comentários a respeito de opções relacionadas a objetivos e restrições. Uma bomba manual é considerada a opção mais apropriada.

2.4.2 Um Problema de Baixo Nível: Projeto de uma Bomba Manual

As bombas manuais desempenham um papel importante para o fornecimento de água em muitas localidades. Nesta seção, vamos analisar o projeto de uma bomba manual. Como antes, começamos por definir objetivos e restrições nos ambientes operacional e de engenharia. Em seguida, analisamos a estrutura do projeto, examinando opções à luz dos objetivos e restrições.

Objetivos e Restrições no Ambiente Operacional e no Ambiente de Engenharia Basicamente, uma bomba é uma máquina usada para movimentar fluidos. Neste caso específico, a função da bomba é içar a água do subsolo até a boca do poço. Vários parâmetros podem ser usados para quantificar a aceitabilidade de uma bomba manual, mas três dos mais importantes são a *eficiência*, a *confiabilidade* e o *custo*. Eficiência é a quantidade de água que a bomba é capaz de extrair por unidade de energia que consome. Confiabilidade é a fração do tempo em que a bomba permanece em boas condições de funcionamento. Custo é a despesa envolvida na fabricação da bomba.

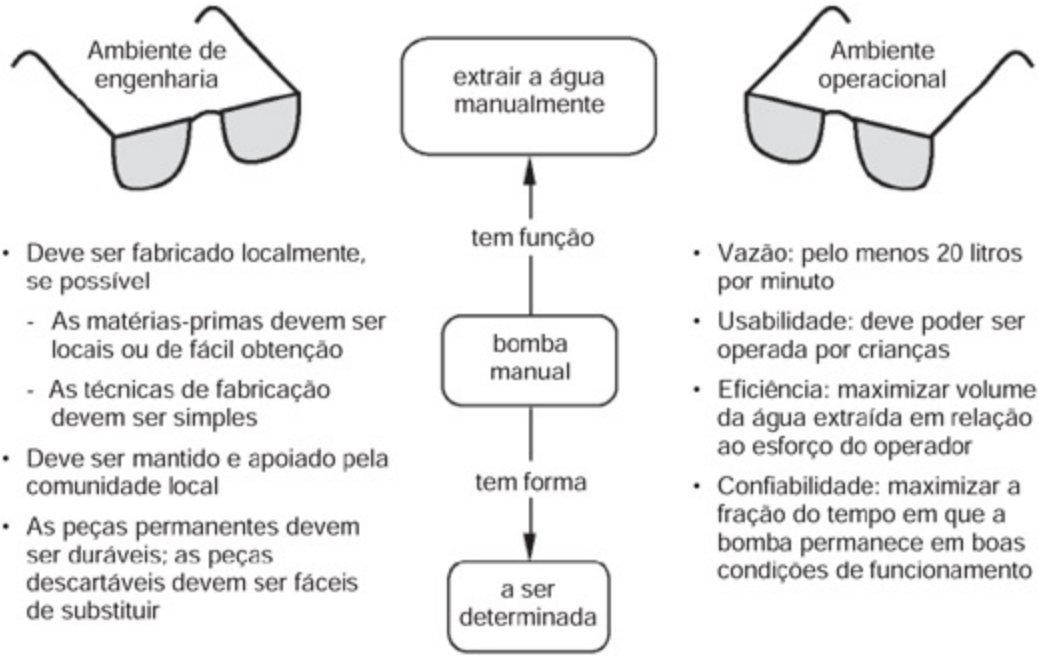


Figura 2.44 Restrições do ambiente de engenharia e do ambiente operacional no projeto de uma bomba manual.

Eficiência Na física, o trabalho é definido como a energia transferida pela aplicação de uma força ao longo de um deslocamento. Ao operar uma bomba manual, a pessoa realiza trabalho sobre a bomba, aplicando força para mover o braço para cima e para baixo. A bomba, por sua vez, realiza trabalho sobre a água, levantando-a um pouco a cada movimento do braço. A eficiência de uma bomba é definida através da equação

$$\text{Eficiência} = \frac{\text{trabalho realizado pela bomba sobre a água}}{\text{trabalho realizado pelo operador sobre a bomba}}$$

Se uma bomba fosse 100% eficiente, toda a energia gasta por uma pessoa para operá-la seria usada para levantar a água. Na prática, porém, parte do trabalho realizado pelo operador é perdida. Assim, por exemplo, a cada movimento do braço para cima, o operador tem que levantar, não só a água, mas também a haste e o êmbolo da bomba. O atrito presente no sistema, como o que existe entre o êmbolo e a parede do cilindro, também aumenta o trabalho realizado pelo operador a cada ciclo. Finalmente, vazamentos no sistema podem resultar em uma redução da quantidade de água que é içada a cada ciclo.

Confiabilidade A confiabilidade de uma bomba depende da frequência com que ela enguiça e do tempo necessário para ser consertada. A Figura 2.45 mostra o histórico de funcionamento de duas bombas diferentes com a mesma disponibilidade. Embora a bomba A enguice com menor frequência que a bomba B, aquela requer mais tempo para ser consertada. Embora a bomba B enguice com maior frequência, ela pode ser a mais desejável, já que o tempo necessário para os reparos, ou seja, o tempo durante o qual o serviço não está disponível, é menor.

Na engenharia, o tempo médio entre reparos é chamado de MTBF,

mean time between failures (*tempo médio entre falhas*). Embora o MTBF seja um bom indicador da confiabilidade de um sistema, nem sempre fornece indicações suficientes para que seja possível determinar se um projeto é *preferível*, como ilustra o caso das duas bombas da Figura 2.45.

Custo O custo de fabricação de uma bomba manual inclui o custo do material, o custo das ferramentas e equipamentos e o custo da mão de obra especializada. Ao avaliar o custo de projetos alternativos, é importante considerar, não só o custo inicial de fabricação, mas também o custo de operação. Como no caso da confiabilidade, falhas eventuais são toleráveis se os componentes são baratos e fáceis de substituir.

Conceitos Envolvidos no Projeto de uma Bomba Manual A Figura 2.46 mostra o mapa conceitual de uma bomba manual típica, onde aparecem a estrutura básica e algumas das alternativas principais. Esses conceitos são discutidos em detalhes nos parágrafos a seguir.

Organização de Alto Nível Uma bomba manual tem quatro componentes principais: um cano, um cilindro, uma haste e um braço. O cano é usado para conduzir a água do fundo do poço à superfície. O cilindro é a peça principal da bomba, que força a água a subir à superfície; seu funcionamento será discutido mais adiante. A haste é usada para movimentar o êmbolo no interior do cilindro, produzindo o "efeito de bombeamento". O braço é usado para movimentar a haste. Como mostra a Figura 2.47, esses componentes podem ser dispostos de duas formas diferentes. Uma das configurações é da *bomba de sucção*, na qual o cilindro é instalado acima do solo. A principal vantagem desse tipo de bomba é o fácil acesso a todas as peças móveis, o que simplifica a instalação e os reparos. A principal desvantagem é o fato de que, como o funcionamento desse tipo de bomba depende da sucção para fazer a água subir, funciona apenas para poços com até cerca de 7 m de profundidade [Wat99]. No caso

de poços mais fundos, o cilindro deve ser instalado no fundo do poço. Embora esta configuração permita extrair água a profundidades da ordem de 50 m, peças móveis no fundo do poço são muito mais suscetíveis a desgaste e corrosão e muito mais difíceis de instalar e substituir.

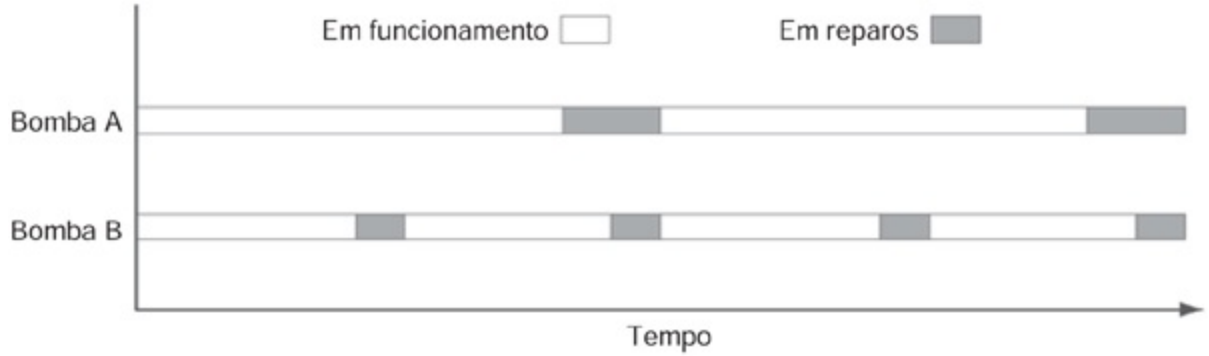


Figura 2.45 Histórico de funcionamento de duas bombas com a mesma disponibilidade.

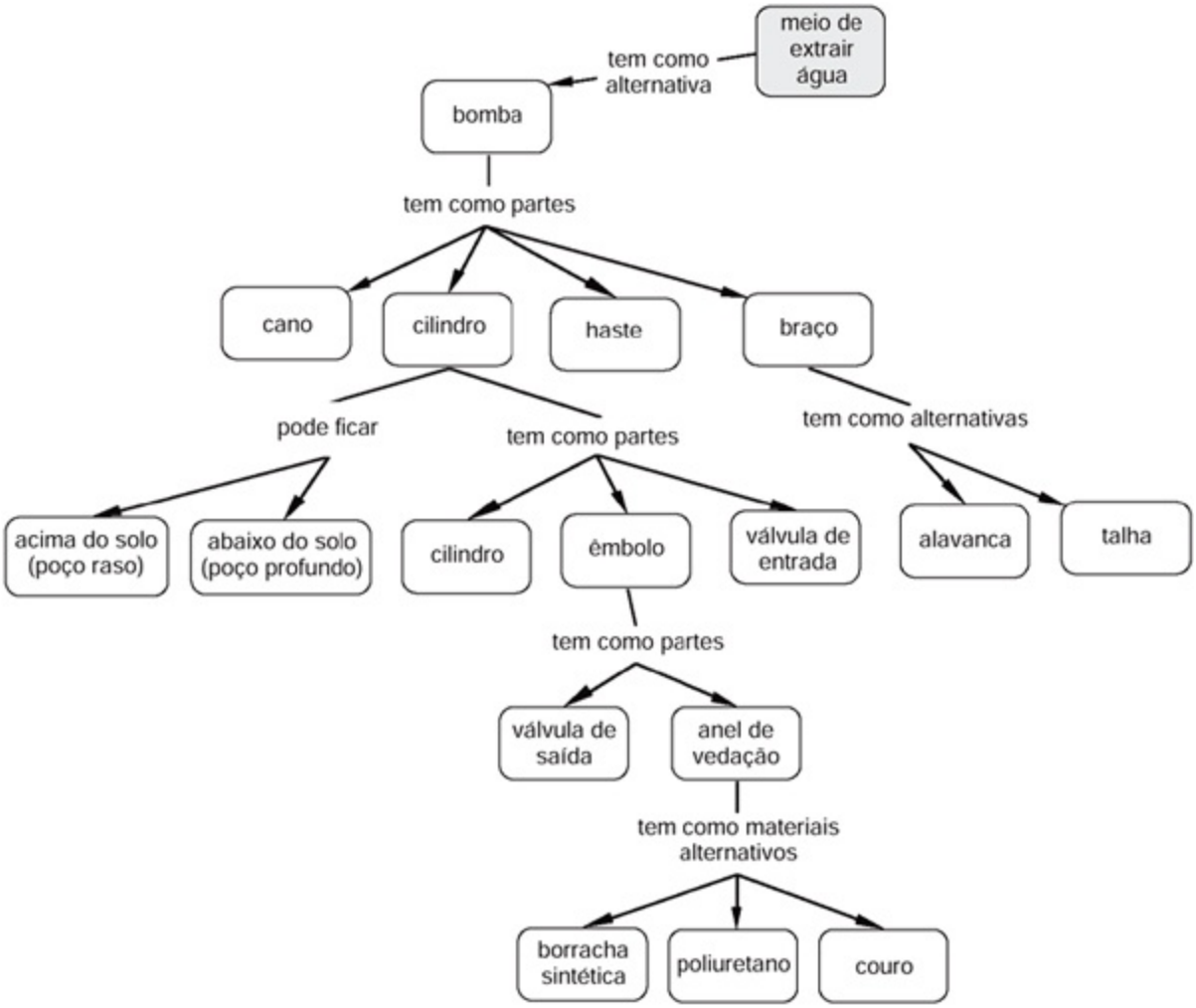


Figura 2.46 Peças de uma bomba manual.

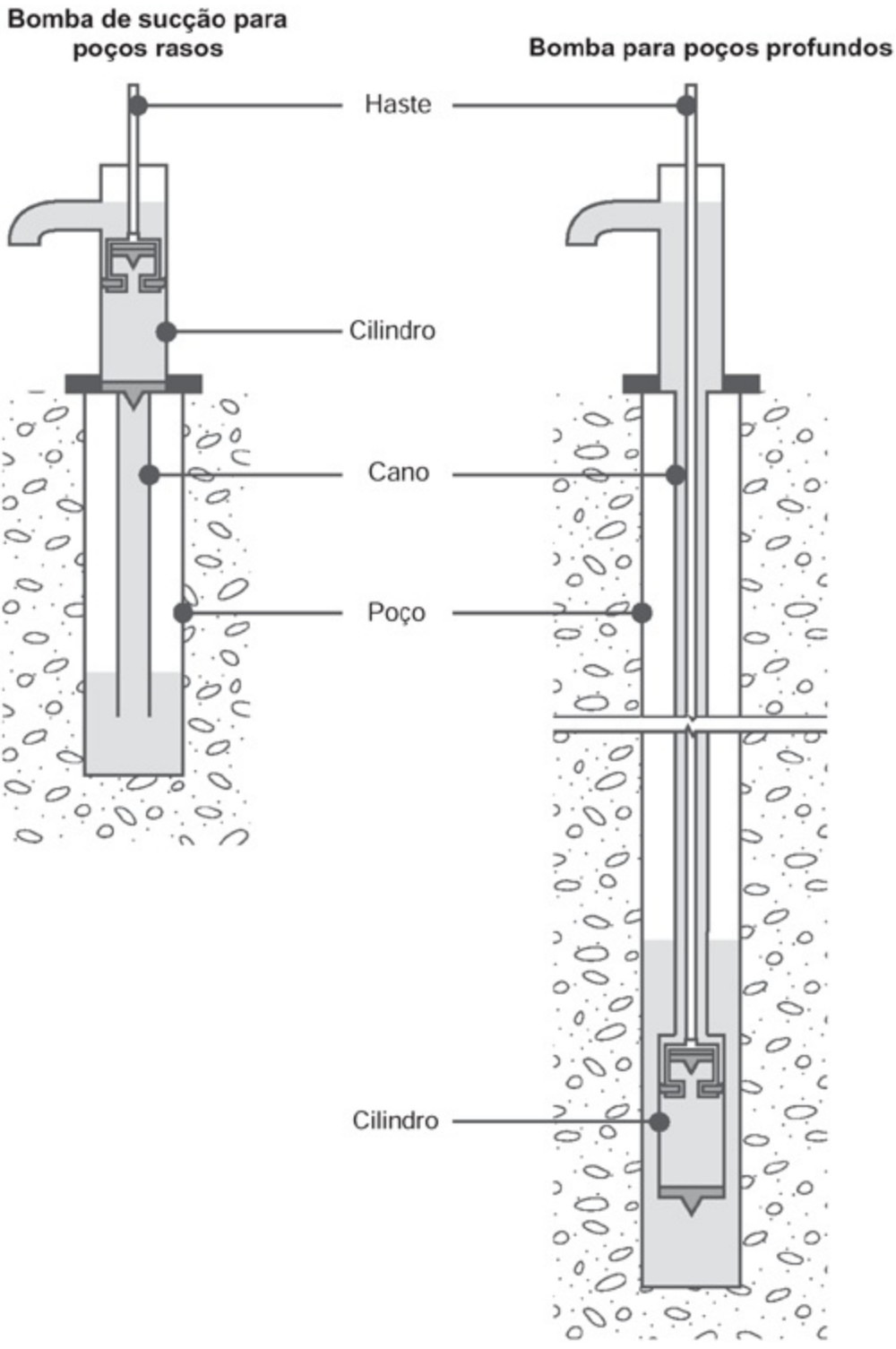


Figura 2.47 Dois tipos de bomba manual.

O Cilindro da Bomba As Figuras 2.48 e 2.49 mostram o princípio de funcionamento do cilindro de uma bomba e suas peças, que também

aparecem no mapa conceitual da Figura 2.46. O cilindro tem três partes principais: a câmara, o êmbolo e as válvulas. O êmbolo está preso à haste e desliza para cima e para baixo na câmara quando o braço é acionado pelo operador. Um anel de vedação mantém o êmbolo alinhado com as paredes do cilindro sem deixar passar a água. O cilindro possui duas válvulas: a válvula de entrada, na base da câmara, e a válvula de saída, na base do êmbolo. Quando a haste é deslocada para cima, duas coisas acontecem. Em primeiro lugar, a coluna de água acima do êmbolo é levantada em direção à superfície. Em segundo lugar, a sucção abaixo do êmbolo faz com que a válvula de entrada seja deslocada para cima e abra, permitindo a entrada de água na região abaixo do êmbolo. Quando a haste é deslocada para baixo, a diferença de pressão faz com que a válvula de entrada seja deslocada para cima e abra, permitindo a entrada de água na região acima do êmbolo, para ser levantada quando a haste for deslocada novamente para cima.

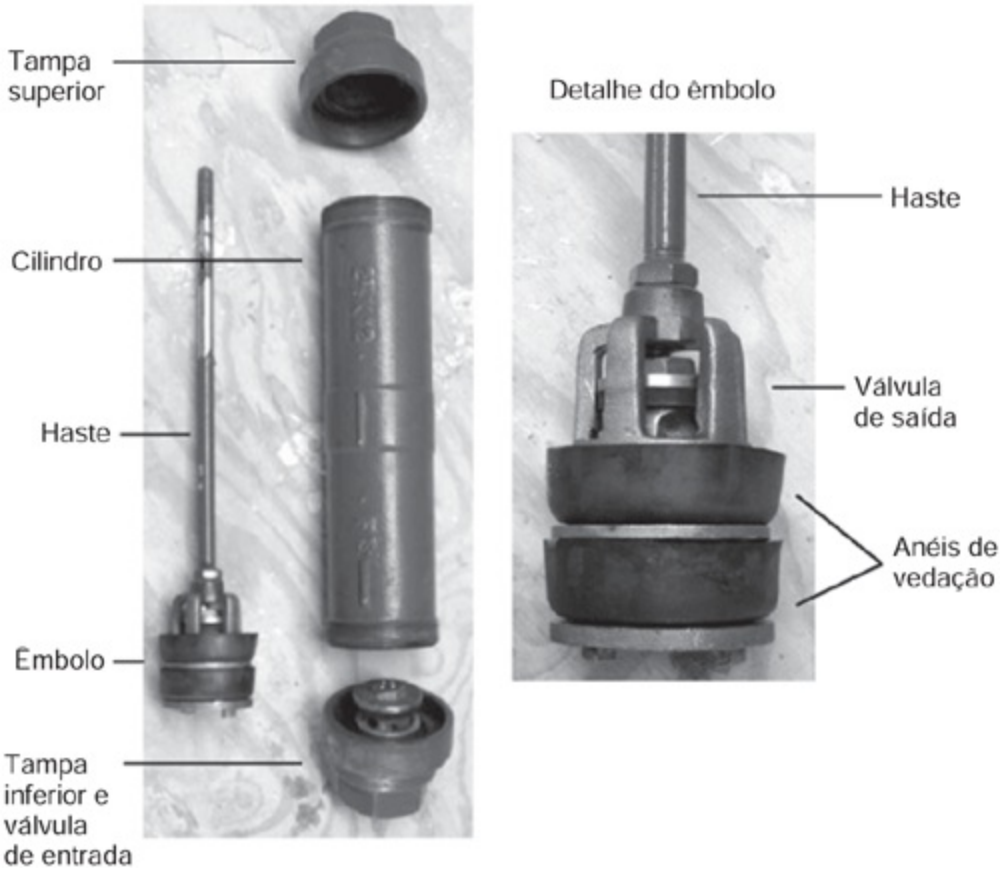


Figura 2.48 Peças do cilindro de uma bomba manual para poços profundos.

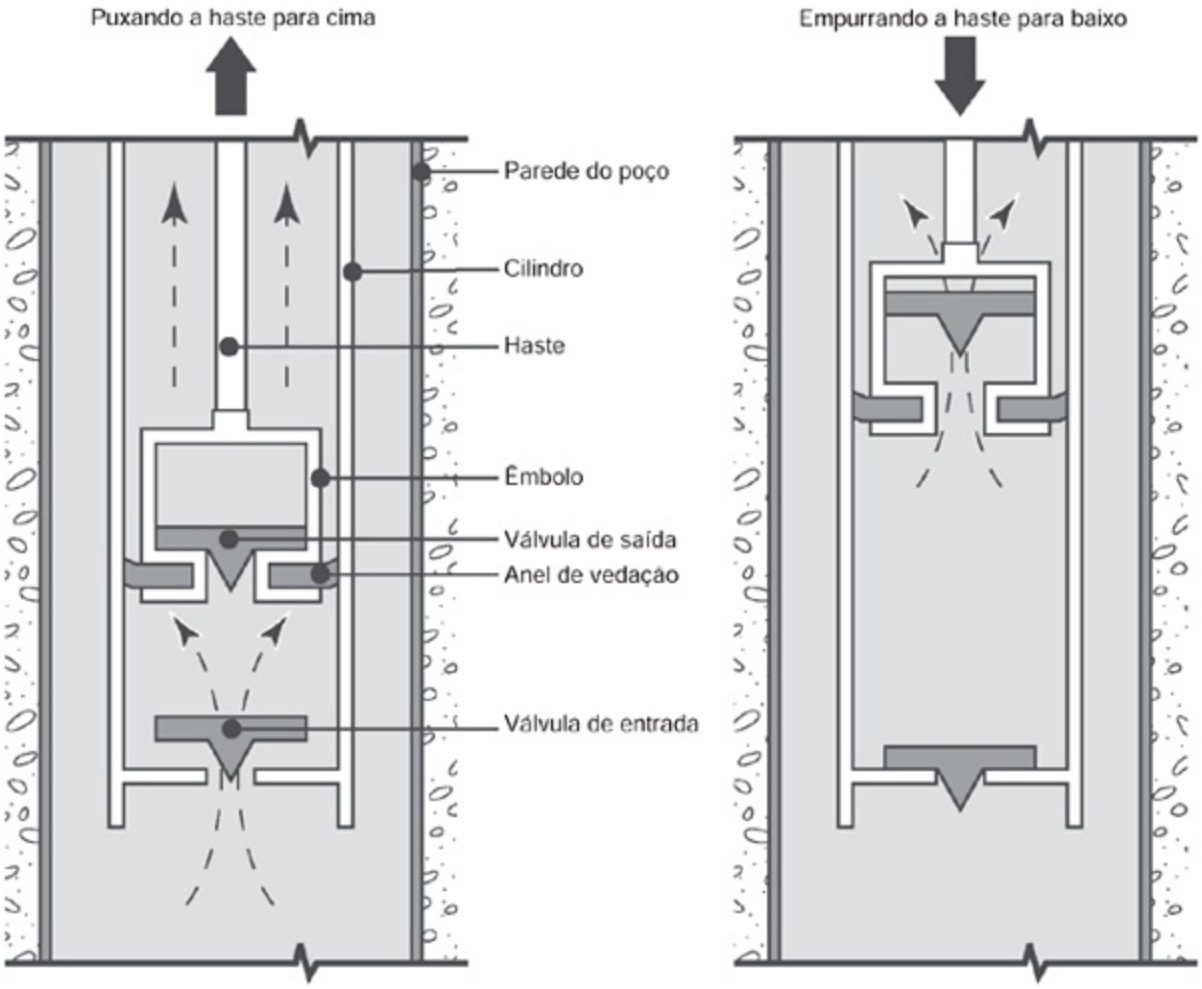


Figura 2.49 Diagrama do funcionamento de uma bomba manual para poços profundos, baseado em [Wat99].

O Braço Ao operar uma bomba manual, o usuário deve ser capaz de aplicar uma força suficiente para vencer a pressão que a água exerce sobre o êmbolo no fundo do poço. Dependendo da profundidade do poço e do diâmetro do êmbolo, a força necessária pode ser muito grande. De acordo com as restrições do ambiente operacional, uma criança deve ser capaz de operar a bomba. Supondo que a força máxima que uma criança consegue exercer sobre a extremidade do braço que está segurando é igual ao seu próprio peso, o braço deve ser projetado de tal forma que a força aplicada à haste seja muito maior que o peso da criança. Na Seção 2.3.3, discutimos dois dispositivos simples que podem ser usados para levantar um peso

manualmente: a alavanca e a talha. Os dois tipos de dispositivos têm sido usados em braços de bombas. A Figura 2.50 mostra o braço da bomba India Mark II, uma das mais populares, que é fabricada no mundo inteiro por pequenas empresas dos países em desenvolvimento.

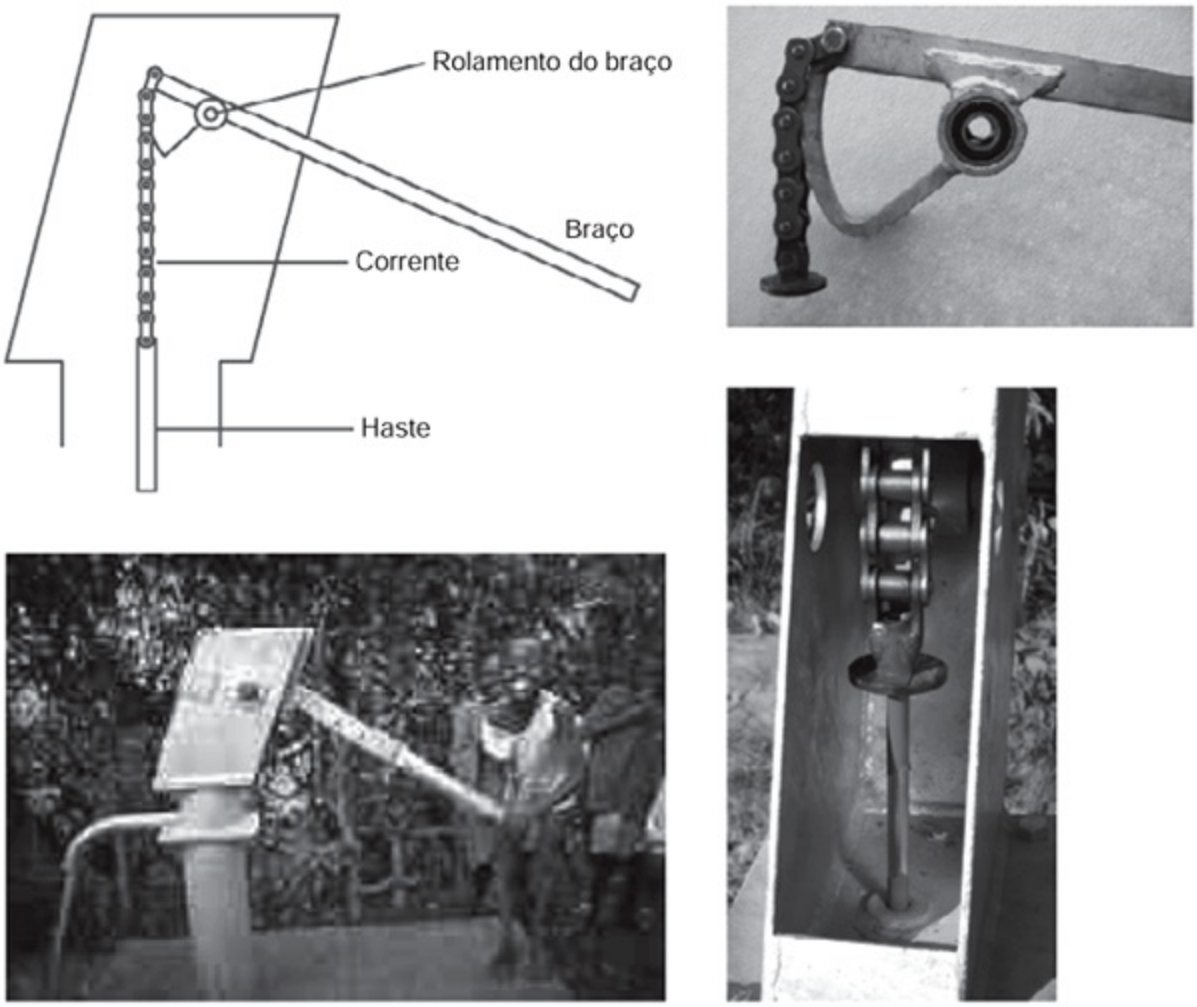


Figura 2.50 A bomba India Mark II. O desenho robusto inclui uma corrente e uma guia circular na extremidade do braço, mantendo a haste na vertical. No sentido horário, a partir da extremidade superior esquerda: desenho esquemático do braço; detalhe da corrente e da guia; detalhe da ligação entre a corrente e a haste; bomba India Mark II sendo usada em Benin (foto copyright Steve Silliman).

2.4.3 Um Problema de Nível Ainda Mais Baixo: Anéis de Vedação e Rolamentos

Continuando a esmiuçar o projeto da bomba d'água, descobrimos que as restrições e os objetivos do problema original envolvem problemas menores, mais específicos. A título de ilustração, vamos discutir dois desses problemas: a escolha de materiais para os anéis de vedação do cilindro e para os rolamentos do braço.

Um Detalhe Importante: O Anel de Vedação do Cilindro Todo dispositivo mecânico com peças móveis tende a se desgastar com o tempo. A parte do cilindro mais suscetível ao desgaste é o anel de vedação entre o êmbolo e a parede do cilindro. Esta peça simples e barata é essencial para o funcionamento da bomba. Trata-se de um cenário típico de muitos projetos: um pequeno detalhe pode comprometer o desempenho de todo o sistema.

Podemos encarar o anel de vedação como um problema de projeto que é um subproblema do projeto do sistema de fornecimento de água. A Figura 2.51 mostra os objetivos e as restrições do projeto do anel de vedação, do ponto de vista do ambiente de engenharia e do ambiente operacional. O ambiente operacional do anel de vedação é o pequeno espaço que existe entre o êmbolo e a parede do cilindro, e os indicadores de desempenho são os vazamentos, o atrito e o desgaste.

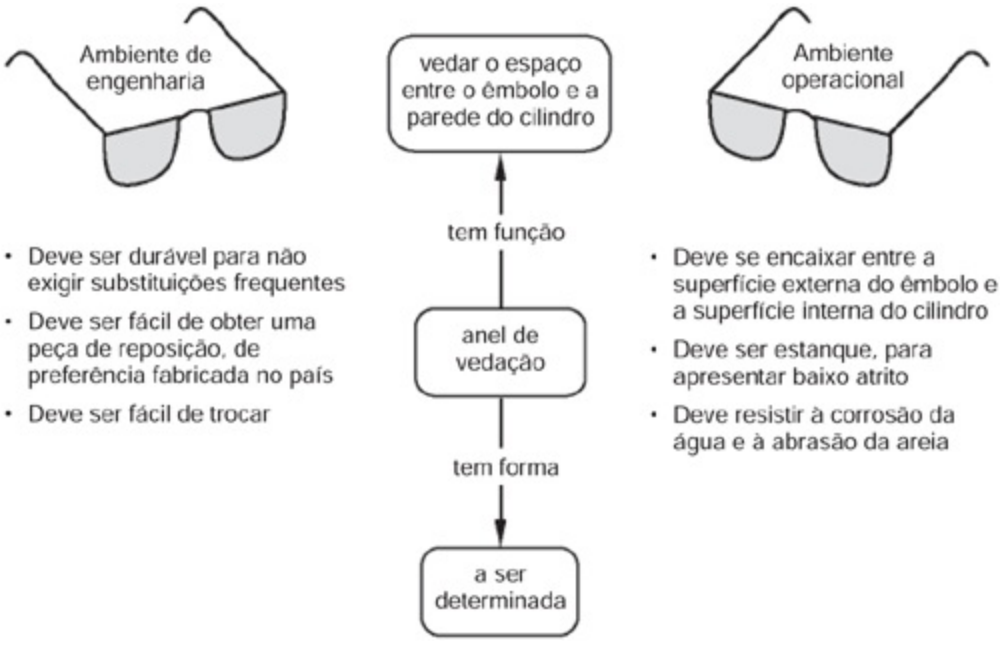


Figura 2.51 Restrições do ambiente de engenharia e do ambiente operacional para o anel de vedação.

Figura 2.52 Anel de vedação de couro.

Uma decisão importante no projeto do anel de vedação é a escolha do material. O mapa conceitual da Figura 2.46 mostra três materiais possíveis: borracha sintética, poliuretano e couro; o terceiro, mostrado na Figura 2.52, é um material natural. Como exemplo de estudo desse tipo de problema, Reynolds [Rey92] descreve uma série de testes de desempenho e resistência executados, para vários materiais, em um cilindro feito de PVC e projetado para acelerar o desgaste. O anel de couro apresentou uma eficiência ligeiramente maior que o de poliuretano, mas a diferença não foi considerada significativa. Nos testes de resistência, as bombas foram operadas até que a saída ficasse reduzida a um filete d'água. Dois anéis de couro duraram 620 e 807 horas, enquanto dois anéis de poliuretano resistiram apenas 270 e 324 horas. A inspeção das bombas depois dos testes, porém, revelou que os cilindros, nos quais tinham sido usados anéis de couro, estavam muito arranhados, enquanto os cilindros com anéis de poliuretano permaneciam em boas condições, com o desgaste acontecendo apenas nos anéis.

As conclusões que podem ser extraídas deste experimento são complexas. Em termos de eficiência, os dois tipos de anel são

equivalentes. Em termos de confiabilidade e disponibilidade da bomba, o tempo médio entre falhas (MTBF) dos anéis de couro é maior que o dos anéis de poliuretano; mas, como eles tendem a danificar o cilindro, o custo de manutenção a longo prazo pode ser maior. Por outro lado, os anéis de couro podem ser fabricados com materiais locais, enquanto os anéis de poliuretano talvez tenham que ser importados. Assim, uma possível estratégia seria dar preferência a anéis de poliuretano, mas usar anéis de couro em caso de necessidade, por curtos períodos, se não houver um anel de poliuretano disponível no momento.

Os Rolamentos do Braço da Bomba O projeto do braço da bomba também ilustra aspectos interessantes do papel da eficiência, disponibilidade e custos na escolha dos componentes. O papel do rolamento do braço da bomba, que aparece no diagrama da Figura 2.50, é reduzir o atrito do braço com o eixo de sustentação, permitindo que gire livremente. A Figura 2.53 mostra dois arranjos possíveis para o rolamento. O primeiro é um rolamento de esferas, formado por um conjunto de esferas metálicas montadas no interior de um anel chamado pista. Quando são de *boa qualidade*, os rolamentos de esferas apresentam um atrito extremamente baixo. Como são feitos de aço, são também muito duráveis. Para fabricar um rolamento de esferas, porém, é preciso usinar as peças metálicas com extrema precisão, o que, por sua vez, requer equipamentos sofisticados e técnicos experientes. Uma solução alternativa é usar um rolamento de plástico tipo “cartola”, também mostrado na Figura 2.53. Embora esse tipo de rolamento se desgaste mais depressa que o rolamento de esferas, é mais barato e pode ser produzido com facilidade a partir de um molde. Isso significa que pode ser fabricado nos países em desenvolvimento, enquanto um rolamento de esferas provavelmente teria que ser importado, o que implicaria um aumento significativo do custo.

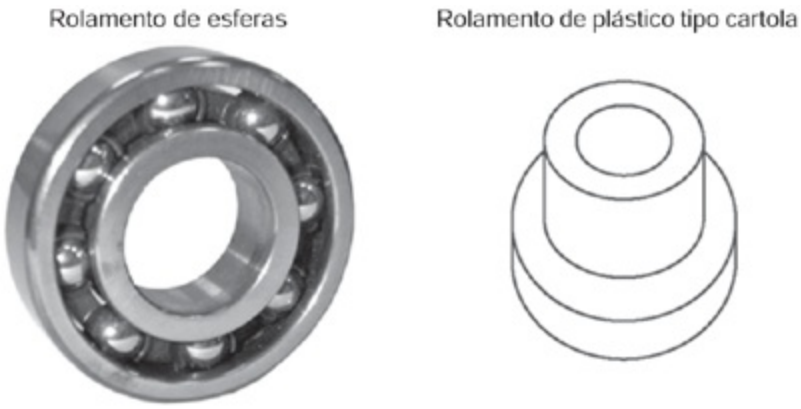


Figura 2.53 Dois tipos de rolamento para o braço da bomba.

PROBLEMAS

1. **Memória de Curto Prazo**
   Dê um exemplo, semelhante ao de "fazer contas de cabeça", no qual o principal obstáculo para a solução de um problema seja a capacidade limitada da memória de curto prazo.

2. **Por Que o Meu Carro Não Liga?**
   Escreva um conjunto de 3 a 5 regras ou instruções que podem ajudar um motorista a descobrir por que seu carro se recusa a partir.

3. **Planejamento da Solução de um Problema**
   Pense em um projeto no qual você já trabalhou (na escola, no trabalho ou em atividades de lazer) e no qual você fez parte de uma equipe que levou pelo menos um dia ou dois para encontrar a solução de um problema.
   - Dê exemplo de um caso em que você usou a estratégia de dividir para conquistar para resolver o problema.
   - Dê um exemplo de encadeamento para a frente, de encadeamento para trás, e de partir de um ponto intermediário para chegar à solução do problema.

4. **Uso de Grafos para Representar Informações**
   Dê um exemplo ou dois do uso de um grafo (nós e arestas) para representar informações a respeito de um processo comum, do dia a dia.

5. **Organização de um Catálogo de Peças**
   Entre no site de um revendedor de peças (se tiver dificuldade, peça a ajuda de um professor). Desenhe um mapa conceitual hierárquico, com pelo menos dez conceitos, que represente o modo como o revendedor organiza seus produtos. Os produtos são classificados principalmente de acordo com a forma ou com a finalidade?

6. **Construção de um Mapa Conceitual: Rio, Viga, etc.**
   Organize as palavras a seguir em um mapa conceitual e identifique o domínio.

Rio	Tinta	Vigas
Cabos	Conexões	Fundações
Rebites	Vergalhões	Catenária
Concreto	Leito da estrada	Asfalto
Fôrmas	Treliça	Pedágio

7. **Construção de um Mapa Conceitual: Salsicha, Vegemite etc.**
   Organize as palavras a seguir em um mapa conceitual e identifique o domínio.

Salsicha	Vegemite	Suco de laranja	Congee	Manteiga
Bebidas	Café	Iogurte	Cereais	Açúcar
Corn Flakes	Frutas	Aveia	Estrelados	Tangerina
Torrada	Chá	Geléia	Quaker	Pochê

Mexidos	Carne	Banana	Café da manhã	Bacon
Rosquinha	Feijão	Fermento	Ovos	Carboidratos

8. **Mapa Conceitual: Governo dos Estados Unidos**

   Nas duas colunas abaixo estão conceitos e termos relacionais que caracterizam aspectos do governo dos Estados Unidos. Desenhe um mapa conceitual que mostre as relações entre os conceitos. Cada relação deve ser usada pelo menos uma vez, mas qualquer relação pode ser usada mais de uma vez.

Conceitos	Relações
Governo	Tem como parte
Legislativo	Aprova
Executivo	Pode vetar
Judiciário	Analisa
Leis	Nomeia
Regulamentos	Aprova

9. **Como Tudo Funciona**

   Vá ao site ComoTudoFunciona (http://www.hsw.uol.com.br/) e procure um artigo a respeito de um produto interessante. Usando o exemplo do carro da Seção 2.2 como modelo, desenhe um mapa conceitual com pelo menos 10 conceitos. Descreva o uso de hierarquia na sua versão final.

10. **Especificações e Funções de um Produto**

    Procure na Internet as especificações de algum produto interessante. Escreva 3 a 5 especificações na forma de restrições matemáticas. Além disso, escreva 3 a 5 funções do produto que não aparecem como parte das especificações, mas que você

considera importantes para o projeto do produto.

11. Forma, Função e Ambiente

Usando o exemplo do relógio, da Seção 2.3, como modelo, escolha outro tipo de produto que tenha várias formas. Explique qual é a função do produto e dê exemplos de como o ambiente (que pode ser o ambiente de engenharia, o ambiente de operação, ou ambos) afeta a sua forma. Eis algumas sugestões:

- automóveis
- iogurte (puro, com polpa de frutas, com pedaços de frutas)
- videogames
- pontes

12. Compra de um Produto Defeituoso

Discuta um exemplo do que você considera violação de uma restrição do ambiente operacional em um produto que você comprou. Qual era a restrição e qual foi a violação?

13. Um Produto Mal Projetado

Dê um exemplo de produto (bem, processo ou serviço) que você considera que "errou o alvo" porque o fabricante e o consumidor tinham opiniões diferentes quanto à região de aceitabilidade. Justifique.

14. Alternativas e Restrições de um Projeto

Escolha um cenário semelhante ao problema de levantar um peso até uma prateleira. Identifique uma série de restrições. Imagine várias abordagens (entre 3 e 5) e discuta se são compatíveis com as restrições.

15. Sistema de Remoção de Neve

Uma necessidade dos países frios é a remoção de neve durante o inverno. A neve deve ser removida das ruas e entradas de

garagem para que os veículos possam passar. A neve, e especialmente o gelo, também deve ser removida dos telhados para evitar danos.

(a) Desenhe um diagrama semelhante ao da Figura 2.22 mostrando as considerações de projeto do ponto de vista do fabricante e do consumidor, no caso de um sistema para remover a neve de uma entrada de garagem.

(b) Desenhe um diagrama semelhante ao da Figura 2.22 mostrando as considerações de projeto do ponto de vista do fabricante e do consumidor, no caso de um sistema para remover a neve do telhado de uma casa.

(c) Uma forma de remover a neve é derretê-la usando aquecedores elétricos. Investigue a possibilidade de usar esse método para remover a neve de uma entrada de garagem e de um telhado, de acordo com os critérios dos itens anteriores.

16. O Prêmio Ansari X

Faça uma pesquisa na Internet a respeito do Prêmio Ansari X e descubra quais eram as regras da competição. Analise o veículo ganhador, construído por Burt Rutan e Paul Allen, e determine de que forma as regras da competição estabeleceram as restrições e considerações de projeto que guiaram a construção do Space Ship One. Descreva, em 200 a 300 palavras, o modo como o projeto final da espaçonave foi influenciado pelo ambiente de engenharia e pelas restrições impostas pelas regras da competição.

17. Outros Modelos de Bombas

Descreva outros modelos de bombas que podem ser operados por crianças e que são mais eficientes que uma bomba manual.

18. Bomba de Engrenagens

Além da bomba de êmbolo, existem outros tipos de bombas. Um

tipo muito popular é a *bomba de engrenagens*.

(a) Faça um desenho esquemático de uma bomba de engrenagens externa e explique como funciona.

(b) Faça um desenho esquemático de uma bomba de engrenagens interna e explique como funciona.

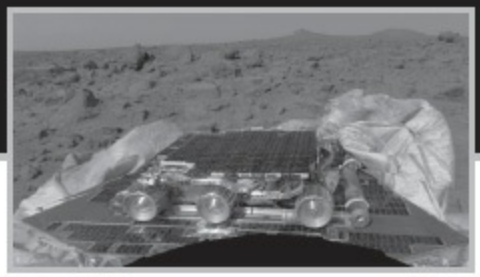
(c) Faça uma lista das vantagens e desvantagens da bomba de êmbolo em relação à bomba de engrenagens. Descreva um ambiente operacional no qual uma bomba de engrenagens funciona melhor que uma bomba de êmbolo, e vice-versa.

[1]http://www.rog.nmm.ac.uk/museum/harrison/longprob.html.

[2]O autor agradece ao Dr. Stephen Silliman, do Departamento de Engenharia Civil e Ciências Geológicas da University of Notre Dame em South Bend, Indiana, pela ajuda na preparação deste exemplo. O Dr. Silliman e seus alunos trabalharam com comunidades rurais no Haiti e Benin para criar fontes adequadas de água potável.

CAPÍTULO

3



Aprendizado e Solução de Problemas

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- mostrar algumas diferenças entre o modo como veteranos e novatos resolvem problemas, relacionar essas diferenças ao modelo cognitivo do capítulo anterior e descrever algumas estratégias para o estudo da engenharia que promovem a competência na solução de problemas;
- analisar problemas em termos do grau de entendimento que exigem, como aplicação, análise e síntese;
- formular uma estratégia para a solução de problemas de engenharia envolvendo os seguintes passos: definição do problema, pesquisa dos fundamentos, planejamento, implementação, verificação dos resultados, generalização e documentação dos resultados; aplicar esta estratégia a problemas simples;
- explicar o que é uma *heurística* e dar exemplos do uso de heurísticas para resolver problemas de engenharia.

3.1 INTRODUÇÃO

O aprendizado e a solução de problemas estão intimamente ligados. Pode-se mesmo dizer que aprendemos para resolver problemas. Tanto na escola como na "vida real", o grau de entendimento de uma pessoa é medido por sua capacidade de resolver problemas. O reverso da

medalha é que não podemos aprender conceitos novos, de forma profunda e significativa, sem dedicar um esforço considerável ao uso desses conceitos para resolver problemas. Como foi discutido no Capítulo 2, aumentamos nossos conhecimentos estabelecendo uma série de ligações entre os conceitos guardados na memória de longo prazo, e é necessária uma atividade intelectual consistente, que envolve a solução de problemas, para que essas ligações se formem.

No restante deste capítulo são examinadas questões relativas a aprendizado e solução de problemas e é proposta uma abordagem prática, baseada nas ideias de representação do conhecimento do Capítulo 2, para adquirir competência nas duas áreas. A Seção 3.2 trata das diferentes fases do processo de aprendizado e da natureza da competência. Na Seção 3.3 é discutido um sistema para avaliar o grau de entendimento, chamado Taxonomia de Bloom, que se baseia na capacidade de resolver problemas cada vez mais difíceis. Na Seção 3.4 é apresentada uma estratégia de estudo, baseada em recomendações do National Research Council, que ajuda o estudante a melhorar o grau de entendimento. Na Seção 3.5 é proposta uma estratégia geral para resolver os problemas de engenharia encontrados tanto na faculdade como na vida profissional, enquanto na Seção 3.6 esta metodologia é usada para resolver um problema típico, o de calcular a quantidade de dióxido de carbono produzida por um automóvel em um ano. A Seção 3.7 trata da solução de problemas maiores, neste caso um projeto de fim de curso de um curso de engenharia. Finalmente, a Seção 3.8 contém uma série de regras de bolso para resolver problemas, chamadas *heurísticas*, que podem ser úteis para resolver problemas “empacados”.

3.2 COMPETÊNCIA E O PROCESSO DE APRENDIZADO

Basicamente, a prática da engenharia consiste em usar a criatividade

humana para resolver problemas técnicos. O objetivo da formação de um engenheiro é permitir que os estudantes se tornem engenheiros competentes. O que significa ser "competente" em alguma coisa? O Dicionário Aurélio – Século XXI define *competência* como "qualidade de quem é capaz de apreciar e resolver certo assunto, fazer determinada coisa; capacidade, habilidade, aptidão, idoneidade". Reconhecemos as pessoas que são competentes em uma determinada área pela capacidade de encontrar rapidamente soluções eficazes para problemas difíceis. Os principiantes, por outro lado, levam muito mais tempo para resolver problemas, e suas soluções tendem a ser menos engenhosas e completas.

Para você que está começando a estudar engenharia, porém, aqui vai a má notícia: por mais brilhante que você seja, não existem atalhos ou caminhos fáceis para a competência. As pesquisas mostraram que, mesmo no caso dos gênios, são necessários aproximadamente dez anos de trabalho duro para alguém se tornar um verdadeiro expoente em um campo de atividade. Mozart começou a compor aos quatro anos de idade, mas só produziu sua primeira obra-prima na adolescência. O mesmo tem sido observado no caso dos jogadores de xadrez. O falecido Bobby Fischer, um dos maiores campeões de xadrez de todos os tempos, aprendeu a jogar com seis anos, mas só se tornou grande mestre aos 15. Dez anos, naturalmente, é o dobro do tempo que a maioria dos estudantes passa em uma escola de engenharia, e, na verdade, dez anos depois de entrar na faculdade, a maioria dos engenheiros já está no *segundo* emprego. É importante reconhecer de saída que sua educação profissional ainda estará incompleta quando você se formar, o que torna importante criar bons hábitos e desenvolver estratégias eficazes de aprendizado enquanto você ainda está na faculdade. Isso nos leva à boa notícia: as pesquisas também mostraram que as pessoas podem aprender estratégias para organizar os pensamentos que facilitam tremendamente o aprendizado e a solução de problemas.

As pesquisas revelam que os indivíduos competentes em um certo campo são capazes de armazenar e usar aproximadamente 50.000 elementos de informação, entre os quais não estão apenas fatos isolados, mas também padrões familiares. Um bacharel americano típico, que pode ser considerado "competente" em inglês escrito e falado, tem um vocabulário de 50.000 a 100.000 palavras [DA94]. O que distingue um indivíduo competente de um novato, porém, não é o número de palavras armazenadas na memória de longo prazo e sim a capacidade de acessá-las e usá-las. Os indivíduos competentes têm uma capacidade muito maior que os novatos de localizar as informações relevantes para um determinado problema e aplicá-las. Problemas complexos para um novato podem parecer tão simples para um indivíduo competente quanto somar dois números de um algarismo é para nós, e os indivíduos competentes muitas vezes obtêm uma resposta tão depressa que têm dificuldade para explicar exatamente como a obtiveram.

O processo de aprendizado de um assunto pode ser dividido em três fases, que vamos chamar de fase de *exposição*, fase de *associação* e fase de *automatismo*. Para ilustrar o que acontece em cada uma dessas fases, vamos tomar o exemplo de Diogo, uma criança que está aprendendo a ler. Na fase de exposição, a pessoa introduz informações sensoriais (imagens, sons, etc.) na memória de curto prazo e estabelece umas poucas ligações provisórias entre as novas informações e os conceitos armazenados na memória de longo prazo. Quando Diogo está aprendendo a ler, durante a fase de exposição ele pode ser apresentado às formas e nomes das letras e estimulado a ligar essas ideias a objetos familiares, como em "p de pato". A professora pode até mesmo desenhar a letra "p" em forma de pato para ajudá-lo a fazer a associação. Durante a fase de exposição, a execução das tarefas é imperfeita e trabalhosa. Imagine que Diogo esteja tentando ler uma palavra. A criança pode conhecer os sons das letras, mas precisa colher essas informações na memória de longo

prazo, uma letra de cada vez. Como o tempo necessário para colher uma informação na memória de longo prazo é de 1 a 2 segundos, a criança tem dificuldade para ligar os sons de modo a formar uma palavra reconhecível.

Na fase de associação, o estudante melhora sua capacidade de acessar e usar um conceito associando-o a outros conceitos. Duas coisas acontecem nessa fase: primeiro, novas ligações são formadas entre conceitos, de modo que fatos isolados passam a fazer parte de pedaços maiores de informação; segundo, as ligações já existentes ficam mais fortes por serem usadas com frequência. Na fase de associação, quando está aprendendo a ler, uma criança passa a pronunciar melhor os sons, começa a reconhecer palavras inteiras ou partes de palavras e prevê qual será a palavra a seguir (às vezes erradamente) pelo sentido da frase. É na fase de associação que a competência realmente começa a ser adquirida. O ponto mais importante desta parte do processo é que *fazer as associações exige um esforço considerável por parte do estudante*. Para fazer e reforçar associações, é preciso praticar repetidamente a aplicação do conceito em uma grande variedade de contextos, o que requer dedicação. Sem um esforço ativo, não é possível fazer associações adequadas.

Quando o estudante continua a praticar o uso de conceitos na fase de associação, suas ações se tornam cada vez mais automáticas. Fatos individuais se unem intimamente em padrões ou pedaços de conhecimento de nível mais elevado. Enquanto na fase de exposição o estudante tem consciência nítida do processo de buscar cada fato na memória, na fase automática o estudante executa tarefas complexas sem tomar consciência dos passos individuais e muitas vezes tem dificuldade para explicar como ou por que executou determinada tarefa. É assim que quase todos leem esta frase. As palavras impressas parecem adquirir instantaneamente um significado; quando estamos realmente interessados em uma leitura, não notamos quais são as letras ou mesmo as palavras que estamos lendo.

3.3 O QUE VOCÊ SABE? NÍVEIS DE ENTENDIMENTO

O objetivo do processo de aprendizado é adquirir um entendimento profundo e significativo de um campo do conhecimento. O que significa, porém, "entendimento profundo" e como podemos adquiri-lo? Essas foram algumas das perguntas que Benjamin Bloom, David Krathwohl e uma grande comissão de colegas formularam depois da Convenção de 1948 da American Psychological Association, em uma pesquisa para classificar as metas do processo educativo. As conclusões desse estudo, publicado em 1956, descrevem uma hierarquia de resultados do processo de aprendizado, que vai dos mais simples aos mais complexos, conhecida como *Taxonomia de Bloom*. Desde que a Taxonomia de Bloom foi proposta, os educadores a têm usado largamente como instrumento para formular planos de ensino e estabelecer estratégias de avaliação. Nesta seção, explicamos a Taxonomia de Bloom, que dará ao leitor "segredos de cocheira" para obter melhores resultados nos estudos, especialmente com relação aos seguintes pontos:

- avaliação do nível de entendimento do assunto;
- tipos de questões que costumam ser propostas em deveres de casa e exames, por que as questões são propostas desta forma e que tipos de respostas os professores esperam;
- qual é a melhor estratégia de aprendizado.

A Taxonomia de Bloom, mostrada na Figura 3.1, define seis níveis de entendimento, que são ordenados dos mais simples, que envolvem apenas um conhecimento superficial, até os mais complexos, que correspondem a um conhecimento profundo do assunto. Cada nível sucessivo da taxonomia se baseia nos anteriores; um estudante deve dominar cada nível antes de passar ao nível seguinte.

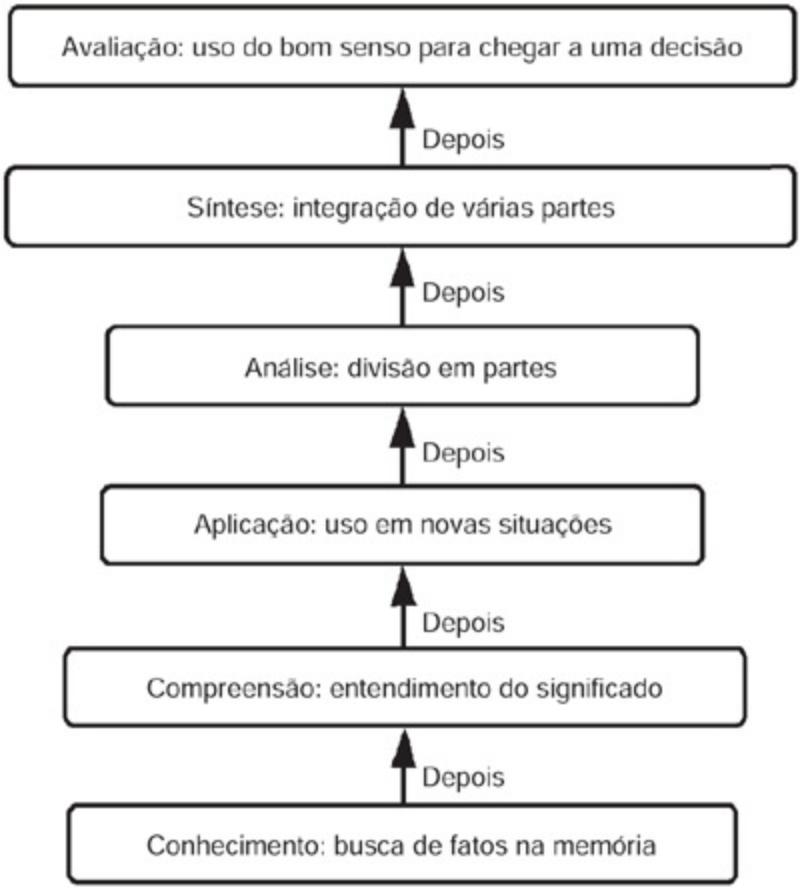


Figura 3.1 Níveis de entendimento da Taxonomia de Bloom.

Nas seções a seguir são descritos os níveis da Taxonomia de Bloom, com exemplos dos tipos de tarefas e perguntas que testam o entendimento em cada nível. Embora a Taxonomia de Bloom seja um instrumento importante para avaliar o grau de entendimento de um estudante, é importante fazer algumas ressalvas:

- Os níveis da taxonomia medem o grau de entendimento de um assunto específico e *não* a capacidade cognitiva geral de um estudante. Todo mundo conhece melhor certas áreas do que outras. Embora isso pareça óbvio, um dos perigos de usar uma escala de avaliação como a Taxonomia de Bloom é que alguns estudantes podem associar uma "nota" baixa à falta de inteligência, o que pode fazê-los desanimar, tornando mais difícil o aprendizado. Tome cuidado para não cair nesta

armadilha. Por outro lado, se você está tendo dificuldade para compreender algum ponto da matéria e isso está retardando o seu progresso, faça um esforço extra para melhorar, como tirar dúvidas com o professor.

- Se o grau de "entendimento" (definido como a capacidade de compreender o significado de um conceito) está baixo, tenha em mente que alguns conceitos são realmente difíceis de entender! Em muitas situações, devemos nos contentar com um *conhecimento prático* que permita aplicar o conceito, mesmo que não sejamos capazes de compreendê-lo perfeitamente. Nas suas famosas *Aulas de Física*, o físico Richard Feynman, ganhador do Prêmio Nobel, afirmou o seguinte a respeito da energia: "É importante reconhecer que na física, hoje, não sabemos o que é a energia." Mesmo assim, é possível aplicar um entendimento parcial do conceito de energia a muitas situações práticas, até mesmo em cursos introdutórios de ciência e engenharia. A ideia de conhecimento prático está presente em todos os níveis da taxonomia.
- Enquanto as tarefas e perguntas apresentadas nas seções a seguir se destinam a testar graus específicos de entendimento, na prática a solução de qualquer problema requer entendimento em todos os níveis. O planejamento de estratégias e a tomada de decisões, os dois níveis mais elevados da taxonomia, estão presentes em quase tudo que fazemos. Como a maioria dos problemas tem vários aspectos, devemos nos perguntar que habilidade específica se aplica a que parte do problema. Assim, por exemplo, para responder à pergunta "Quem inventou o avião?" é preciso colher informações históricas (planejamento) e decidir quem está com a razão em face de informações conflitantes (tomada de decisões), mas não é preciso um conhecimento detalhado a respeito do funcionamento dos aviões.

3.3.1 Conhecimento: Busca de Fatos na Memória

Embora o nome possa sugerir um nível mais elevado de entendimento, “conhecimento”, na Taxonomia de Bloom, é simplesmente a capacidade de buscar fatos na memória. Esses fatos podem ser detalhes isolados como nomes, datas e lugares, fórmulas matemáticas ou mesmo teorias completas, mas o entendimento no nível de “conhecimento” envolve apenas a capacidade de trazer esses fatos à mente, não a capacidade de usá-los para algum propósito de nível mais alto. Um exemplo de conhecimento neste nível é ser capaz de se lembrar da famosa equação de Einstein $E = mc^2$, sem que haja necessidade de explicá-la.

Palavras-Chave:

Diga quem	Diga o quê	Diga quando
Diga onde	Identifique	Escolha
Defina	Lembre	Diga

Exemplos de Tarefas e Perguntas:

- Qual é o valor de π?
- Enuncie o Teorema de Pitágoras.
- O pH de um certo líquido é 3,2. O líquido é um ácido ou uma base?
- Quais são as partes de um mapa conceitual?

3.3.2 Compreensão: Entendimento do Significado

O nível seguinte, “compreensão”, consiste em entender o significado de um conceito. Para demonstrar compreensão, é preciso explicar o conceito ou traduzi-lo de uma forma para outra, como acontece quando substituímos um problema descrito em palavras por uma equação.

Palavras-Chave:

Diga em suas próprias palavras	Resuma	Explique
Esclareça	Classifique	Diga qual é o significado
Interprete	Dê um exemplo	Diga que parte não combina
Diga qual é a melhor explicação		

Exemplos de Tarefas e Perguntas:

- Explique, com suas próprias palavras, o que é um mapa conceitual.
- Desenhe um mapa conceitual que corresponda a uma descrição de um parágrafo.
- Um triângulo retângulo tem lados A, B e C cujos comprimentos são a, b e c, respectivamente. Se $a^2 - b^2 + c^2 = 0$, qual dos lados é a hipotenusa?
- Escreva a expressão $a^2 + b^2$ como uma fórmula de uma planilha eletrônica ou um comando do Matlab.
- Dê um exemplo de engenharia que ilustre o provérbio “Mais vale prevenir do que remediar”.
- Descreva em palavras as diferentes regiões do gráfico da corrente em função da tensão de um componente eletrônico à sua escolha.

3.3.3 Aplicação: Uso em Novas Situações

Aplicar um conhecimento é definido como usá-lo em uma situação nova. O nível “aplicação” do entendimento consiste em reconhecer que uma certa regra, lei ou equação aprendida em aula pode ser

usada para resolver problemas, seja em provas ou deveres de casa, seja em aulas práticas ou estágios. A aplicação, naturalmente, se baseia nos níveis de entendimento anteriores, já que não é possível aplicar um conceito sem conhecê-lo e compreendê-lo!

Palavras-Chave:

Formule	Demonstre	Preveja
Explique como	Diga o que aconteceria se	Mostre que
Determine, a partir de hipóteses		

Exemplos de Tarefas e Perguntas:

- Dado um triângulo retângulo de hipotenusa 10 e largura 8, qual é a altura?
- O que acontece se as extremidades de um fio são ligadas diretamente aos terminais de uma bateria?
- Que altura atinge um projétil lançado verticalmente a partir do solo com uma velocidade inicial de 30 m/s? Despreze a resistência do ar.

3.3.4 Análise: Divisão em Partes

Bloom e seus colaboradores definem o nível seguinte da taxonomia, "análise", como a capacidade de dividir um conceito em partes. A análise requer não só a capacidade de compreender conceitos isolados e aplicá-los, mas a compreensão das relações entre conceitos. O entendimento no nível "análise" também envolve a capacidade de tirar conclusões a partir de uma série de fatos. A intuição que nos permitiu decompor o conceito de carro em sistema de propulsão, sistema elétrico e compartimento de passageiros representou uma transição dos níveis de compreensão e aplicação para o nível de análise. Por outro lado, simplesmente memorizar como um fato, como a divisão de um carro em componentes, é um entendimento no nível

de conhecimento, e não de análise.

Palavras-Chave:

Divida	Diga que ideias se aplicam	Compare
Confronte	Diga qual é a relação entre	Diga quais são as conclusões
Decomponha	Diga qual é a razão	Diga o que pode ter causado

Exemplos de Tarefas e Perguntas:

- Por que razão algumas vigas têm perfil semelhante ao de uma letra “I”?
- Se nada acontece quando você faz girar a chave de ignição de um carro, qual pode ser a causa?
- O livro *The Soul of a New Machine/A Alma de uma Nova Máquina*, de Tracy Kidder, descreve a criação de um novo modelo de computador na Data General Corporation em 1979. Desenhe um mapa conceitual que ilustre as partes principais da equipe responsável pelo projeto do novo computador e as relações entre essas partes.
- A partir dos valores da dilatação de um material ao ser submetido a forças de intensidades diferentes, determine o tipo do material.
- Quais são as principais diferenças entre os arquivos JPEG, GIF e bitmap?

3.3.5 Síntese: Integração de Várias Partes

Síntese é a capacidade de reunir várias partes para formar um todo. Este “todo” pode ser praticamente qualquer coisa: uma planta

arquitetônica, um relatório, a demonstração de um teorema, um romance, uma peça musical, etc. A síntese requer um alto grau de intuição e a capacidade de montar novas estruturas. Para criar o mapa conceitual de um novo projeto, mas não para criar o mapa conceitual de um projeto já existente, é preciso entendimento no nível de síntese. A síntese está intimamente ligada à análise; para que o objeto que está sendo sintetizado cumpra adequadamente sua função, é preciso que a pessoa tenha um sólido entendimento em nível de análise. No processo de síntese, uma pessoa quase sempre descobre uma nova forma de juntar várias partes para resolver um problema (tem um momento de "eureka") e depois passa muito tempo analisando a solução proposta para verificar se é satisfatória, antes de passar para a etapa seguinte.

Embora a síntese seja uma atividade de alto nível, a solução de praticamente qualquer problema exige algum tipo de síntese, já que é indispensável termos um plano ou estratégia para chegarmos à solução. Mesmo para resolver um problema "objetivo" como o de calcular o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo, temos que seguir um plano simples, que começa com a compreensão do enunciado e termina com a apresentação do resultado.

Palavras-Chave:

Crie	Componha	Projete
Invente	Desenvolva	Resolva
Formule	Demonstre	Planeje

Exemplos de Tarefas e Perguntas:

- Formule uma estratégia para estudar para uma prova.
- Projete uma estrutura leve, em forma de treliça, para cobrir um vão de 10 m e ceder no máximo 1 cm quando submetida a uma carga de 100 kg aplicada no centro do vão.

- Escreva um ensaio a favor ou contra o uso de engenharia genética na produção de alimentos.
- Prove que a equação $x^n + y^n = z^n$ não tem soluções para x, y e z inteiros quando $n > 2$.

3.3.6 Avaliação: Uso do Bom Senso para Chegar a uma Decisão

Avaliar é usar o bom senso para julgar o valor de uma ideia. A princípio, pode não parecer razoável que a avaliação seja o nível mais alto de entendimento da Taxonomia de Bloom; afinal de contas, não é mais difícil encontrar uma solução para um problema que escolher entre duas soluções? A resposta é que o ato de escolher, isoladamente, não constitui uma avaliação, mas apenas a aplicação de uma regra. Para responder à pergunta "Qual é *mais cara*, uma casa de palha ou uma casa de tijolo?", não é preciso fazer uma avaliação, no sentido em que a palavra é usada na Taxonomia de Bloom. Em vez disso, basta calcular o custo de cada uma das casas, usando certos critérios, e depois comparar os custos. Por outro lado, para responder à pergunta "*Faz mais sentido* construir uma casa de palha ou uma casa de tijolo, nestas circunstâncias?" é preciso fazer uma avaliação. Além disso, dependendo das circunstâncias, uma das casas pode ser claramente a opção mais indicada, ou a escolha pode ser nebulosa.

A ideia principal que distingue uma simples comparação de uma avaliação é o uso do *bom senso*, que envolve variáveis como *risco* e *incerteza*. Ao contrário da comparação, a avaliação requer a capacidade de visualizar diferentes cenários, analisar possíveis resultados e escolher a opção mais adequada para obter os resultados desejados. A escolha de uma opção também tem consequências, que podem ser graves. Se uma das circunstâncias envolvidas na construção de uma casa é a proteção contra predadores, a escolha de uma casa de palha pode ser fatal. Por outro lado, em uma localidade de clima ameno onde os materiais de construção são escassos, uma

casa de palha pode ser a melhor opção.

Palavras-Chave:

Julgue	Otimize	Diga qual é o melhor
Decida	Estime	Critique
Defenda	Avalie	Diga qual é o mais adequado

Exemplos de Tarefas e Perguntas:

- Qual deve ser o próximo movimento em uma partida de xadrez?
- Uma empresa emergente criou uma nova tecnologia para fabricar dispositivos semicondutores que afirma ser mais barata que as tecnologias em uso. Sua companhia deve usar a nova tecnologia em um produto que pretende lançar? Quais são os riscos envolvidos?
- Um amigo lhe disse que conseguiu uma cópia da prova de amanhã. Que atitude você deve tomar?

3.3.7 Responsabilidades Sociais da Tomada de Decisões

A capacidade de fazer avaliações corretas é uma das qualidades mais importantes de um engenheiro. Em grupos de projeto bem-sucedidos, cada membro do grupo acredita que os outros membros do grupo tomarão decisões corretas em relação a sua parte do projeto. Se um membro da equipe não possui um entendimento do projeto no nível de avaliação, é extremamente improvável que o projeto corra bem.

Por outro lado, a não ser no caso de medidas de rotina, é provável que alguns, se não todos, os membros de uma equipe tenham alguma deficiência como tomadores de decisões. Mesmo que uma pessoa tenha grande experiência em uma área de trabalho, existe quase sempre uma certa dose de risco e incerteza associada a cada decisão.

Além do mais, nos projetos de classe, todos os membros da equipe em geral não têm praticamente nenhuma experiência na tarefa que eles se propõem a executar e podem ter apenas uma vaga noção do assunto, mesmo nos níveis de síntese e análise. Só porque você não está tão preparado como gostaria no início de uma tarefa, isso não quer dizer que você não possa cumpri-la. O importante é que você saiba de antemão que encontrará obstáculos pela frente e se prepare para enfrentá-los. A capacidade de tomar decisões corretas surge apenas com a experiência, e algumas das experiências mais valiosas acontecem quando as coisas dão errado.

3.4 COMO OBTER BONS RESULTADOS NO APRENDIZADO

De posse do conhecimento do processo de aprendizado e de como medir o sucesso, vamos agora voltar a atenção para alguns meios de obter melhores resultados no processo de aprendizado. Seguindo essas recomendações, você chegará com mais facilidade aos níveis mais altos de entendimento, com o benefício adicional de obter melhores notas nos exames!

Nossas recomendações se baseiam nos resultados de um estudo de vários anos, realizado no final da década de 1990 e início da década de 2000 pelo National Research Council (NRC) a respeito do modo como as pessoas aprendem e das melhores formas de ensinar história, matemática e ciências, particularmente no primeiro e segundo graus [BBC00][DB05]. Esse trabalho se baseou em três princípios fundamentais:

1. Os estudantes chegam à sala da aula com preconceitos a respeito do modo como o mundo funciona. Se esses preconceitos estão errados e não são corrigidos, os alunos podem não assimilar novos conceitos e informações, ou aprendê-los apenas para

passar nos exames, voltando aos antigos preconceitos fora da sala de aula.

2. Para se tornarem competentes em uma área de estudo, os alunos devem (a) ter conhecimentos sólidos dos fatos relevantes, (b) compreender os fatos e ideias no contexto de um arcabouço conceitual e (c) organizar o conhecimento em formas que facilitem sua recuperação e aplicação.
3. Uma abordagem "metacognitiva" do aprendizado pode ajudar os estudantes a aprender a controlar o próprio aprendizado, definindo metas parciais e monitorando seu progresso em direção a essas metas.

Embora essas recomendações tenham sido dirigidas aos professores, acredito que sejam também importantes mensagens para os estudantes. Nas seções a seguir, é discutido o que essas recomendações significam para você, estudante.

3.4.1 Prepare-se para Aprender

A primeira recomendação do estudo do NRC tem a ver com o que o aluno já sabe ao começar a estudar novos assuntos. Uma das conclusões principais é que o aluno deve se preparar antes de estudar novos tópicos.

Esteja Física e Mentalmente Preparado O primeiro requisito para aprender é a atitude. Ao iniciar o processo de aprendizado, você deve estar concentrado no que está fazendo. Isto não é tão fácil como pode parecer, já que a maioria dos estudantes leva uma vida agitada, com múltiplos interesses. Lembre-se de que no primeiro estágio do processo de aprendizado, o nível de exposição, você dispõe no máximo de alguns segundos para transferir o que viu e ouviu da memória de curto prazo para a memória de longo prazo. Por essa razão, é importante manter-se concentrado e alerta. Também é

importante não sobrecarregar a memória de curto prazo com pensamentos irrelevantes para a tarefa do momento.

É essencial minimizar qualquer impedimento físico do aprendizado. Chegue na hora e sente-se em um lugar de onde possa acompanhar a aula com facilidade. Não deixe de levar os materiais indicados pelo professor. Tenha uma boa noite de sono. Procure fazer uma lista de resoluções desse tipo, que são uma questão de bom senso, mas em geral exigem planejamento e força de vontade. Se você for capaz de ajustar seus horários para atender a essas condições básicas, isso terá um efeito fantástico sobre a sua capacidade de aprender, permitindo equilibrar as aulas com o resto das atividades.

Faça um Balanço do que Você Já Sabe Os dois primeiros passos para consertar um pneu furado de bicicleta consistem em localizar o furo e lixar a superfície em volta do furo para que o remendo grude melhor. Uma abordagem análoga se aplica ao aprendizado: para se preparar para aprender um tópico novo, você deve primeiro rever o que já sabe a respeito do assunto, adquirir uma ideia do que ainda não sabe e "lixar" alguns dos pontos aos quais você estará atrelando novos conhecimentos, o que você pode fazer exercitando circuitos neurais correlatos.

Mesmo um pequeno tempo gasto para rever conhecimentos antigos e passar os olhos nos novos conhecimentos pode ajudar a estabelecer uma boa ligação entre os dois. Quando é estimulada com uma certa ideia, nossa mente tem uma tendência natural para divagar ao longo de conceitos relacionados. Um dos segredos para tirar partido desse efeito é reservar tempo suficiente para que isso ocorra. Experimente passar dez minutos, antes de ir para a cama, antes de tomar banho de manhã ou antes de almoçar, revendo as anotações da aula passada e passando os olhos na matéria da próxima aula e observe os resultados. Você ficará surpreso com a grande diferença que esse hábito pode fazer no aprendizado, em comparação com o pequeno

esforço consciente (mas com o grande esforço subconsciente) envolvido.

Reconheça os Conceitos Errôneos Além de tomar conhecimento do que sabe, é importante que você reconheça que existem coisas que você *pensa* que sabe, mas que foram entendidas incorretamente. Assim, por exemplo, ao serem informadas de que a terra é redonda, algumas crianças imaginam que ela tem forma de panqueca [VB89] [BBC00]. Esses conceitos errôneos podem ser um entrave ao aprendizado; você deve estar consciente da possibilidade de que eles existam.

3.4.2 Adquira Conhecimentos Sólidos

A segunda série de recomendações do estudo do NRC tem a ver com o tipo de estrutura que você deve montar para sustentar o seu aprendizado. O primeiro requisito é que você tenha uma "base sólida de conhecimentos". A ideia de uma "base sólida", por sua vez, tem suas implicações: primeiro, você precisa ter acesso a um número *suficiente* de informações; segundo, você precisa compreender bem essas informações. O segundo requisito é que as informações estejam organizadas de forma lógica para que seja fácil acessá-las e aplicá-las. A Figura 3.2 mostra uma organização recomendada que atende a todas essas considerações. Os principais aspectos dessa estrutura são os seguintes:

- As novas informações são representadas hierarquicamente. Com isso, as informações são divididas em pedaços de tamanho adequado, para facilitar o acesso, e fica claro quais são os conceitos centrais e quais são os periféricos.
- Os novos conceitos são ligados a conceitos antigos. Isso aumenta os caminhos já existentes para permitir o acesso a novas ideias e serve para esclarecê-las e explicá-las.

- O próprio *processo* de organizar as informações leva a um entendimento em níveis mais elevados da Taxonomia de Bloom.

No restante desta seção, será descrita uma abordagem para montar esta estrutura, que inclui ideias para lidar com a sobrecarga de informações, sugestões para organizar as novas informações de forma hierárquica e estratégias para aprofundar o entendimento. Já falamos da importância de estar física e mentalmente preparado para aprender, e o mesmo se aplica neste caso: mais especificamente, o aluno deve estar disposto a trabalhar com afinco. A aquisição de conhecimentos sólidos e a competência em um campo de atuação exigem um aprendizado ativo: ler, escrever, fazer perguntas, cometer erros e estar disposto a mudar. Embora algumas abordagens do aprendizado sejam mais eficazes ou eficientes que outras, não existem atalhos, e uma abordagem passiva não leva a um nível profundo de entendimento. Por outro lado, se você estiver disposto a se esforçar, logo *poderá* ver os resultados.

Sobrecarga de Informações Entre 2 de junho e 30 de novembro de 2004, o engenheiro Ken Jennings, de Utah, fez história, ganhando 2.520.700 dólares ao vencer 74 rodadas consecutivas de *Jeopardy!*, um programa de televisão norte-americano com perguntas de conhecimentos gerais. Com a possível exceção de Ken e outros como ele, o estudo do NRC revela que os engenheiros e estudantes de engenharia se darão melhor na carreira se conhecerem profundamente um pequeno número de conceitos em vez de conhecer superficialmente um grande número.

Esta é uma questão que deixa professores e alunos frustrados. Existem várias razões que impelem os professores a abordar um número excessivo de tópicos em um só curso. Uma é fornecer aos alunos todos os pré-requisitos para outros cursos. Outra são as ementas das disciplinas, que podem exigir que certos tópicos sejam cobertos. A Accreditation Board for Engineering and Technology

(ABET), responsável pelo reconhecimento de programas de engenharia nos Estados Unidos, reconhece o lado negativo de especificar listas detalhadas de tópicos. Em vez disso, a ABET atribui maior responsabilidade aos cursos (e, em última análise, aos professores) para tomar decisões adequadas quanto aos tópicos a serem ensinados aos estudantes, e, mais importante ainda, quanto aos métodos a serem usados para verificar se o conteúdo dos cursos foi bem assimilado. Esperamos que uma atitude semelhante seja tomada com relação aos cursos de primeiro e segundo graus.

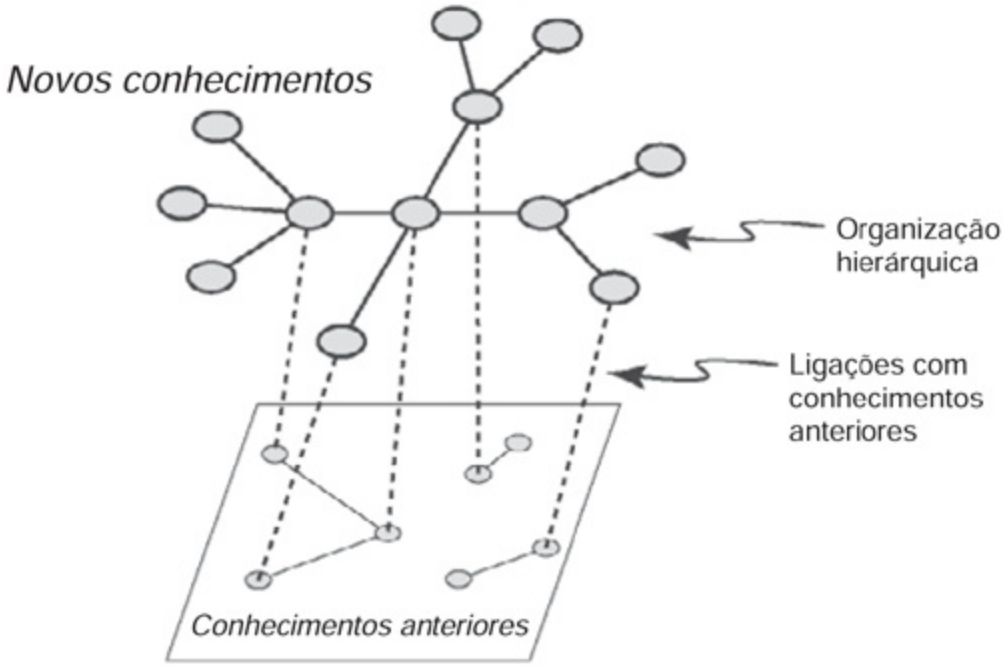


Figura 3.2 Forma recomendada para a estruturação de novos conhecimentos.

Mesmo que o professor reduza o número de tópicos ao mínimo necessário e os apresente em uma estrutura lógica, a matéria pode parecer uma torrente de informações para você, estudante, que não tem (ainda) a mesma profundidade de entendimento que o professor. Você deve esperar que isso aconteça enquanto ainda se encontra nos primeiros degraus da Taxonomia de Bloom com relação ao assunto, ainda tentando simplesmente se lembrar dos fatos e compreender o que significam. A primeira coisa de que você precisa para lidar com

esta enxurrada de informações é examiná-la e determinar o que é e o que não é importante. Nos próximos parágrafos serão apresentadas algumas técnicas para se fazer isso.

Em um curso de engenharia típico, as informações vêm de várias fontes, como aulas teóricas, aulas práticas e livros. O problema do aluno é extrair dessas fontes as informações importantes e montá-las em uma estrutura como a da Figura 3.2. Em geral, recomendo que o aluno adote uma abordagem, em relação a um assunto novo, que seja ao mesmo tempo ativa e dinâmica. Quando falo em *ativa*, refiro-me ao uso de técnicas que envolvam você fisicamente no processo de aprendizado, criando alguns artefatos tangíveis que representem seu entendimento do assunto. Quando falo em *dinâmica*, refiro-me ao uso de técnicas que lhe permitam modificar sua representação enquanto examina o assunto em várias passagens, conseguindo um novo entendimento a cada passagem. Historicamente, as pessoas têm usado muitos recursos para registrar ideias, como fazer anotações, iluminar, sublinhar e desenhar mapas conceituais. Vamos descrever um processo para montar uma estrutura de conhecimento que faz uso de uma mistura desses recursos.

Notas a Respeito de Notas Tomar notas em aula tem duas utilidades. Em primeiro lugar, você fica com um registro por escrito que pode rever mais tarde. Além disso, e mais importante, faz com que você participe ativamente da explicação. Mesmo que o professor distribua uma apostila, você *deve* tomar notas, seja nas margens da apostila, seja em um caderno separado.

Antes de ler um capítulo ou parágrafo de um livro, dê uma olhada geral para ter uma ideia da estrutura do trabalho, que o ajudará a determinar quais são os conceitos importantes e quais são os secundários antes de estudar o assunto em detalhes. Além disso, consulte o índice, que fornece uma visão geral do capítulo. Finalmente, não deixe de ler com atenção os parágrafos de abertura,

que em geral preparam o leitor para o que está por vir e frequentemente fazem uma sinopse do assunto.

Iluminar trechos e palavras é uma técnica útil para destacar conceitos importantes, e recomendamos que você faça uso desse recurso (ou copie os conceitos em um caderno, se não quiser marcar o livro) enquanto revê a matéria no livro-texto ou nas notas de aula. Em vez de parágrafos inteiros, procure assinalar palavras isoladas ou frases curtas que expressem conceitos simples, que mais tarde você possa usar para construir um mapa conceitual. Embora seja útil, o método tem limitações. Em termos da Taxonomia de Bloom, iluminar conceitos não aumenta o entendimento além de um conhecimento básico dos fatos e seu significado. Em termos da estrutura do conhecimento, iluminar ajuda a identificar conceitos, mas não a estabelecer relações entre eles.

Enquanto estiver tomando notas, quer esteja em aula ou estudando em casa, procure incluir comentários que ampliem e enriqueçam o assunto. Considere os diferentes tipos de comentários que você pode incluir em termos dos níveis de entendimento e de estrutura do conhecimento. Notas que explicam melhor as definições ou repetem a explicação em suas próprias palavras ajudam a reforçar a compreensão. Notas que sugerem ligações com outros tópicos são particularmente importantes para atingir níveis mais profundos de entendimento e para construir uma estrutura com um grande número de ligações a conhecimentos anteriores. Procure oportunidades de introduzir notas do tipo “isso me faz lembrar…”, “dê uma olhada em…”, “talvez seja por isso que…”, e outras que ajudem a estabelecer ligações entre ideias.

Uso de Mapas Conceituais Os mapas conceituais são ferramentas particularmente úteis para organizar ideias porque produzem uma representação visual que espelha a organização lógica que você está tentando assimilar. Algumas pessoas acreditam que os mapas

conceituais podem substituir outras formas de tomar notas, mas, em minha opinião, eles funcionam melhor quando são usados juntamente com outras técnicas. Embora os mapas conceituais possam ser usados como forma de tomar notas em sala, na prática isto nem sempre funciona muito bem, pois é difícil prever que forma o mapa vai assumir, o que torna difícil fazê-lo caber em uma página. Acreditamos que é melhor desenhar um mapa conceitual depois que você estudou o assunto uma vez e tem um conhecimento básico dos fatos e seu significado, mas ainda não tem uma ideia clara de como esses fatos se encaixam ou como estão relacionados a novas situações. Assim, enquanto as práticas tradicionais de iluminar palavras e frases e tomar notas são eficazes e convenientes para os primeiros níveis de entendimento, em minha opinião os mapas conceituais são o instrumento ideal para os níveis mais altos de entendimento, análise, síntese e avaliação. Os passos a seguir descrevem uma abordagem para desenhar um mapa conceitual com base nos assuntos discutidos em um curso que segue os passos descritos na Seção 2.2.

1. *Preparação.* Escolha um título para o mapa conceitual, que pode ser uma pergunta. Reúna suas fontes de consulta, como o livro-texto da matéria, notas de aula, cadernos de laboratório e deveres de casa. Prepare as ferramentas de trabalho, que podem ser adesivos autocolantes ou um programa de computador.
2. *Faça uma lista dos conceitos mais importantes*. Tente fazer de memória uma lista dos conceitos mais importantes; em seguida, consulte as notas de aula ou outras fontes e complete a lista com os itens iluminados. Considere como conceitos as referências a outras fontes de informação que você escreveu em suas notas.
3. *Introduza relações entre conceitos.* Prepare um conjunto inicial de relações entre conceitos, primeiro de memória e depois consultando suas notas e outras fontes de informação. Nesta fase, não se preocupe muito com a forma que o mapa conceitual

está assumindo.

4. *Transforme o mapa em uma hierarquia.* Identifique conceitos e relações que ajudem a transformar o mapa em uma hierarquia de pedaços de informação. Em particular, procure oportunidades para aplicar os princípios de decomposição e classificação discutidos na Seção 2.2.3. Você pode ter que acrescentar conceitos para organizar pedaços, como aconteceu no exemplo da Figura 2.14, em que acrescentamos o conceito de "sistema de propulsão". Se você tiver dificuldade para dar nomes às relações, isso significa que você não as compreendeu tão bem como deveria; consulte novamente as notas de aula ou o livro-texto e leia as seções relevantes. Mudar os nomes de alguns conceitos ou subdividi-los pode ajudar.
5. *Acrescente ligações cruzadas.* Procure ligações entre partes diferentes do mapa que ajudem a reforçar a compreensão do assunto, do mesmo modo como encontramos ligações entre o sistema de propulsão e o sistema elétrico de um carro na Seção 2.2 e na Figura 2.15. Em particular, se você ainda não fez isso, tente ligar conceitos importantes dos exemplos, aulas práticas e projetos usando relações como "ilustra", "demonstra" e "é uma aplicação de". Muitos professores de engenharia e ciências ouviram estudantes se queixarem de que as aulas práticas "não tinham nada a ver com o curso". Às vezes as aulas práticas não são bem planejadas, mas, em geral, o problema é uma falta de entendimento dos conceitos importantes que estão sendo demonstrados em laboratório e sua relação com outros conceitos do curso. As aulas práticas e os projetos proporcionam boas oportunidades para associar conceitos novos a conhecimentos antigos e de outras áreas, e muitas vezes proporcionam algumas das experiências mais "memoráveis" para a aquisição de novos conhecimentos. Finalmente, acrescente alguns conceitos e relações que liguem as novas ideias a um contexto mais amplo.

Pense, por exemplo, no último tópico ou par de tópicos coberto no curso e tente estabelecer ligações com o tópico atual. Outra ideia é consultar a ementa do curso e procurar pontos em comum entre o tópico atual e os tópicos já discutidos.

3.4.3 Metacognição: Avalie o Seu Entendimento

A terceira recomendação do NRC diz respeito à "metacognição", uma autoavaliação do grau de entendimento que constitui um ingrediente básico para o desenvolvimento de um estudante como pensador independente. A metacognição tem dois aspectos. O primeiro é um entendimento básico de como a "máquina cognitiva" funciona, para que você possa usá-la com eficiência; este é o tema principal do capítulo. O segundo é levar a cabo um diálogo interno no qual você constantemente acompanha seu entendimento do assunto e gera novas perguntas que levam a um melhor entendimento. Nesta seção, vamos discutir várias abordagens para você avaliar seu entendimento.

Mapas Conceituais e Níveis de Entendimento Há duas vantagens de desenhar um mapa conceitual: provocar um diálogo interno e fomentar uma compreensão mais profunda do assunto. Na última seção, descrevemos um processo para desenhar um mapa conceitual com base nos tópicos tratados em um curso, para facilitar o estudo, cujos passos estão relacionados ao entendimento em níveis específicos. Quando tentamos fazer uma lista de conceitos e relações de memória antes de recorrer às fontes de consulta, estamos nos testando no nível de conhecimento da Taxonomia de Bloom. O próprio ato de desenhar um mapa conceitual nos obriga a representar as informações de outra forma, o que testa o entendimento do assunto no nível de compreensão. Ligar conceitos através de relações rotuladas como "é uma aplicação de" ou "é uma ilustração de" é um teste do entendimento no nível de aplicação, enquanto dividir um mapa conceitual em pedaços organizados hierarquicamente ou dividir

um conceito em componentes mais simples testa a compreensão no nível de análise. Assim, desenhar um mapa conceitual não só constitui um método conveniente de condensar os assuntos aprendidos para futuros estudos, mas também envolve o estudante em um processo que testa metodicamente o grau de entendimento e estimula o tipo de perguntas que podem contribuir para melhorá-lo.

Troca de Papéis Discutir ideias com um amigo é, naturalmente, uma excelente forma de avaliar e melhorar o entendimento. Não só você pode observar diretamente as reações de outra pessoa (além do ponto de vista, que pode ser diferente do seu) como também a discussão constitui uma forma de *ensaiar* um diálogo que, mais tarde, você pode travar com você mesmo! O estudo do NRC recomenda o uso de um método específico de discussão chamado *troca de papéis* [PB84]. Neste método, você desempenha o papel do professor, explicando o assunto a outra pessoa, que desempenha o papel do aluno e faz perguntas. Em seguida, os papéis são trocados. O assunto da "aula" pode ser um tópico abordado em classe, o capítulo de um livro-texto, uma aula prática, um dever de casa ou qualquer outro tema relevante. As perguntas do "aluno" podem servir para esclarecer algum ponto obscuro da matéria, mas, principalmente, ele deve pedir para você explicar por que fez as coisas de uma certa forma. Ao responder às perguntas em voz alta, você pode descobrir meios alternativos, mais simples ou melhores de fazer alguma coisa. O aluno pode também fazer perguntas que testam o seu entendimento em vários níveis da Taxonomia de Bloom, tomando como modelo os exemplos de perguntas da Seção 3.3. Depois de participar de sessões de troca de papéis com colegas, teste a abordagem com você mesmo e talvez fique surpreso com o grau de compreensão que o método proporciona.

Também é possível combinar a preparação de mapas conceituais com a troca de papéis. Você e um amigo ou grupo de amigos podem

preparar mapas conceituais de forma independente, explicar uns aos outros o que fizeram e tentar combinar os mapas para formar um mapa maior. Para facilitar a tarefa, talvez seja conveniente usar adesivos autocolantes. Provavelmente, todos sairão do encontro com uma visão do assunto muito diferente da que tinham individualmente.

Classificação de Problemas e Deveres de Casa Outra atividade "metacognitiva" interessante é classificar problemas e deveres de casa em termos do conteúdo e do nível de entendimento que pressupõem. Que conceitos um dado problema está testando? Ele chama atenção para uma determinada relação entre conceitos? Consulte as questões e palavras-chave dadas como exemplo na Seção 3.3 e procure determinar o nível de entendimento que está sendo testado em cada pergunta.

Quando você está "empacado" em um dever de casa ou em um exame, esse tipo de análise pode ajudá-lo a sair do impasse. Pesquisadores da Universidade da Cidade do Cabo, na África do Sul, por exemplo, citam a questão de prova da Figura 3.3, que foi muito criticada pelos alunos [CDM96]. A reação dos estudantes a esta questão foi argumentar que "era impossível se lembrar das estatísticas de todos os países discutidos em classe, embora os dados tivessem sido distribuídos em uma folha impressa", o que mostrava que os alunos consideravam a questão como uma questão de "conhecimento". Eles ficaram surpresos ao serem informados de que não se esperava que se lembrassem dos dados com detalhes, mas sim que examinassem a tabela e classificassem os países com base na análise e aplicação de conceitos relacionados à classificação dos países em categorias econômicas. A resposta correta, a propósito, é (3).

Observe a tabela a seguir e indique quais são os países cujas estatísticas aparecem nas linhas A, B e C.

País	PNB *per capita*, 1991 (US$)	Taxa de crescimento do PNB *per capita*, 1980-1991	Taxa de crescimento da população, 1980-1991	Índice de emprego total, 1980-1985 (%)		
				Agricultura	Indústria	Serviços
A	500	2,5%	1,5%	51	20	29
B	1570	5,8%	1,6%	74	8	8
África do Sul	2560	0,7%	2,5%	17	36	36
C	25110	1,7%	0,3%	6	32	32

(1) A é Coréia do Sul; B é Quânia; C é Canadá.
(2) A é Sri Lanka; B é Alemanha; C é Tailândia.
(3) A é Sri Lanka; B é Tailândia; C é Suécia.
(4) A é Namíbia; B é Portugal; C é Botsuana.

Figura 3.3 Questão de múltipla escolha, mencionada em [CDM96], que testa o entendimento nos níveis de aplicação e análise e não no nível de conhecimento, como imaginava a maioria dos alunos.

3.5 UMA ESTRATÉGIA PARA RESOLVER PROBLEMAS

Os engenheiros resolvem problemas. Embora no momento você talvez esteja mais interessado em problemas do tipo escolar, vai descobrir que muitos dos problemas acadêmicos propostos nos cursos podem prepará-lo para situações que encontrará mais tarde na “vida real”. Alguns desses problemas da vida real podem não se parecer com deveres de casa, exames ou projetos, mas contêm muitos dos mesmos elementos. Tenha em mente que os engenheiros também precisam resolver muitos tipos de problemas não-técnicos nas atividades diárias, como problemas financeiros, pessoais, de comunicação, etc. Curiosamente, alguns dos conceitos que aprendemos ao resolver problemas técnicos podem ser aplicados com sucesso a essas áreas não-técnicas.

Uma das qualidades mais importantes que os engenheiros precisam desenvolver é a capacidade de encontrar soluções para problemas maldefinidos e que podem ter muitas soluções aceitáveis. Muitos problemas propostos aos estudantes no ambiente acadêmico têm apenas uma resposta "certa". O enunciado deixa bem claro quais são os "dados" e quais são as "incógnitas". O número de equações que descrevem o comportamento do sistema é igual ao número de incógnitas. Esses problemas sem ambiguidades são às vezes chamados de problemas *fechados*. A maioria dos problemas de engenharia, por outro lado, são problemas *abertos*, com muitas soluções possíveis. Os problemas abertos não são tão bem definidos nem tão bem formulados como os problemas acadêmicos do tipo fechado. No início do processo de solução, existem poucos dados e muitas incógnitas; isso significa que os dados são insuficientes para determinar uma solução única. Para chegar a uma solução, os engenheiros precisam usar estratégias que "fechem" o problema, como a de supor conhecidos os valores de algumas variáveis, usando estimativas ou simples palpites.

Nesta seção, apresentamos uma estratégia para resolver muitos dos tipos de problema que você vai encontrar, tanto na escola como no trabalho. Embora cada problema tenha características próprias, existe uma abordagem-padrão para resolver problemas de engenharia que você deve aprender, praticar e usar regularmente. A estratégia específica que apresentamos em seguida se baseia nas propostas de Wankat e Oreovicz, da Escola de Engenharia Química da Purdue University [WO93], que, por sua vez, se basearam em uma estratégia criada por Woods e colaboradores na McMaster University, em Ontário, Canadá [WWH$^+$75] [WCHW79]. Ambas foram motivadas pelo estudo clássico sobre o ensino de táticas de solução de problemas conduzido pelo matemático Georg Pólya, da Stanford University na década de 1940, e publicado em seu livro *How to Solve It/A Arte de Resolver Problemas* [POL45]. A estratégia tem oito etapas – sete etapas

de trabalho e uma etapa de motivação:

0. Eu posso.

1. Definir.

2. Explorar.

3. Planejar.

4. Implementar.

5. Verificar.

6. Generalizar.

7. Apresentar os resultados.

Adotando esta abordagem, você não só se torna mais proficiente na solução de problemas, mas também aprende a apresentar os resultados de forma lógica, fácil de ser compreendida por outros engenheiros… entre eles o seu professor! A abordagem geral se aplica a uma grande variedade de problemas, desde deveres de casa até grandes projetos. Alguns desses problemas poderão ser resolvidos apenas com lápis e papel, envolverão apenas um conceito e o resultado poderá ser apresentado em uma única folha de papel. Outros poderão envolver muitos conceitos diferentes e exigirão o uso de vários métodos de solução. Muitos problemas são resolvidos (ou os resultados apresentados) com o auxílio de um computador.

Embora o uso desta estratégia ajude você a se manter no rumo, tenha em mente que a solução de um problema não envolve necessariamente uma sequência lógica de etapas. Falsos caminhos e becos sem saída fazem parte do processo e os elementos apresentados abaixo não são necessariamente abordados na sequência mais lógica. Às vezes é necessário passar por eles várias vezes, repetindo e revisando alguns passos até chegar a uma solução. Na Seção 3.8 descrevemos um conjunto de regras de bolso chamado heurística que

pode ajudá-lo a sair de um impasse.

3.5.1 Solução de Problemas, Etapa Zero: Eu Posso

Como foi discutido na Seção 3.4, o primeiro passo para aprender é estar preparado, e isso inclui uma atitude positiva. Embora alguns problemas possam parecer incompreensíveis à primeira vista, com perseverança e alguma ajuda, em caso de necessidade, você conseguirá progredir. Tente encarar cada problema como um desafio e não desista facilmente.

3.5.2 Solução de Problemas, Primeira Etapa: Definir

Antes de tentar resolver um problema, é importante ter certeza de que ele foi compreendido perfeitamente. Para começar, tente expressá-lo em suas próprias palavras, explicitando o que é conhecido e o que é desconhecido, e faça um ou mais desenhos que ajudem você a visualizar o problema. Todos esses pontos são discutidos a seguir.

Identifique os "Dados" O enunciado de um problema contém algumas informações que ajudam a defini-lo, ou seja, os "dados" a respeito da situação. Às vezes essas informações são fornecidas explicitamente, mas outras vezes estão implícitas. Uma leitura atenta do enunciado, caso se trate de um dever de casa ou de um exame, muitas vezes ajudará você a descobrir fatos a respeito do problema que não eram óbvios inicialmente. Fazer uma lista de todas as informações contidas no enunciado pode ajudá-lo a identificar os dados, mas tenha em mente que nem sempre todas as informações do enunciado são necessárias para resolver um problema.

Identifique as "Incógnitas" Todo problema possui pelo menos uma incógnita, que constitui a resposta do problema. A maioria dos problemas de engenharia requer uma série de passos para encontrar a solução; porém, existem outras incógnitas menos óbvias no caminho

da solução: Primeiro você precisa determinar “A”; em seguida, “A” e outra informação são usadas para determinar “B”, e assim por diante. Nesses casos, você simplesmente aumenta a lista de incógnitas durante a solução do problema.

Simplifique o Enunciado Escreva o enunciado do problema em termos dos dados e incógnitas identificados nos passos anteriores.

Desenhe um Diagrama, um Esquema ou uma Representação Visual do Problema Alguns dos instrumentos mais úteis para resolver um problema são esboços, ilustrações e desenhos que representam graficamente aspectos do problema. Em alguns casos, como o dos circuitos elétricos, seria extremamente difícil sequer compreender o problema sem um diagrama. Em outros casos, como o dos mapas conceituais, um desenho ajuda a visualizar a estrutura do problema e da solução. Esses desenhos e outras representações gráficas também são muito úteis para explicar a solução a outras pessoas. Você pode usá-los para definir termos ou símbolos que aparecem na solução e, em muitos casos, podem ajudar a estabelecer importantes relações entre elementos do problema.

3.5.3 Solução de Problemas, Segunda Etapa: Explorar

Esta etapa do processo de solução de problemas pode ser vista como uma fase de pré-planejamento, na qual paramos para verificar o que realmente está sendo pedido, que informações são necessárias e que estratégias gerais podem ser usadas.

O Problema Faz Sentido? Depois de definir sua interpretação do problema, examine-o novamente para ver se faz sentido. As informações fornecidas parecem compatíveis com o que é pedido? O problema tem “pegadinhas”, ou seja, informações que podem desviá-

lo do rumo correto? Se o problema não parece fazer sentido, torne a examiná-lo do começo ao fim, à procura de um detalhe que possa ter escapado. Esta é a hora de perguntar se há mesmo necessidade de resolver o problema; em problemas complexos que podem ser divididos em várias partes, por exemplo, talvez seja possível utilizar novamente um resultado anterior em vez de começar tudo de novo. Em outras palavras, nem sempre é necessário "reinventar a roda".

Suposições Os engenheiros recorrem frequentemente a *suposições* para resolver problemas. Muitas vezes, o enunciado do problema não está completo ou alguma informação não foi fornecida com o grau de detalhamento que seria desejável. Mesmo que algumas informações estejam "faltando", é preciso apresentar uma solução para o problema. O fato de que nem sempre todas as informações estão disponíveis introduz um elemento de incerteza no processo de solução de problemas. Aprender a lidar com a incerteza é importante e, como vamos ver mais adiante, exige que os engenheiros examinem atentamente as soluções que encontraram.

As suposições podem estar ligadas às propriedades de certos materiais ou à influência de certos fenômenos, como o atrito. Saber quando é possível fazer suposições é uma habilidade que se aprende com a experiência, e a única forma de adquirir essa experiência é resolver problemas. Assim, quanto mais problemas você resolve, mais experiência adquire e mais eficiente você se torna. Para saber quando e como fazer suposições é preciso ter conhecimentos sólidos da física e matemática envolvidas na situação; por isso, quanto mais você aprende a respeito de um determinado assunto, mais capacitado você se torna para fazer suposições. Na prática, poucos problemas de engenharia têm uma solução única e exata. Isto não está de acordo com o que muitos estudantes esperam com base em suas experiências de solução de problemas no curso secundário; você deve se preparar para as incertezas que o aguardam.

Observe que é sempre importante, ao documentar um problema, deixar bem claro quais foram as suposições que você fez.

Quais São os Conceitos Importantes e as Abordagens Possíveis? Depois que você estabelece os objetivos gerais, está na hora de começar a obter a solução, tentando classificar ou caracterizar o problema. No caso dos problemas propostos em um curso específico, em geral você sabe que o problema se refere a um dos tópicos que estão sendo ensinados no momento. A capacidade de olhar para um problema e dizer "este problema é sobre X" é algo que você deve desenvolver, e isso será adquirido apenas com a prática.

Quando os problemas se tornam mais complexos – e, em particular, quando você começa a trabalhar em projetos – fica mais difícil compreender os conceitos e escolher uma abordagem, já que o problema em geral envolve vários conceitos. Será que ele envolve uma lei de conservação? Trata-se de conservação da energia, do momento, da massa, da espécie, etc.? Mais uma vez, a capacidade de responder a essas perguntas aumenta com a experiência, e você deve estar preparado para aprender com cada problema que resolve.

Que Nível de Entendimento Está Sendo Testado? A que nível de entendimento da Taxonomia de Bloom o problema se destina? Os exemplos da Seção 3.3 podem ajudá-lo a decidir.

3.5.4 Solução de Problemas, Terceira Etapa: Planejar

Planejar é determinar quais são os passos necessários para resolver um problema *antes* de começar a implementá-los. Os principiantes (e mesmo alguns engenheiros experientes) às vezes deixam de lado a fase de planejamento. Na pressa de terminar uma tarefa, os estudantes começam a introduzir valores numéricos em fórmulas supostamente relevantes, a digitar instruções de um programa de computador ou a ligar fios, quase sempre com resultados desastrosos.

Começar a resolver um problema sem planejamento raramente poupa tempo e quase sempre produz resultados duvidosos, que são notoriamente difíceis de corrigir. Entretanto, embora evite problemas futuros, o planejamento é a fase mais árdua do processo de solução de problemas, pois depende da capacidade de analisar o problema, encontrar um método de resolvê-lo e avaliar a probabilidade de que o método funcione. Os planos frequentemente têm que ser mudados quando você encontra obstáculos imprevistos, e pode ser necessário começar de novo se você descobre que estava seguindo um caminho falso. A desordem do processo de planejamento, porém, em geral não é visível na forma final de uma solução. Às vezes, ao ver um problema resolvido em um livro-texto ou em uma aula, você se pergunta: "Eu entendi a solução, mas por que foram executados esses passos, e por que nessa ordem?" Bem, a solução original pode *não* ter seguido essa ordem, mas, depois de chegar à resposta, o autor talvez tenha achado que essa era a melhor forma de apresentar o conceito, poupando a você os detalhes das tentativas malsucedidas. Quando tiver mais experiência na solução de problemas, você irá adquirir a capacidade de resolver problemas mais complexos, com a tranquilidade de saber que chegar ocasionalmente a um beco sem saída faz parte do jogo.

Como foi discutido na Seção 2.1.3, a solução de problemas em geral envolve uma série de passos encadeados entre os dados e as incógnitas ou entre o estado inicial e o estado final. Um instrumento muito eficaz para criar um plano consiste em desenhar um mapa conceitual no qual estejam representados o estado inicial e o estado final, e procurar um caminho que ligue os dois estados através de passos intermediários. Desenhar um mapa conceitual para facilitar o planejamento atende a vários objetivos, entre eles os seguintes:

1. Coloca suas ideias no papel enquanto você está trabalhando com elas; lembre-se de que só é possível guardar poucos conceitos ao mesmo tempo na memória de curto prazo.

2. Reforça as ligações em sua memória, o que pode ajudá-lo a encontrar os conceitos e métodos de que necessita para resolver o problema.
3. Permite que você avalie seu entendimento do problema; se você tem dificuldade para desenhar um mapa conceitual, provavelmente não compreende o problema suficientemente bem para resolvê-lo.
4. Constitui uma forma conveniente de documentação para manter um registro do estágio em que se encontra a solução e apresentar seu plano a outros.

Esta forma de criar um plano é semelhante ao modo como descobrimos um itinerário de voo entre duas cidades, ou encontramos uma solução para o problema de amarrar duas cordas penduradas no teto, conforme visto na Seção 2.1.3. O mapa deve ter uma forma hierárquica, com as informações conhecidas e os valores supostos nas folhas, o objetivo principal na raiz e os objetivos intermediários no meio, como mostra a Figura 3.4.

Agora que apresentamos a forma geral de um plano, o passo seguinte é como determinar seu conteúdo. Embora o plano como um todo para resolver um problema particular possa ser uma criação nova e única, os elementos de um plano são quase sempre os mesmos. Na Seção 2.1.3, vimos que pequenos pedaços e conhecimento procedural, do tipo “como fazer”, cada um resolvendo um problema simples, podem ser encadeados para resolver problemas complexos. Porém, como possuímos um gigantesco estoque de conhecimentos procedurais e declarativos na memória de longo prazo, a questão passa a ser a seguinte: como vamos encontrar as informações de que necessitamos?

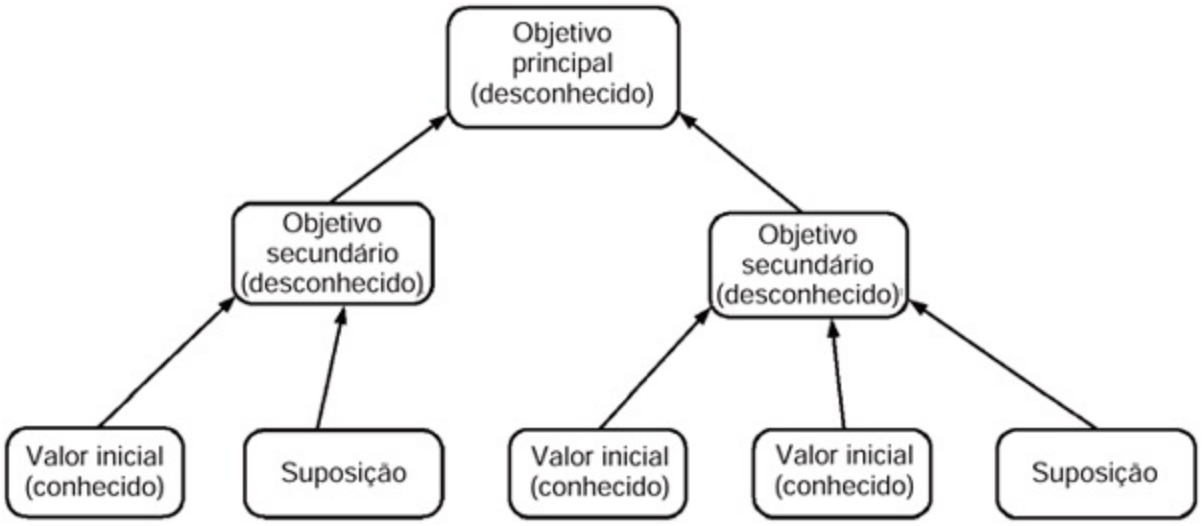


Figura 3.4 Forma geral de um plano para resolver um problema.

A estratégia básica é a mesma que recomendamos na Seção 3.4 para aprender assuntos novos, ou seja, recorrer a um diálogo interno com o objetivo de organizar as informações. Esse diálogo pode ser construído a partir de "regras de bolso" ou *heurísticas* que descrevem técnicas gerais de solução de problemas. Na Seção 3.8, apresentamos uma lista de heurísticas com exemplos de como podem ser aplicadas. Entre elas estão sugestões como

- dividir para conquistar
- trabalhar para a frente
- trabalhar para trás
- escolher um problema mais simples
- fazer uma pausa

De maneira geral, essas heurísticas foram descobertas por pessoas com experiência em resolver problemas, as quais simplesmente notaram que elas "funcionavam" e as acrescentaram à lista por essa razão. Examinando-as mais de perto, porém, podemos ver que muitas podem ser explicadas em termos do modelo cognitivo descrito na Seção 2.1 e têm por objetivo, em última análise, obter um melhor desempenho de nosso aparelho cognitivo. Outras envolvem o

entendimento do problema em si e a descoberta de meios de transformá-lo para que se torne semelhante a problemas já conhecidos.

O Exemplo 3.1 ilustra a formulação de um plano para pintar uma caixa d'água.

Exemplo 3.1 Pintura de uma Caixa d'Água

Formule um plano para determinar quantos litros de tinta são necessários para aplicar uma única mão de tinta na caixa d'água da Figura 3.5. A caixa d'água é formada por uma torre e um reservatório. O reservatório é um cilindro fechado. A torre é formada por oito tubos de sustentação dispostos simetricamente em torno de um cano de água de maior diâmetro. Duas braçadeiras octogonais feitas por vigas em forma de L ligam os tubos de sustentação a um terço e dois terços da altura da torre.

Solução O estado inicial deste problema é que conhecemos as dimensões da caixa d'água. O estado final é conhecer a quantidade de tinta necessária para pintar a torre. Para formular o plano, vamos usar principalmente duas heurísticas: "trabalhar para trás" do estado final para o estado inicial, e "dividir para conquistar", separando a caixa d'água em componentes.

A Figura 3.6 ilustra o progresso do plano em três etapas. A primeira etapa consiste simplesmente em reconhecer que a quantidade de tinta necessária depende da área a ser pintada e da cobertura da tinta, que é o número de litros necessários por unidade de área. Na segunda etapa, continuamos a trabalhar para trás, separando a caixa d'água em partes e consultando um fornecedor para conhecer a cobertura da tinta. No terceiro e último passo, acrescentamos o cálculo da área das partes da caixa d'água a partir das dimensões conhecidas. Para isso, identificamos as formas geométricas das partes e escrevemos as fórmulas usadas para calcular as áreas.

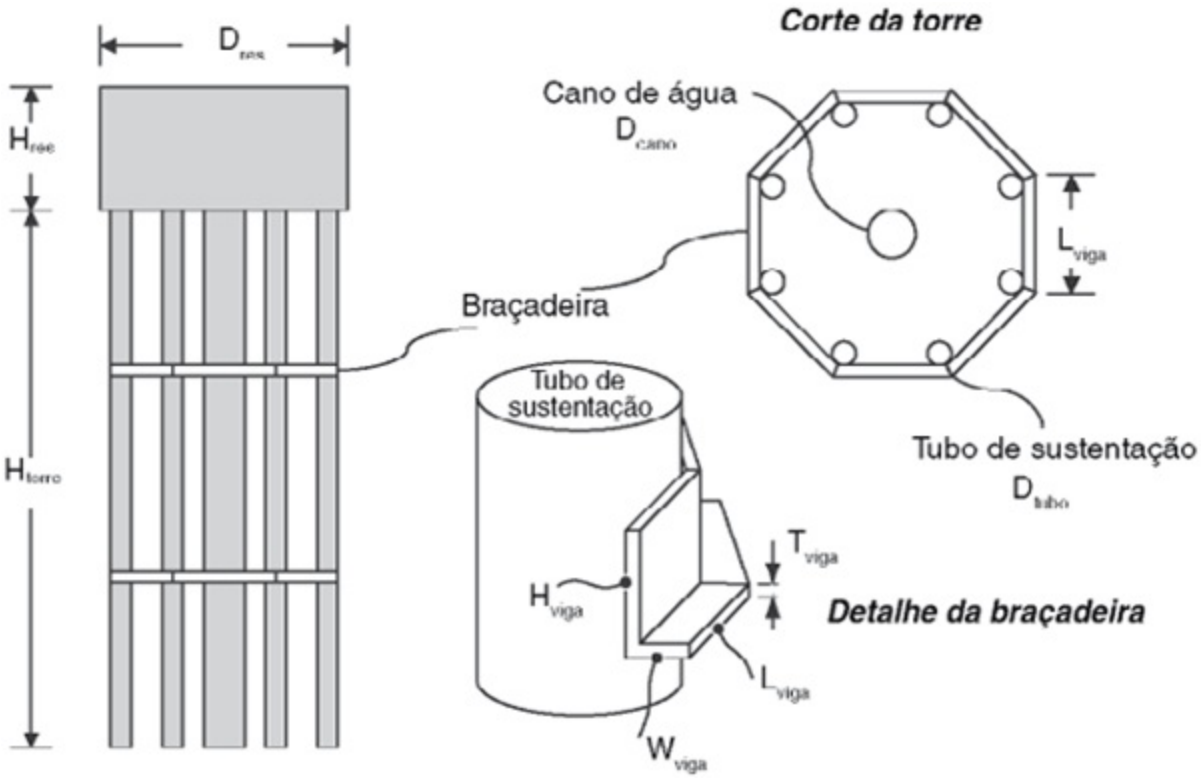


Figura 3.5 Dimensões da caixa d'água do Exemplo 3.1.

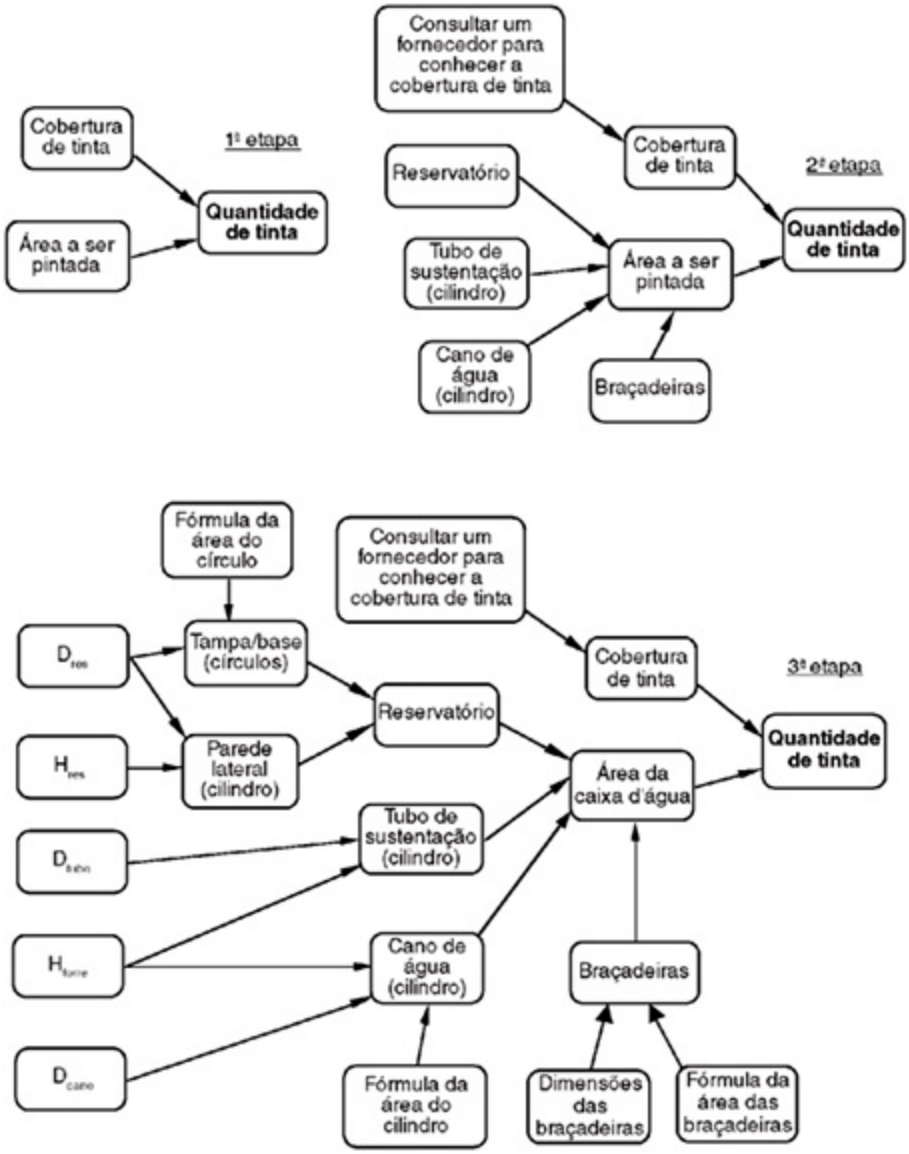


Figura 3.6 Refinamento de um plano de três estágios para determinar a quantidade de tinta no Exemplo 3.1.

3.5.5 Solução de Problemas, Quarta Etapa: Implementar

Esta etapa é a que muitos estudantes chamam de "resolver o problema", mas, para nós, trata-se da *quarta* etapa do processo, que começa *depois* do planejamento. Este é o estágio de implementação, no qual você resolve as equações, escreve o programa de computador ou monta o circuito. Embora o planejamento torne a implementação

muito mais fácil, como já foi observado, você poderá encontrar, eventualmente, problemas no estágio de implementação que o forcem a voltar atrás e mudar de planos. Durante a resolução de problemas complexos, frequentemente existe algum grau de iteração entre os estágios de planejamento e implementação; o segredo está em fazer um bom trabalho de planejamento para que essas iterações não sejam muito dispendiosas em termos de tempo e dinheiro.

Mesmo com planejamento antecipado, você deve estar preparado para cometer erros ao implementar a solução. Por este motivo, é extremamente importante trabalhar metodicamente durante a implementação. Isso não só reduzirá a probabilidade de cometer enganos, mas tornará mais fácil localizar os erros cometidos. Trabalhar em pequenas etapas e documentar todo o trabalho é muito importante. No caso de problemas numéricos, obtenha uma solução literal das equações antes de substituir as variáveis por valores numéricos.

3.5.6 Solução de Problemas, Quinta Etapa: Verificar

Depois de encontrar a solução de um problema, você precisa se convencer e convencer os outros de que a resposta está correta. A primeira pessoa que deve verificar a resposta é *você*. No caso de problemas de classe, em que as respostas estão no final do livro, é muito fácil conferir os resultados. Na prática, porém, as coisas raramente são tão simples, e você precisa usar uma série de recursos para verificar se uma solução é razoável antes de implementá-la ou divulgá-la.

Teste de Sanidade O primeiro passo para verificar se uma resposta está correta é ver se ela faz sentido, o que constitui o chamado *teste de sanidade*. Assim, por exemplo, se você está calculando o tempo de voo de um projétil e o resultado é negativo, alguma coisa deve estar errada. Às vezes o problema é um erro de digitação na hora de

escrever os dados do problema ou de entrar com os números em uma calculadora; outras vezes trata-se de um erro algébrico. Pode ser também que você tenha usado princípios ou feito suposições que não se aplicam ao caso em questão. Seja como for, você deve refazer todo o trabalho, talvez a partir da etapa de "definir", para localizar e corrigir o erro. Em casos como esses, uma documentação detalhada pode fazer muita diferença.

Casos de Teste Outra forma de verificar se uma resposta está correta é usar *casos de teste*. Caso de teste é uma solução conhecida de um exemplo particular de um problema genérico. Suponha, por exemplo, que você tenha obtido equações que descrevem a posição e a velocidade de um objeto depois de lançado em uma certa direção com uma certa velocidade inicial. Um caso muito simples para testar as equações é o do instante zero, no qual a distância percorrida deve ser zero e a velocidade deve ser a velocidade inicial. Outro caso de teste é o fato de que, se não existem outras forças além da gravidade agindo sobre o projétil depois que é lançado, a velocidade no momento em que atinge novamente o solo deve ser igual à velocidade inicial. Os casos de teste são particularmente importantes no caso dos programas de computador. Assim, por exemplo, se você escreveu um programa de computador para simular o funcionamento de um circuito elétrico arbitrário, pode testar o programa simulando um circuito que seja suficientemente simples para ser analisado manualmente. As empresas de software normalmente possuem uma batelada de programas de teste, conhecidos como *testes de regressão*, que executam antes de lançar uma nova versão de um programa para ter certeza de que a versão nova e a antiga produzem os mesmos resultados a partir de partes do programa que não foram afetadas pelas mudanças.

3.5.7 Solução de Problemas, Sexta Etapa: Generalizar

Obter a resposta de um dever de casa não é tão importante como familiarizar-se com o método usado para abordar e resolver o problema, que no futuro poderá ser aplicado em situações semelhantes. A etapa seguinte do processo de solução de problemas, generalizar, é fundamental para que o estudante aprenda com a experiência.

Na etapa de generalização, você deve considerar questões relacionadas tanto ao problema quanto ao processo usado para resolvê-lo. Algumas questões que você pode se perguntar são as seguintes:

- Que fatos específicos aprendi ao resolver este problema?
- Este problema poderia ter sido resolvido de modo mais eficiente? Algumas etapas, vistas em retrospecto, eram desnecessárias? Algum efeito, por exemplo, era tão pequeno que podia ser ignorado?
- Alguma coisa que aprendi resolvendo este problema poderia ter sido aplicada a um problema que encontrei no passado?
- Cometi algum erro ou engano que devo tomar cuidado para não repetir no futuro?

3.5.8 Solução de Problemas, Sétima Etapa: Apresentar os Resultados

As comunicações e palestras desempenham um papel extremamente importante na prática da engenharia. Isso acontece porque a engenharia é uma profissão ao mesmo tempo *social* e *técnica*. Os engenheiros devem ser capazes de se comunicar com os colegas em uma linguagem técnica apropriada e precisa, mas também devem ser capazes de discutir suas recomendações com pessoas de outras áreas, como funcionários do governo e possíveis investidores. Os engenheiros preparam muitos tipos de documentos, como relatórios técnicos, diagramas esquemáticos, propostas, editoriais, cada um com

estilo e ênfase diferentes. Existem, porém, algumas máximas importantes que se aplicam a todos: seja claro, forneça instruções detalhadas e seja caprichoso.

Seja Claro. As decisões a respeito de questões de engenharia são tomadas por pessoas. Antes de aceitar suas recomendações, especialmente em situações críticas, a pessoa responsável vai querer ouvir seus argumentos. Quando uma empresa abre concorrência para um projeto de construção, quem analisa as propostas não considera apenas o custo e o cronograma, mas também examina de perto como foram obtidos esses números para se certificar de que são realistas. Em qualquer ponto do projeto, comunicações obscuras podem levar a dois tipos de decisões errôneas, ambas potencialmente desastrosas: recusar boas ideias e aceitar más ideias.

Todo dever de casa e trabalho de aula é uma oportunidade de melhorar a capacidade de comunicação; evidentemente, a clareza da exposição contribuirá para que seja julgada favoravelmente. Seguem algumas sugestões que podem ajudá-lo a apresentar seus trabalhos da melhor forma possível:

- Não se limite a escrever números e equações; acrescente comentários para que você, mais tarde, ou a pessoa que examinar seu trabalho, compreenda o método que você usou para chegar à solução. Os comentários devem ser concisos; não há necessidade de usar frases completas.
- Não se esqueça de indicar as unidades de medida. Se você está se referindo ao comprimento de uma peça e escreve “23,4”, isso não quer dizer nada. Você *tem que* escrever 23,4 m (ou 23,4 cm, 23,4 km, etc.). Coloque as unidades depois de todos os números; não cometa o erro de tentar “manter as unidades na cabeça”. O fato de que todas as unidades são do SI ou de outro sistema de medidas também não é razão para omiti-las, já que as pessoas que vão ler seu trabalho não têm como saber com que sistema

você está trabalhando. O uso correto das unidades de medida pode ser uma forma excelente de conferir seu trabalho. É possível que os engenheiros encontrem mais erros "checando as unidades" do que usando outro método qualquer.

- Divida a solução em partes e comente todas as aproximações que decidir usar. Ajude os outros a acompanhar sua solução com um bom esquema!

Forneça Instruções Detalhadas. O resultado de um projeto é um plano de implementação. Para que o produto seja implementado da forma como foi projetado, é preciso que o plano seja claro e preciso. Isto se aplica tanto à linguagem em que o plano é descrito quanto às figuras que o acompanham. Existem inúmeras situações nas quais engenheiros são encarregados de fornecer instruções a técnicos que executam experimentos, a capatazes de fábricas, a firmas de construção e a computadores. Um programa de computador é simplesmente uma série de instruções, escritas em uma linguagem especializada, que dirigem o funcionamento de uma máquina. Para o bem ou para o mal, diferentemente das pessoas, os computadores fazem *exatamente* o que você manda, sem tentar entender o que você queria dizer. Embora esta afirmação possa parecer grosseira, uma das vantagens de usar ferramentas computadorizadas para resolver problemas é que, quando usadas adequadamente, proporcionam uma documentação clara e precisa do trabalho, já que o computador só pode interpretar o programa de uma forma.

Seja Caprichoso. A apresentação é importante em qualquer trabalho de engenharia. Um documento preparado com desleixo não só é difícil de ler, mas passa a impressão, verdadeira ou falsa, de que as ideias que ele expressa também são desorganizadas. No caso de documentos manuscritos, capriche na caligrafia e escreva em letra de forma se for preciso. No caso de documentos impressos em uma impressora, tome cuidado para que as figuras sejam de um tamanho

razoável e que as legendas sejam legíveis.

No caso de alguns problemas mais complexos, os resultados devem ser apresentados na forma de tabelas, gráficos ou outros recursos visuais. Todos os gráficos devem ter uma legenda e as grandezas associadas aos eixos devem ser claramente identificadas.

3.6 QUAL É A QUANTIDADE DE CO_2 PRODUZIDA POR UM CARRO DE PASSEIO TÍPICO?

As emissões de gases causadores do efeito estufa ameaçam o equilíbrio do planeta ao promoverem o aquecimento global. A emissão de dióxido de carbono (CO_2) pelos veículos automotores é uma das principais responsáveis. Neste projeto, estimamos a contribuição de um carro de passeio para o problema. Mais especificamente, estamos interessados em determinar a massa de CO_2 que um carro de passeio típico produz por ano. Nas seções que se seguem, vamos apresentar um desenvolvimento detalhado do projeto.[1]

3.6.1 Definir

Nesta etapa, precisamos determinar quais são os dados e quais são as incógnitas do problema, e definir o objetivo da solução.

Dados O enunciado do problema não fornece muitas informações, dizendo apenas que o carro que vamos investigar é “típico”. As suposições que teremos de fazer para resolver o problema devem ser compatíveis com esse fato.

Incógnitas A única incógnita mencionada diretamente é a massa de CO_2, que é também o objetivo da solução. Durante o planejamento da estratégia para resolver o problema, vamos acrescentar outras

incógnitas, correspondentes a objetivos intermediários.

Simplifique o Enunciado Qual é a massa de CO_2 produzida pela queima do volume de gasolina que um carro de passeio típico consome em um ano?

Desenhe um Diagrama, um Esquema ou uma Representação Visual do Problema A Figura 3.7 mostra um mapa conceitual inicial do problema, que mais tarde será transformado em um plano detalhado para resolvê-lo.

3.6.2 Explorar

A etapa de explorar é a etapa de "pré-planejamento" pela qual nos asseguramos de que compreendemos o problema, determinamos as suposições necessárias e identificamos os conceitos importantes.

O Problema Faz Sentido? Embora não haja muitas informações no enunciado, o problema faz sentido. Sabemos que a queima de gasolina no motor dos automóveis produz CO_2; apenas não conhecemos ainda a relação entre as massas das duas substâncias.

Suposições Para resolver este problema, vamos precisar fazer várias suposições, estimativas e aproximações. As principais aparecem a seguir, juntamente com uma forma de determinar os seus valores.

Figura 3.7 Diagrama inicial do problema determinando a massa de CO_2 produzida por um carro de passeio típico em um ano.

- *Qual é a massa de gasolina queimada?* Podemos determinar este valor fazendo suposições quanto ao número de quilômetros

rodados em um ano por um motorista típico e ao consumo de combustível de um carro de passeio típico em quilômetros por litro.

  - Vamos supor que um carro de passeio típico roda 80 km por dia.[2] Isso equivale a 29.200 km por ano.
  - Vamos supor que o consumo de combustível de um carro de passeio típico é de 10 km/L.

- *O que é a gasolina e o que significa "queimar gasolina"?* Podemos encontrar uma resposta para esta pergunta pesquisando na Internet, no site Newton BBS, um site educativo para alunos do primeiro grau mantido pelo Departamento de Energia dos Estados Unidos e pelo Argonne National Laboratory [U.S05]. A gasolina é uma mistura de hidrocarbonetos, moléculas de hidrogênio e carbono. Para esta análise, vamos supor que a gasolina é composta exclusivamente de isooctano, C_8H_{18}. Quando o isooctano queima totalmente, combina-se com oxigênio para produzir dióxido de carbono e água, segundo a seguinte reação química:

$$C_8H_{18} + 12{,}5O_2 \rightarrow 8CO_2 + 9H_2O \qquad (3.1)$$

  Quando o isooctano não queima totalmente, produz outros compostos, como o monóxido de carbono (CO). Em nossa análise, vamos supor que a queima é completa, o que tende a superestimar ligeiramente a quantidade de dióxido de carbono.
- Vamos precisar também de algumas constantes físicas, como a massa específica da gasolina (para calcular a massa a partir do volume) e a massa atômica dos elementos envolvidos na queima da gasolina.

Quais São os Conceitos Importantes e as Abordagens Possíveis? O conceito técnico mais importante do problema é o que foi ilustrado

no diagrama simples da Figura 3.7, ou seja, a química da combustão de gasolina. Embora ainda não tenha sido discutido com detalhes, este conceito envolve o equilíbrio de uma reação química. Outros conceitos envolvidos são os de massa, volume, massa específica e conversão de unidades.

Que Nível de Entendimento Está Sendo Testado? O problema irá testar os conceitos básicos mencionados acima a nível de aplicação. Formular um plano para chegar ao resultado pedido é um dos aspectos mais difíceis deste problema. Embora o planejamento não exija um conhecimento profundo de conceitos técnicos avançados, requer o uso de análise e síntese. Outro aspecto difícil deste problema está na necessidade de fazer uma série de suposições. Embora as suposições estejam quase todas relacionadas a conceitos simples, como o número médio de quilômetros rodados por dia por um motorista típico, exigem um entendimento no nível de avaliação.

3.6.3 Planejar

Formulamos o plano para resolver este problema refinando e desdobrando o mapa conceitual simples da Figura 3.7. O resultado, mostrado na Figura 3.8, foi uma transformação em duas etapas:

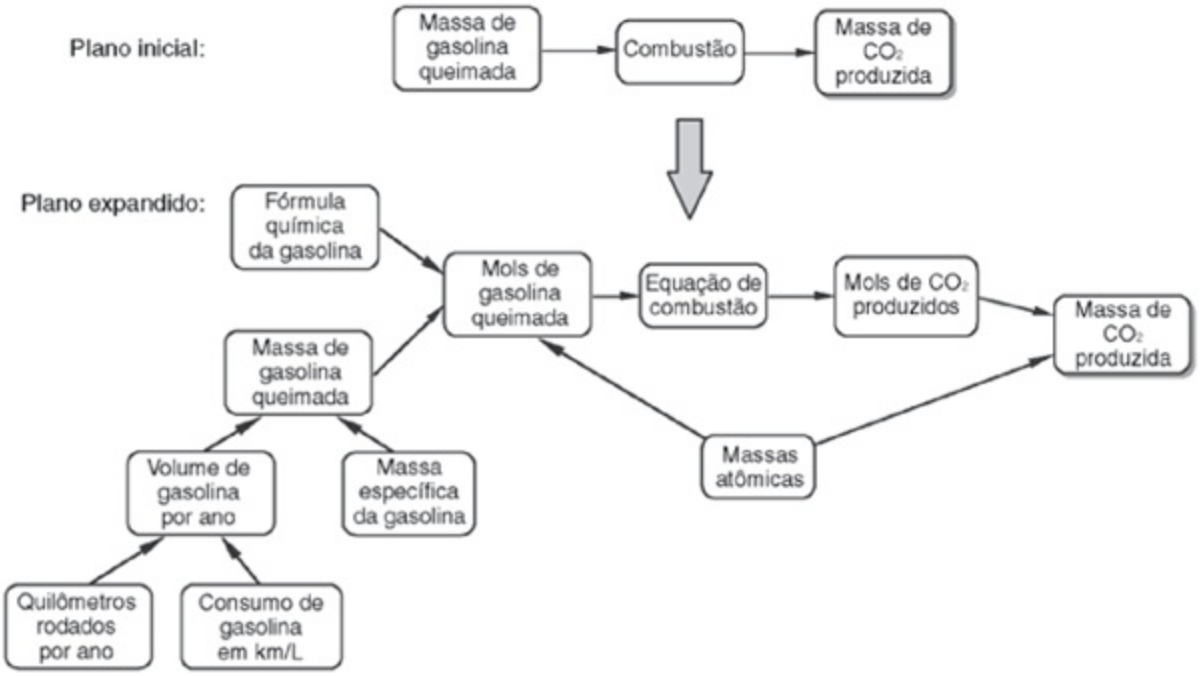


Figura 3.8 Formulação de um plano para determinar a massa de CO_2 produzida por um carro de passeio típico em um ano.

1. Primeiro, fizemos a "parte fácil", que foi acrescentar os passos para calcular a massa de gasolina, trabalhando para trás (encadeamento para trás) a partir desse conceito até chegar aos parâmetros iniciais.
2. Segundo, refinamos o conceito de combustão da gasolina, incluindo os passos para calcular as massas dos compostos produzidos em uma reação química simples. Fizemos isso depois de examinar alguns exemplos de cálculos semelhantes em livros de química do segundo grau.

3.6.4 Implementar

O primeiro passo para obter a solução é fazer as estimativas, aproximações e suposições planejadas. Descobrimos que a forma mais conveniente de documentá-las é incluí-las no mapa conceitual, como mostra a Figura 3.9. O resultado é um plano completo que inclui todas as informações necessárias para formular equações e substituir

as variáveis por valores numéricos.

O passo seguinte é escrever as equações e resolvê-las simbolicamente. Para isso, precisamos definir os símbolos usados nas equações, o que é feito na tabela abaixo.

Símbolo	Descrição	Valor
Distância	Distância rodada em um ano	29.200 km
Consumo de combustível	Consumo de gasolina	10 km/L
ρ_{gas}	Massa específica da gasolina	0,75 kg/L
MA_{H}	Massa atômica do H	1 g/mol
MA_{C}	Massa atômica do C	12 g/mol
MA_{O}	Massa atômica do O	16 g/mol
MA_{gas}	Massa atômica da gasolina	Desconhecido
MA_{CO_2}	Massa atômica do CO_2	Desconhecido
$\text{massa}_{\text{gas}}$	Massa de gasolina	Desconhecido
$\text{massa}_{\text{CO}_2}$	Massa de CO_2	Desconhecido
mol_{gas}	Número de mols de gasolina	Desconhecido
mol_{CO_2}	Número de mols de CO_2	Desconhecido

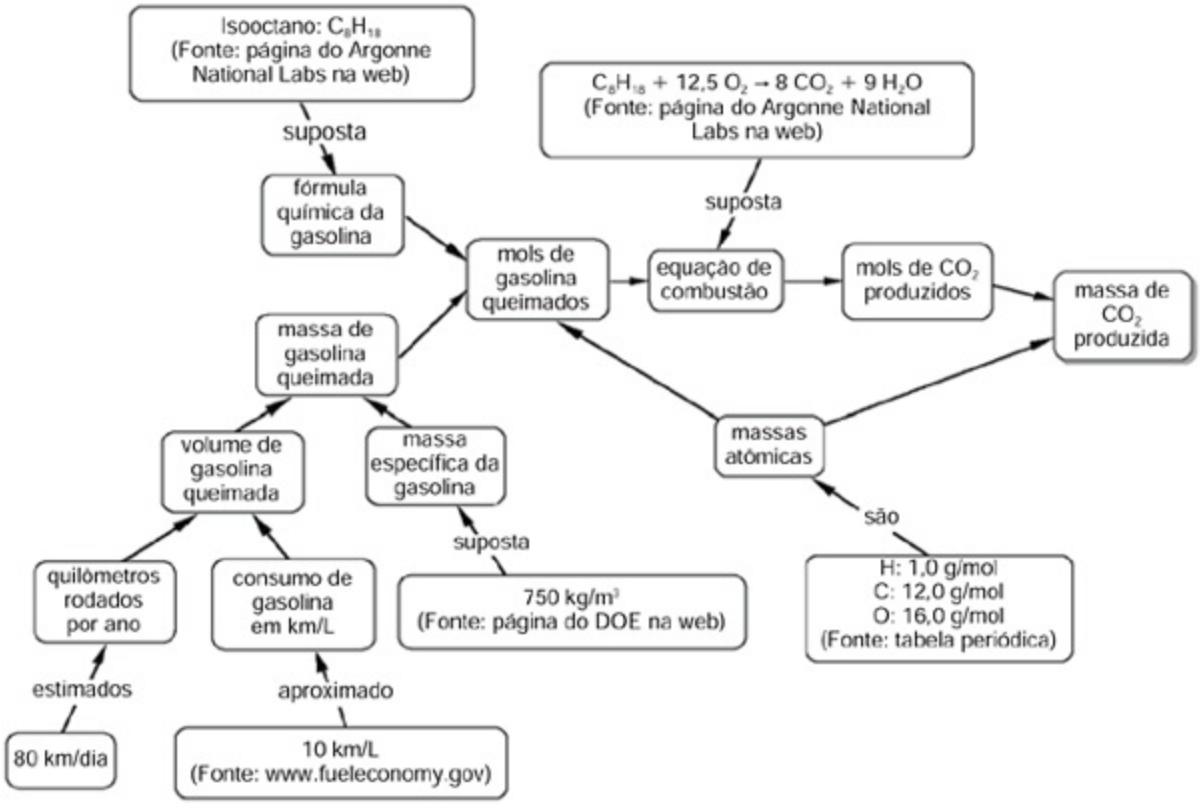


Figura 3.9 Plano para determinar a massa de CO_2 produzida por um carro de passeio típico em um ano.

Vamos agora escrever as equações. Para começar, vamos calcular a massa de gasolina queimada em um ano. O volume de gasolina consumida em um ano é igual à distância rodada em um ano dividida pelo consumo de gasolina:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\text{distância}}{\text{consumo}} \\ &= 29.200\,\text{km} \times \frac{1}{10}\,\frac{\text{L}}{\text{km}} \\ &= 2920\,\text{L} \end{aligned}$$

A massa de gasolina é igual ao produto deste volume pela massa específica da gasolina:

$$\begin{aligned} \text{massa}_{\text{gas}} &= \rho_{\text{gas}} \times V \\ &= 0{,}75\,\frac{\text{kg}}{\text{L}} \times 2920\,\text{L} \\ &= 2190\,\text{kg} \end{aligned}$$

Vamos agora converter a massa de gasolina para mols. Para isso,

temos que calcular a massa atômica da gasolina (C_8H_{18}):

$$\begin{aligned} MA_{gas} &= 8 \times MA_C + 18 \times MA_H \\ &= 8 \times 12\frac{g}{mol} + 18 \times 1\frac{g}{mol} \\ &= 114\frac{g}{mol} \\ mol_{gas} &= \frac{massa_{gas}}{MA_{gas}} \\ &= \frac{2190 \times 1000\,g}{114\,g/mol} \\ &= 19.211\,mol \end{aligned}$$

Agora vem o passo mais importante desta análise, no qual determinamos o número de mols de CO_2 produzidos. De acordo com a reação de queima da gasolina (3.1), cada molécula de gasolina, ao ser queimada, produz 8 moléculas de CO_2. Assim,

$$\begin{aligned} mol_{CO_2} &= 8 \times mol_{gas} \\ &= 8 \times 19.211 \\ &= 153.688\,mol \end{aligned}$$

Finalmente, a partir do número de mols de CO_2 produzidos e do peso atômico da molécula, podemos determinar a massa:

$$\begin{aligned} MA_{CO_2} &= MA_C + 2 \times MA_O \\ &= 12\frac{g}{mol} + 2 \times 16\frac{g}{mol} \\ &= 44\frac{g}{mol} \\ massa_{CO_2} &= mol_{CO_2} \times MA_{CO_2} \\ &= 153.688\ mol \times 44\frac{g}{mol} \\ &= 6762\ kg \end{aligned}$$

3.6.5 Verificar

O que chama a atenção neste resultado é que a massa de CO_2 produzida, 6762 kg, é maior que a massa de gasolina consumida, 2190 kg. Isso faz sentido? Examinando os cálculos, vemos que 8 mols de CO_2 são produzidos para cada mol de gasolina queimado e que o

peso atômico do CO_2 é um pouco menor que um terço do peso atômico da gasolina. Isso significa que a massa de CO_2 deve ser 8/3 $\approx$ 3 vezes maior que a massa de gasolina, o que está de acordo com o resultado obtido.

3.6.6 Generalizar

Para resolver este problema, fizemos várias suposições a respeito do que é "típico", como o consumo de combustível de um carro de passeio e a distância rodada em um ano. Uma pergunta que podemos fazer é se a massa de CO_2 produzida mudaria muito se essas suposições fossem diferentes. A forma de obter uma resposta a esta pergunta é fazer variar os valores das suposições dentro de um certo intervalo e plotar os resultados. Esse tipo de análise, chamado de *varredura paramétrica*, permite generalizar os resultados de um problema a partir de uma solução particular. A Figura 3.10 mostra o resultado de uma varredura de um consumo de gasolina de 6 km/L, típico de um carro grande, até 20 km/L, típico de um carro compacto. Nessa faixa, a massa de CO_2 emitida varia de 2700 a 10.800 kg, ainda supondo que o motorista rode 29.200 km por ano.

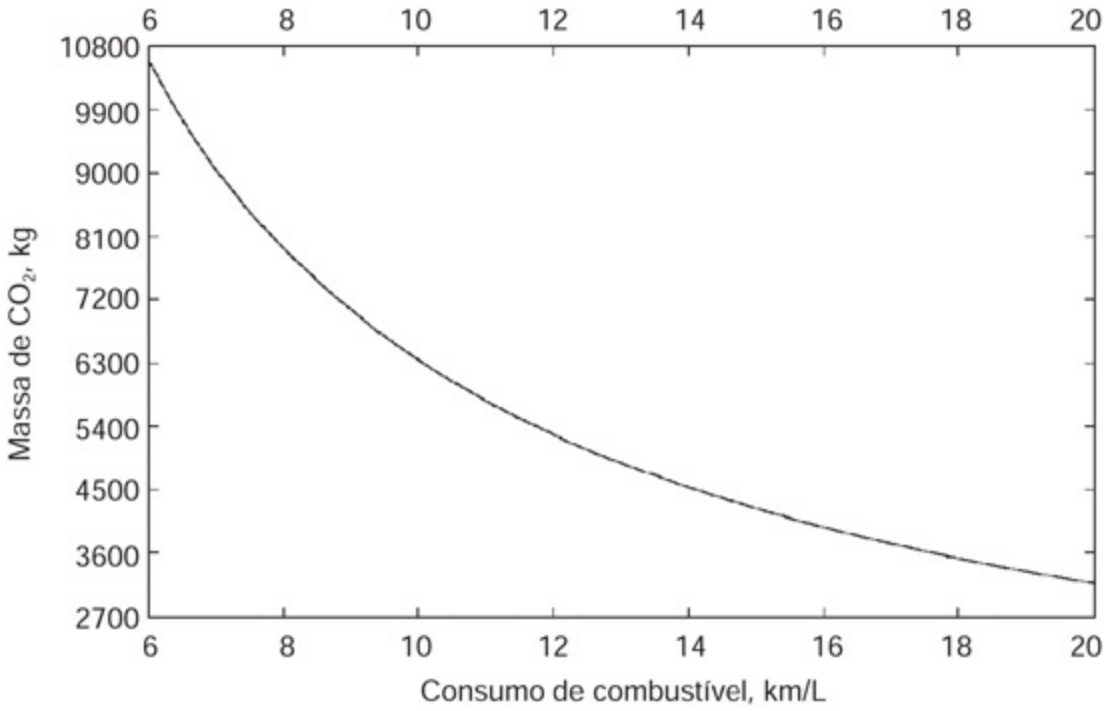


Figura 3.10 Massa de CO_2 produzida por um carro em função do consumo de gasolina, supondo que o carro roda 29.200 km/ano.

3.6.7 Apresentar os Resultados

Nas seções anteriores, explicamos o raciocínio usado para resolver o problema. Você pode considerar esses comentários como notas para uso próprio, mas o formato não é o mais adequado para apresentar a solução de um dever de casa. Ao redigir a solução de um dever de casa, você deve fornecer detalhes suficientes para que o professor possa acompanhar a análise do problema, mas, em geral, não precisa explicar como você chegou a essa análise. As Figuras 3.11 e 3.12 mostram um exemplo de formato para deveres de casa que é informativo, conciso e apresentável. A solução pode ser dividida nas seguintes partes:

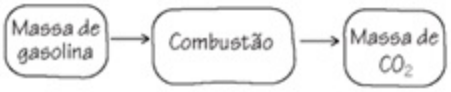
Dados:	Quais são os dados do problema?
Objetivo:	Qual é o objetivo do problema?
	Desenhe um diagrama. Neste exemplo, trata-se de um mapa conceitual simples, mas, em

Diagrama:	outros problemas, pode ser usado um diagrama de forças, o esquema de um circuito elétrico, etc.
Plano:	Uma sinopse do plano.
Análise:	A etapa “implementar” da solução. A análise deve seguir o plano à risca, com breves explicações, se for necessário.
Comentários:	Esta é a sua oportunidade de dizer se a resposta parece razoável, de acordo com a etapa “verificar”, ou talvez de falar de outras aplicações da solução, de acordo com a etapa “generalizar”.

Dado Um carro de passeio "típico" rodando uma distância "típica" por ano

Determinar Massa de CO_2 produzida por ano

Diagrama



Plano

1. Estimar a massa de gasolina queimada por ano por um carro de passeio típico
2. Calcular o número de mols de gasolina queimados a partir da massa
3. Usar a reação química da combustão da gasolina para determinar o número de mols de CO_2 produzidos
4. Calcular a massa de CO_2 a partir do número de mols

Suposições

Distância anual = 80 km/dia × 365 dias

= 29.200 km

Consumo de gasolina = 10 km/L

A gasolina é isooctano, C_8H_{18}, e queima de acordo com a reação

$$C_8H_{18} + 12{,}5\ O_2 \rightarrow 8\ CO_2 + 9\ H_2O$$

Constantes Físicas

Massas atômicas (MA), g/mol

$MA_H = 1$ $MA_C = 12$ $MA_O = 16$

Massa específica da gasolina = 0,75 kg/L

Análise

1. Estimativa da massa de gasolina queimada por ano

$$\text{Volume de gasolina por ano} = \frac{\text{distância por ano}}{\text{consumo de combustível}}$$

$$= 29.200\ \text{km} \times \frac{1}{10}\ \frac{\text{L}}{\text{km}}$$

$$= 2920\ \text{L}$$

Massa = massa específica × volume

$$= 0{,}75\ \frac{\text{kg}}{\text{L}} \times 2920\ \text{L}$$

$$\boxed{= 2190\ \text{L}}$$

2. Conversão da massa de gasolina para mols

Primeiro, precisamos da massa atômica da gasolina, C_8H_{18}

$$MA_{gas} = 8 \times MA_C + 18 \times MA_H$$
$$= 8 \times 12 + 18 \times 1$$
$$= 118\ g/mol$$

$$\text{Mols de gasolina} = \frac{\text{massa}}{MA_{gas}}$$
$$= \frac{2190 \times 1000\ g}{114 g/mol} = \boxed{19.211\ mol}$$

3. Calcular o número de mols de CO_2 produzidos

De acordo com a reação de combustão da gasolina, 8 mols de CO_2 são produzidos para cada mol de gasolina

$$\text{Mols de } CO_2 = 8 \times \text{mols de gasolina}$$
$$= 8 \times 19.211 = \boxed{153.688\ mol}$$

Figura 3.11 Exemplo de formato de um dever de casa.

4. Cálculo da massa de CO_2 produzida a partir do número de mols

Primeiro, precisamos calcular a massa atômica do CO_2

$$MA_{CO_2} = 1 \times MA_C + 2 \times MA_O$$
$$= 1 \times 12 + 2 \times 16$$
$$= 44\ g/mol$$

$$\text{Massa de } CO_2 = \text{mols de } CO_2 \times MA_{CO_2}$$
$$= 153.688 \times 44\ g/mol$$
$$\boxed{= 6762\ kg}$$

Comentários

A massa estimada de CO_2 é de 6762 kg. Isto corresponde a pouco mais de três vezes a massa da gasolina queimada. Isso acontece porque os átomos de carbono da gasolina se combinam com átomos de oxigênio do ar, o que aumenta a massa do gás produzido.

Figura 3.12 Exemplo de formato de um dever de casa (continuação).

3.7 PLANEJAMENTO DE PROJETOS MAIORES

As etapas apresentadas na Seção 3.5 se aplicam à solução de problemas de engenharia de todos os tamanhos, desde deveres de casa que podem ser resolvidos por um único aluno com lápis e papel, até complexos trabalhos de equipe que levam semanas, meses ou mesmo anos para serem terminados. Quanto maior a complexidade

do projeto, maior a importância da etapa de planejamento. Em particular, para qualquer projeto com um orçamento apertado e um cronograma inflexível, a diferença entre sucesso e fracasso está muitas vezes no modo como a equipe distribui o trabalho e administra o tempo. O gerenciamento de projetos é um tema complexo; muitos livros foram escritos a respeito de métodos para manter projetos na linha. Nesta seção, vamos examinar alguns problemas típicos dos grandes projetos e possíveis soluções discutindo o projeto de fim de curso de um grupo de alunos de engenharia mecânica da Universidade de Notre Dame. Além disso, vamos apresentar uma ferramenta muito comum para planejamento e apresentação de projetos chamada *carta de Gantt*.

3.7.1 SolderBaat: Um Sistema de Montagem e Testes de Placas de Circuito Impresso

AME40463 é a cadeira de Projeto de Fim de Curso do Departamento de Engenharia Aeroespacial e Mecânica da Universidade de Notre Dame [BR06].[3] Os alunos trabalham em grupos de 4 a 6 "engenheiros", e cada grupo se comporta como se fosse uma pequena empresa. Cada grupo é encarregado de projetar um produto, preparar a documentação apropriada e fabricar um protótipo que demonstre a viabilidade do projeto. O trabalho deve ser concluído dentro do prazo de duração do curso, que é de um semestre; os alunos se reúnem cinco horas em classe e pelo menos sete horas fora da classe por semana. Todo ano, várias opções de projeto são oferecidas à turma. Em 2006, uma das opções foi o projeto de um sistema de montagem, soldagem e teste de placas de circuito impresso. O objetivo do projeto era produzir um sistema automático capaz de tomar um componente eletrônico, inseri-lo em um conjunto de furos predeterminados em uma placa de circuito impresso, soldá-lo no lugar e testá-lo para assegurar que as conexões elétricas estavam perfeitas. Um grupo de estudantes (Nick Frohmader, Brad Shervheim, Jeff Lammermeier,

Mike Lavery e Dave Rowinski) criou um projeto chamado *SolderBaat*. A Figura 3.13 mostra a *home page* do projeto.

Figura 3.13 A *home page* do projeto SolderBaat mostra os membros do grupo discutindo o projeto.

Antes de descrever o processo pelo qual os alunos criaram SolderBaat (o objetivo principal desta seção) vamos dar uma olhada no resultado. A Figura 3.14 mostra uma fotografia do protótipo completo, enquanto a Figura 3.15 é um diagrama funcional. O dispositivo tem dois subsistemas principais, o **sistema mecânico** e o **sistema elétrico e de controle**, que compartilham motores, sensores e os ferros de soldar. Esses dois subsistemas são descritos abaixo, juntamente com *seus* subsistemas principais.

- O **sistema mecânico** forma a estrutura do SolderBaat.
  - O **carro de transporte** seleciona um componente e o mantém no lugar enquanto os **mecanismos de transporte** horizontal e vertical movem o carro até a posição correta. O mecanismo de transporte horizontal usa um **parafuso sem fim** para fazer o carro de transporte se mover ao longo de um par de **trilhos-guia**. O mecanismo de transporte vertical usa um **elevador de tesoura** para levantar o carro quando um segundo parafuso sem fim aproxima as pernas do elevador na base do carro. Os parafusos sem fim são acionados por **motores**, e **sensores de toque** são usados para determinar se o carro de transporte está na posição correta para a soldagem.
  - Quando o componente elétrico está na posição correta, a **estação de solda** é usada para soldá-lo na placa de circuito impresso. Ela levanta a placa com o componente na direção de dois **ferros de soldar**, que aquecem as ligações nas extremidades do componente. Um **mecanismo de alimentação** usa roletes motorizados para levar a solda dos carretéis para a ponta dos ferros. Uma lâmpada na placa de circuito impresso acende quando a ligação elétrica é completada corretamente.
- O **sistema elétrico e de controle** usa um **microcontrolador** que roda um **programa de computador** para operar o SolderBaat. Ele acompanha o funcionamento do sistema através de uma série de **sensores**, como sensores de posição nos mecanismos de transporte, sensores de calor nos ferros de soldar e um sensor de luz na estação de solda para determinar o momento de ligar e desligar os motores e os ferros de soldar.

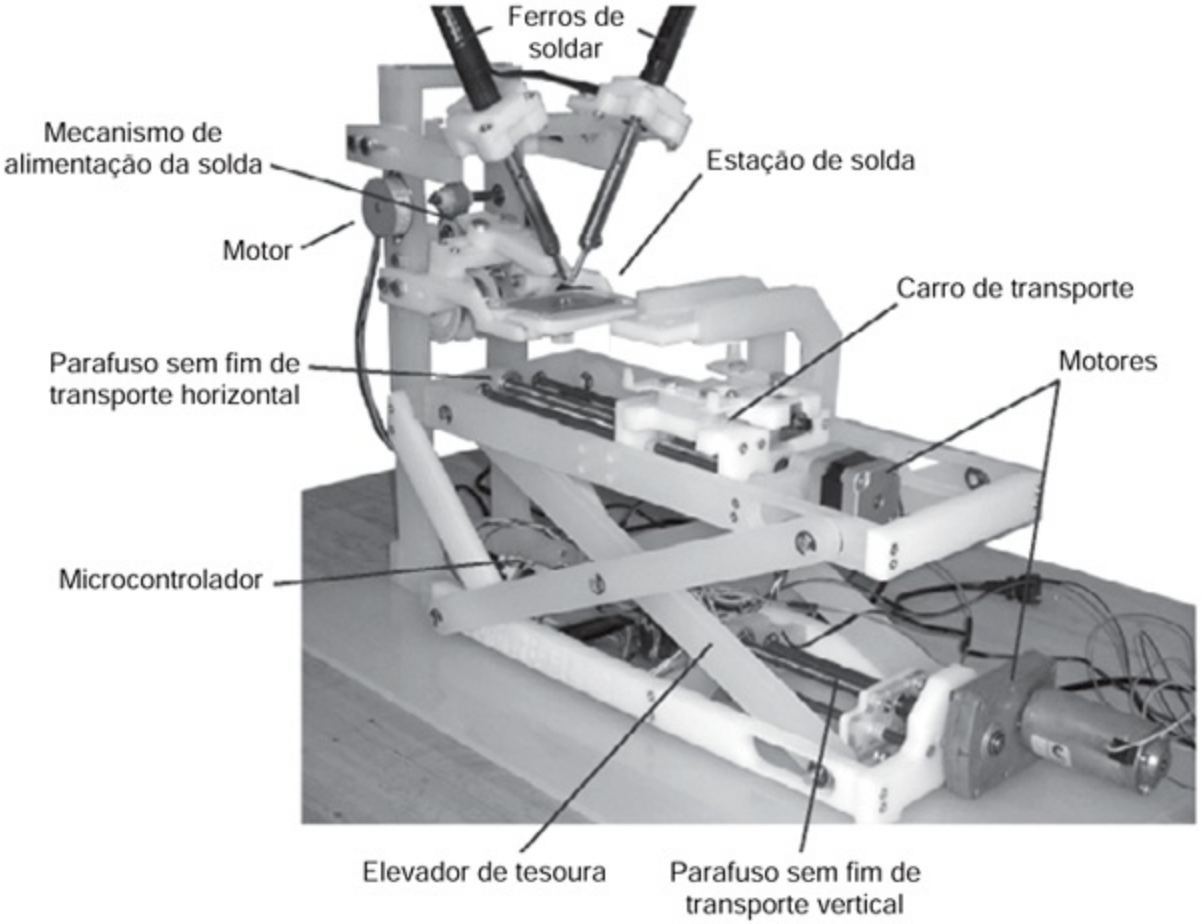


Figura 3.14 O SolderBaat.

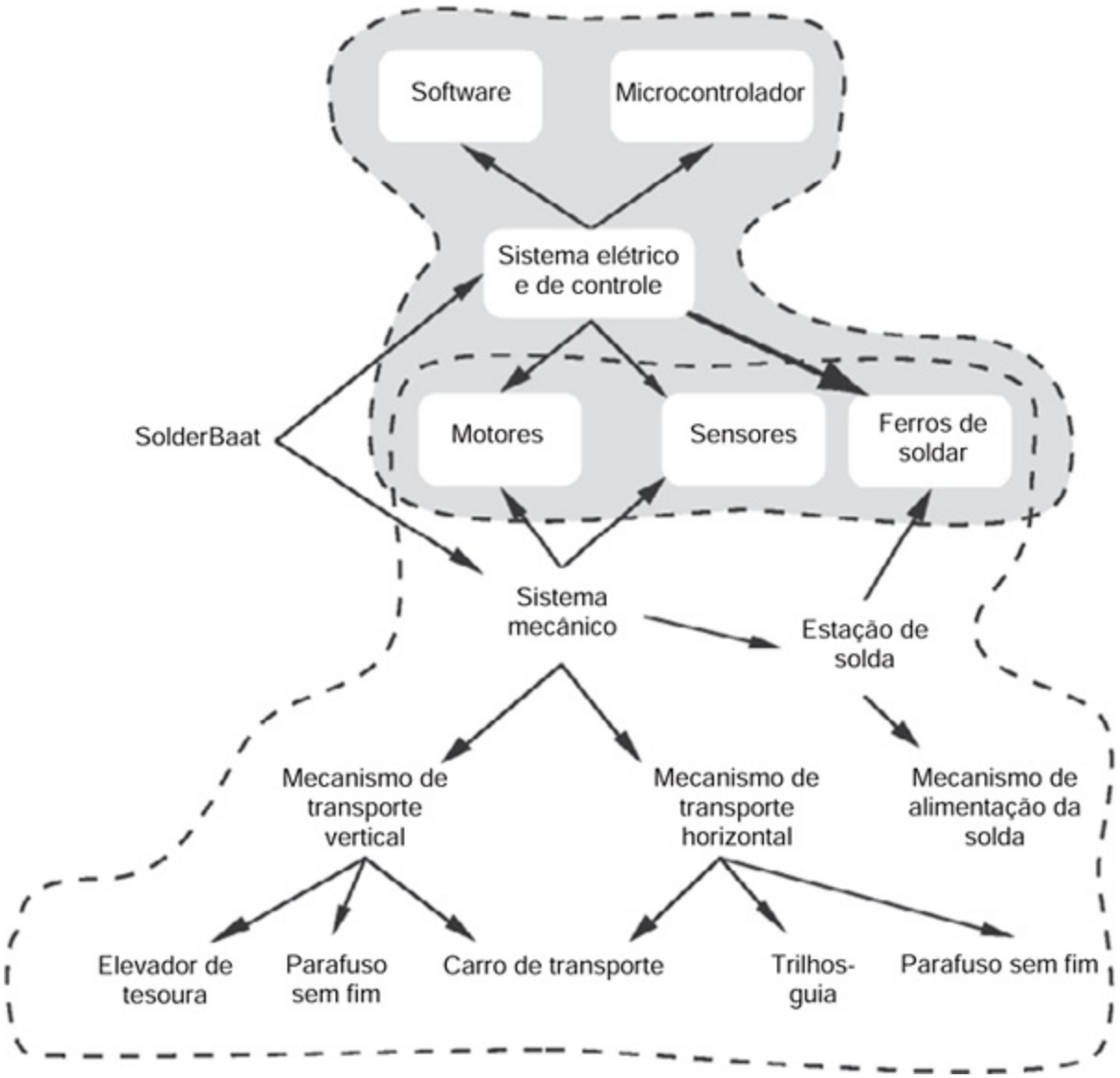


Figura 3.15 Diagrama funcional do SolderBaat e seus subsistemas. Todas as ligações do mapa conceitual representam relações do tipo “tem como parte”.

3.7.2 Escalonamento de Tarefas

Para terminar o projeto no prazo previsto, os alunos envolvidos em um projeto de fim de curso devem gerenciar adequadamente o tempo. Os Professores Steve Batill e John Renaud fornecem um manual para o projeto que apresenta certas atividades e prazos que todos os grupos devem cumprir para não se desviar do rumo. O manual tem por objetivo guiar os estudantes no processo de sugerir soluções e avaliar

se são viáveis antes de investirem tempo e dinheiro na construção do protótipo. Os professores apresentam o plano geral do projeto usando um diagrama padrão conhecido como *carta de Gantt*, juntamente com uma série de descrições de tarefas. A carta de Gantt é um conjunto de linhas de tempo que permite observar simultaneamente as datas iniciais e finais de todas as tarefas previstas no projeto. A Figura 3.16 mostra a carta de Gantt dos projetos de fim de curso. A coluna do lado esquerdo da carta mostra as tarefas e subtarefas previstas; do lado direito estão as linhas de tempo de cada tarefa e subtarefa. As barras cinzentas indicam as subtarefas, enquanto as barras pretas indicam as tarefas. As datas importantes são representadas por losangos. As tarefas do plano geral do projeto são descritas sucintamente nos parágrafos seguintes.

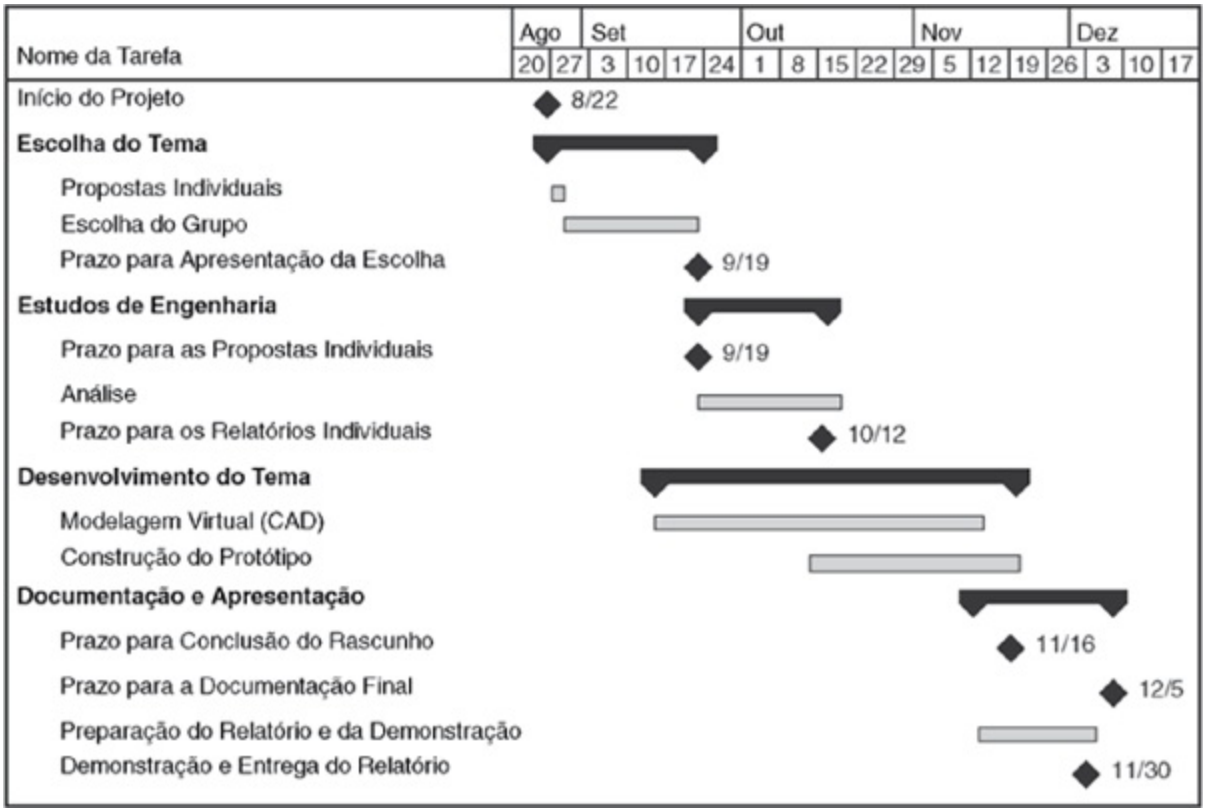


Figura 3.16 Carta de Gantt.

Escolha do Tema O objetivo desta tarefa é que cada grupo escolha um

esboço de projeto (uma ideia básica para o projeto) para ser examinado com detalhes durante o semestre. Cada membro do grupo deve submeter primeiro uma proposta individual com um esboço de sua ideia feito à mão. Usando essas propostas como ponto de partida, os grupos passam algumas semanas escolhendo o esboço mais promissor. Em seguida, o grupo como um todo apresenta um relatório preliminar e faz uma apresentação do esboço em sala de aula. A Figura 3.17 mostra dois esboços da fase inicial do SolderBaat.

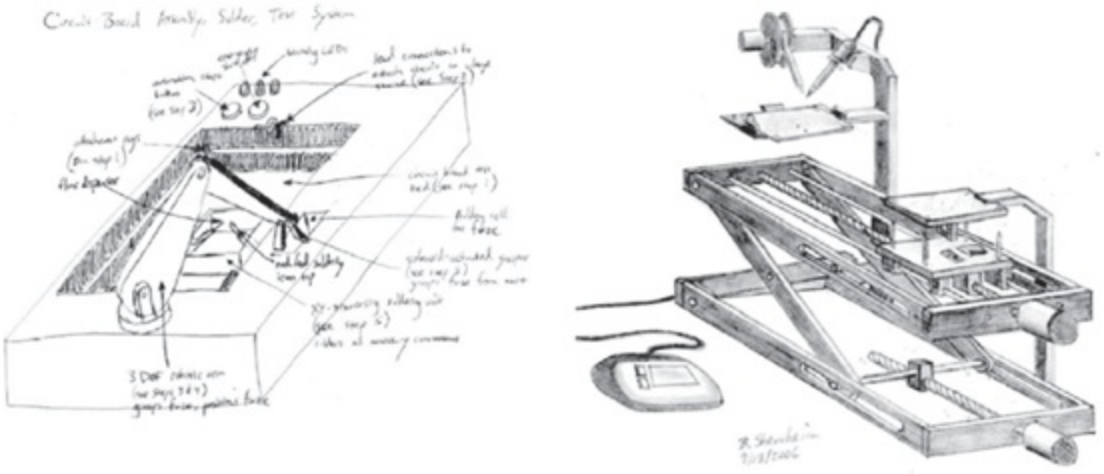


Figura 3.17 Esboços da fase inicial do SolderBaat. No projeto da esquerda, um braço robótico é usado para pegar um componente em uma bandeja e colocá-lo na placa de circuito impresso. O projeto da direita usa um mecanismo de transporte semelhante ao da versão final.

Estudos de Engenharia Os estudos de engenharia são experimentos que contribuem com dados quantitativos para decisões a serem tomadas durante o projeto. Para esta tarefa, cada estudante do grupo escolhe um aspecto do projeto para analisar. Antes de começar a análise, o estudante deve submeter uma proposta; isto força os alunos a pensarem nos aspectos do projeto que devem ser investigados com maior profundidade e também permite que os professores ofereçam alguma orientação. O grupo do SolderBaar realizou os seguintes estudos de engenharia:

- **Análise do Mecanismo de Levantamento:** o estudo de engenharia de Nick se concentrou no mecanismo de levantamento. O objetivo era duplo: determinar as dimensões necessárias para levantar a placa até a posição correta e encontrar um motor adequado para a tarefa. A Figura 3.18 mostra algumas das opções investigadas por ele. Os resultados da análise contribuíram diretamente para a escolha do sistema de levantamento usado no protótipo.
- **Análise do Mecanismo da Garra:** o estudo de engenharia de Jeff se concentrou no mecanismo da garra. Usando dados experimentais colhidos em testes de força e um modelo teórico, Jeff determinou os parâmetros da garra e os requisitos do solenóide associado.
- **Análise do Mecanismo de Soldagem:** o estudo de engenharia de Mike se concentrou no mecanismo de soldagem. A escolha da potência dos ferros de soldar, do tipo de solda, do comprimento do mecanismo de alimentação e do tempo de soldagem foi determinada usando modelos teóricos de transferência de calor e dados experimentais.
- **Análise do Sistema de Controle do Movimento Horizontal:** o estudo de engenharia de Dave se concentrou na questão do controle do movimento horizontal. Depois de desenvolver um modelo do controle do movimento usando um parafuso sem fim, um motor de passo e um controlador PID, ele verificou que um controle realimentado baseado em chaves de fim de curso seria o mais viável.
- **Análise de Rolamentos e Conexões:** o estudo de engenharia de Brad se concentrou nos rolamentos e conexões. Usando modelos teóricos de elementos de máquinas, Brad determinou as melhores opções para os rolamentos e articulações, e os resultados do seu estudo foram aplicados diretamente ao projeto.

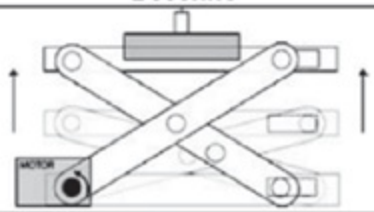
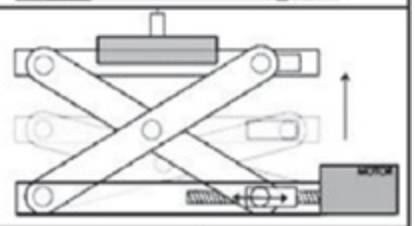
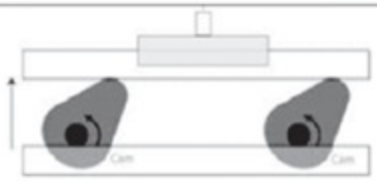
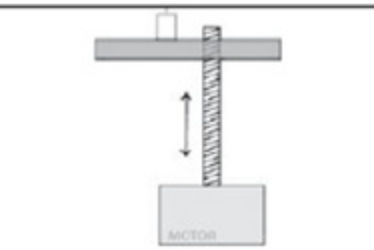
Opção	Vantagens	Problemas	Desenho
Elevador de tesoura acionado diretamente	– Maior amplitude de movimento (tesoura) – Simplicidade	– Desenvolver torque suficiente para manter a tesoura no lugar	
Elevador de tesoura acionado por parafuso sem fim	– Maior amplitude de movimento (tesoura) – Maior transferência de força (parafuso sem fim)	– Criar um mecanismo de acionamento	
Excêntrico	– Movimento totalmente programável	– Complexidade do projeto	
Parafuso sem fim vertical	– Movimento linear – Controle semelhante ao do movimento horizontal	– Difícil de instalar – Peso excessivo	

Figura 3.18 Opções para o mecanismo de transporte vertical analisadas em um dos estudos de engenharia.

Desenvolvimento do Tema O desenvolvimento do tema é a parte de execução do projeto. Começa com os estudos de engenharia e continua com a montagem do protótipo. Uma parte importante desta fase é a criação de um modelo virtual do sistema, usando um pacote de desenho e fabricação assistidos por computador (CAD/CAM) chamado Pro/ENGINEER [Par] mostrado na Figura 3.19. Usando esta ferramenta, os estudantes entram com as plantas do projeto no computador e podem criar animações que mostram o sistema em funcionamento. O programa de CAD/CAM também permite enviar instruções para equipamentos que cortam, furam e moldam as peças necessárias para produzir um protótipo.

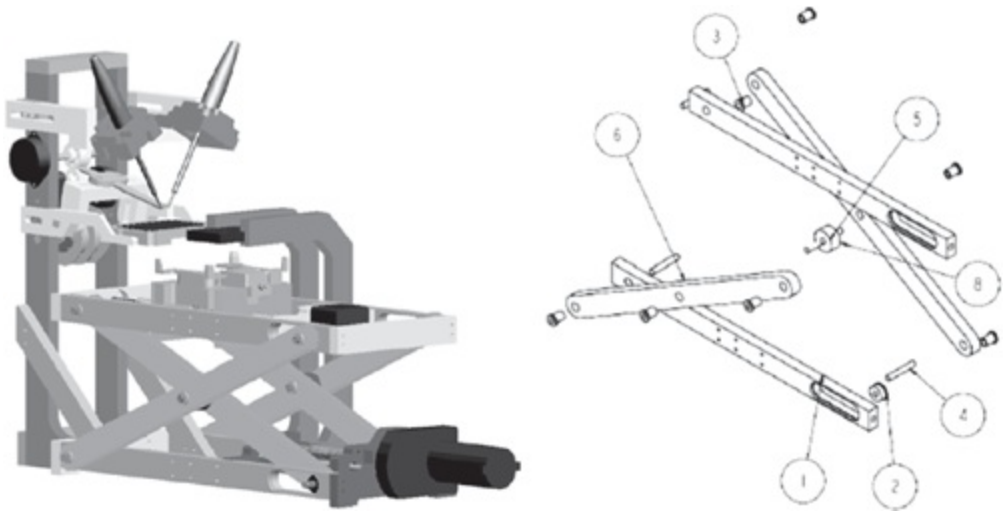


Figura 3.19 Esquerda: Modelo virtual do SolderBaat no Pro/E. Direita: Vista explodida do elevador de tesoura, também no Pro/E.

Documentação e Apresentação A tarefa final consiste em preparar a documentação do projeto e apresentar o projeto final e uma demonstração a uma banca de avaliadores externos, quase sempre da indústria. A Figura 3.20 mostra duas páginas do manual do SolderBaat.

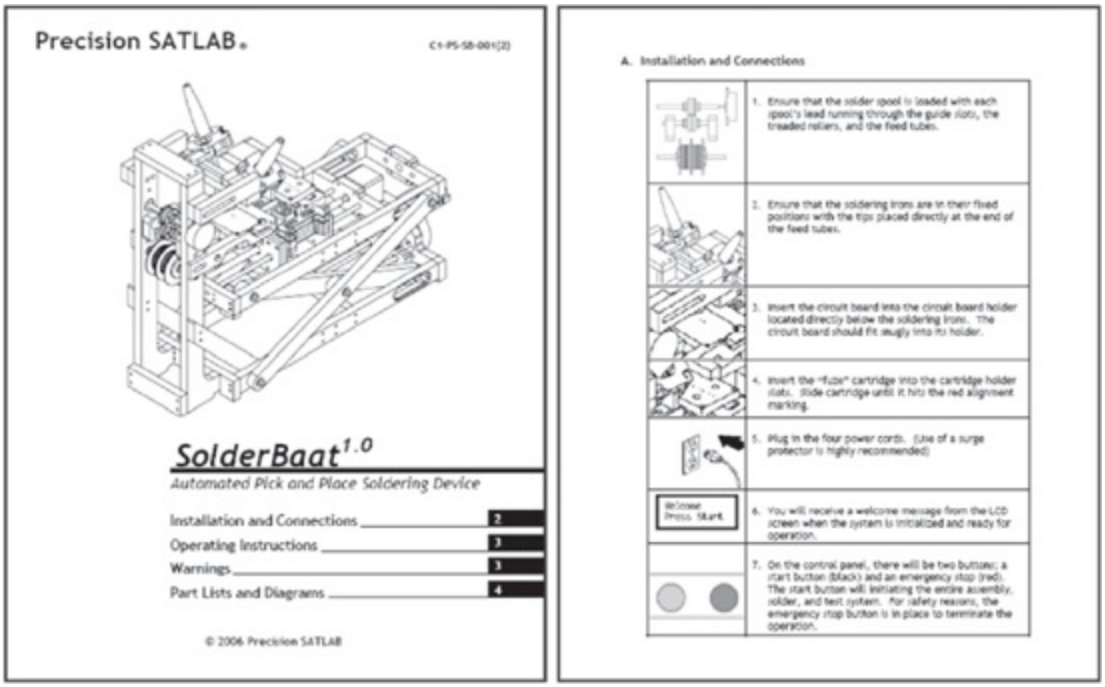


Figura 3.20 Duas páginas do manual do SolderBaat.

3.7.3 Trabalho de Equipe e Resultados

Como projeto de fim de curso, o SolderBaat foi um sucesso sob dois aspectos: como tema e como experiência de aprendizado. Embora o projeto de fim de curso do Departamento de Engenharia Aeroespacial e Mecânica da Universidade de Notre Dame procure reproduzir um projeto industrial, existem diferenças importantes. Em primeiro lugar, o projeto não inclui o importante passo inicial de pesquisa de mercado e definição de requisitos, que fica por conta do professor. Além disso, não todos, mas muitos projetos industriais começam com a escolha de um líder experiente que, por sua vez, escolhe um grupo de funcionários com as qualificações necessárias para o projeto. No caso dos membros do SolderBaat, foi sua primeira experiência em um projeto dessa complexidade, e eles tiveram que aprender a trabalhar em equipe durante a execução do projeto. Mesmo assim, cumpriram os prazos, mantiveram-se dentro do orçamento, produziram uma documentação excelente e foram avaliados favoravelmente pela banca de especialistas da indústria. Dave descreve da seguinte forma este trabalho de equipe:

> Rememorando a história do SolderBaat, observo dois elementos importantes que contribuíram para o nosso sucesso. O primeiro foi o fato de que estabelecemos os objetivos e distribuímos as responsabilidades logo no primeiro momento. Embora essas decisões não tenham tomado muito tempo, estiveram presentes durante todo o projeto. Na metade do semestre, alguns grupos ainda estavam mudando os objetivos básicos, o que exigiu mudanças drásticas no projeto. Como nossos objetivos foram definidos desde o início, os detalhes evoluíram gradualmente, à medida que novas complexidades foram descobertas, mas o projeto geral permaneceu o mesmo. O segundo elemento foi que, apesar de este certamente não ter sido um projeto fácil e de terem acontecido vários contratempos, no conjunto tivemos uma experiência muito divertida. Embora nenhum membro da nossa equipe conhecesse os outros previamente, tivemos uma excelente dinâmica de grupo. Houve ocasiões em que um dos membros do grupo queria fazer as coisas de outro jeito, mas cedeu para manter todo mundo feliz. Nos casos em que as decisões realmente faziam diferença, essas outras ideias não eram abandonadas sem uma análise técnica, mas, no caso de

problemas menores, a cooperação era a tônica.

A diversidade de competências da equipe também foi uma vantagem. Brad e Mike eram os melhores mecânicos e Dave era o melhor programador. Jeff cuidou de boa parte da montagem e Nick funcionou como líder do grupo, cuidando da maior parte das tarefas administrativas. Depois que os membros do grupo encontraram seus nichos, estabeleceram um padrão regular de trabalho, como Nick descreve:

> A força do grupo do SolderBaat estava no modo como nós todos trabalhávamos juntos pelo mesmo objetivo. Um exemplo típico aconteceu na fase de fabricação e montagem das peças. Brad era encarregado de conceber e desenhar uma peça para a mesa de CNC [controle numérico por computador, a máquina de usinagem]; Mike usava o desenho para usinar a peça na máquina; Jeff recebia a peça e fazia o acabamento manual (furação, remoção das rebarbas, etc.); enquanto isso, Dave trabalhava nos controles para movimentar o conjunto. Todos trabalhavam para ajudar o grupo. Estabelecemos um cronograma e procuramos cumpri-lo na medida do possível, adiando prazos como um grupo e não por causa de uma pessoa. Trabalhar individualmente para o objetivo do grupo nos ajudou a transformar SolderBaat de ideia em realidade.

A banca de avaliadores externos identificou vários pontos nos quais o projeto do SolderBaat podia ser melhorado. Em particular, eles observaram que a versão do SolderBaat que foi apresentada seria difícil de fabricar automaticamente. O produto mais importante do projeto de fim de curso, porém, são os próprios estudantes, e a equipe do SolderBaat aprendeu muito com a experiência. Nas palavras de Mike:

> O projeto de fim de curso, embora tenha dado muito trabalho, foi uma experiência bastante positiva. Foi bom pegar toda a experiência que acumulei durante os últimos três anos e aplicá-la a um problema de verdade. Ver um resultado concreto, em vez de apenas números no papel, foi muito gratificante.

3.8 HEURÍSTICAS

O matemático Georg Pólya comentou que, na época de estudante, ele

> assistia às aulas, lia livros, tentava absorver as soluções e fatos que eram apresentados, mas uma dúvida o atormentava o tempo todo: "Sim, a solução parece funcionar, parece estar correta, mas como é possível inventar uma solução dessas?" [Pol45].

Anos mais tarde, como professor de Stanford, a vontade de explicar aos alunos o processo de solução de problemas o levou a escrever o livro *A Arte de Resolver Problemas*. Pólya expõe seu método na forma de um diálogo entre um professor e um aluno, que ele explica da seguinte forma:

> A jornada entre entender um problema e formular um plano pode ser longa e tortuosa. Na verdade, a realização mais importante na solução de um problema é a formulação de um plano. A ideia pode surgir gradualmente, ou, depois de várias tentativas malsucedidas e um período de hesitação, pode ocorrer subitamente, em um lampejo, na forma de uma "ideia brilhante". O melhor que o professor pode fazer por um aluno é arranjar para ele, através de uma ajuda discreta, uma ideia brilhante. As questões e sugestões que vamos discutir tendem a estimular esse tipo de ideia [Pol45].

As questões e sugestões que Pólya apresenta são "regras de bolso" para solução de problemas, chamadas *heurísticas*. Nesta seção, vamos discutir algumas das heurísticas mais usadas, que se baseiam nos trabalhos de Pólya e outros autores como Rubinstein [Rub75], Wankat e Oreovicz [WO93] e Lumsdaine e Lumsdaine [LL95].

Como foi discutido na Seção 3.4, uma das habilidades mais importantes que um aluno pode desenvolver é a capacidade de se tornar seu próprio professor. Quando estiver "empacado" em um problema, tente travar um diálogo interno semelhante ao de Pólya com seu aluno, usando esta lista de heurísticas como guia para produzir essa "ideia brilhante".

3.8.1 Escreva no Papel

Como bem mostrou o exemplo da multiplicação de um número de 4 algarismos por um número de 2 algarismos na Seção 2.1, a capacidade limitada da memória de curto prazo torna muito difícil resolver de cabeça problemas com mais do que alguns conceitos. Não confie na memória; anote as ideias no papel. O simples ato de observar as partes de um problema em uma folha de papel pode ajudá-lo a vencer barreiras.

3.8.2 Escreva em Termos Mais Simples

Descrever um problema em termos mais simples ajuda a melhorar a compreensão e eliminar informações irrelevantes. Como é sugerido em [Rub75]:

- Ao descrever um problema, tente dividir as informações em pedaços.
- Se um problema em palavras pode ser escrito em forma simbólica ou matemática, faça isso.

3.8.3 Faça uma Figura

Você já deve ter desenhado pelo menos *uma* figura no estágio de "definir o problema", mas, durante o processo de solução, pode ser interessante desenhar novas figuras. Esta sugestão, na verdade, é apenas uma variante do processo de descrever o problema em termos mais simples. O Exemplo 3.2 serve para ilustrar a importância de uma figura.

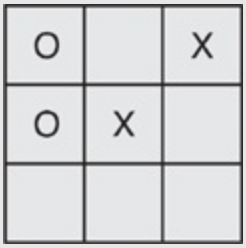
Exemplo 3.2 Desenhe uma Figura

Dada a seguinte descrição de um tabuleiro de jogo-da-velha, determine qual deve ser a próxima jogada de X.

> O primeiro X é colocado no centro do tabuleiro. O primeiro O é colocado um quadrado à esquerda e um quadrado acima do primeiro X. O segundo X é colocado

dois quadrados à direita do primeiro O. O segundo O é colocado um quadrado abaixo do primeiro O.

Solução É difícil resolver o problema sem desenhar uma figura do tabuleiro. Com a figura, é muito fácil.



3.8.4 Você Conhece um Problema Parecido?

Esta é provavelmente a heurística mais usada: procurar um problema que se pareça com o que você está tentando resolver. Se tiver dificuldade para resolver um dever de casa, os lugares mais promissores para procurar um problema semelhante são os exemplos do livro-texto e os exercícios resolvidos em sala, já que muitos deveres de casa de rotina têm por objetivo testar a sua compreensão e sua capacidade de aplicar os conceitos ilustrados por esses exemplos.

Resolver um problema fora de contexto é certamente mais difícil e a dificuldade de encontrar um problema semelhante também é maior. Como observa Pólya, existem vários pontos que os problemas podem ter em comum; o segredo é descobrir um problema que esteja relacionado ao problema em curso de uma forma que ajude a obter uma solução. A sugestão de Pólya é observar a incógnita e pensar em um problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou uma incógnita semelhante. Embora seja útil, esta heurística não pode ser aplicada cegamente, como ilustra o Exemplo 3.3.

Exemplo 3.3 Problemas Parecidos

Dos três problemas a seguir, quais são os dois que têm mais pontos em comum?

1. Os catetos de um triângulo retângulo têm 3 m e 4 m. Qual é o perímetro?
2. Os lados de um retângulo têm 3 m e 4 m. Qual é o perímetro?
3. Uma pessoa está atravessando um rio em um barco a remo. Se a pessoa está remando com uma velocidade de 3 km/h perpendicularmente às margens e a velocidade da água do rio é de 4 km/h, qual é a velocidade escalar do barco?

Solução Embora os problemas 1 e 2 envolvam o cálculo do perímetro de polígonos e o problema 3 envolva o cálculo da velocidade de um barco, os problemas 1 e 3 envolvem o uso do Teorema de Pitágoras para calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo. A experiência de resolver o problema 2 não ajudaria o aluno a resolver o problema 1 ou o problema 3, mas a experiência de resolver o problema 1 ou o problema 3 ajudaria o aluno a resolver o outro. Assim, os problemas 1 e 3 são os que têm mais pontos em comum.

3.8.5 Trabalhe para a Frente e para Trás

A tática de trabalhar para trás, também chamada de encadeamento para trás, consiste em partir da solução para chegar aos dados. Esta é provavelmente a melhor abordagem para iniciar um problema de engenharia, já que ajuda a concentrar a atenção nos objetivos e em formas de estabelecer objetivos intermediários. Um exemplo de encadeamento para trás foi o plano para calcular a quantidade de tinta necessária para pintar uma caixa d'água, discutido no Exemplo 3.1. A tática de trabalhar para a frente, também conhecida como encadeamento para a frente, consiste em examinar os dados e buscar maneiras de usá-los para chegar mais perto da solução. O Exemplo 3.4 ilustra o uso das duas táticas para resolver o mesmo problema.

Exemplo 3.4 Qual É o Número Total de Partidas do Torneio?

Um torneio de basquetebol é disputado por 64 times. Se todas as partidas são eliminatórias, quantas partidas têm que ser disputadas para que seja conhecido o campeão?

Solução Neste problema, a tática do encadeamento para a frente consiste em partir dos 64 times e reduzi-los sistematicamente a 1 campeão, começando com 32 jogos na primeira rodada, 16 na segunda, e assim por diante, até chegar à partida final, somando o número de jogos ao longo do processo.

Antes de fazer a soma para obter a solução, pense em como é mais simples usar a tática do encadeamento para trás. No final do torneio, há 1 time campeão e 63 times perdedores. Como em cada partida disputada existe um perdedor, o número de partidas disputadas é 63. Faça agora a soma e verifique que o resultado é o mesmo.

3.8.6 Trabalhe de Cima para Baixo e de Baixo para Cima

Os termos “de cima para baixo” e “de baixo para cima” se referem ao sentido em que é resolvido um problema com uma organização hierárquica, usando como referência um grafo em forma de árvore no qual a raiz fica no alto e as folhas ficam na base. A abordagem de cima para baixo significa dividir o problema em subproblemas (como na tática de dividir para conquistar), enquanto a abordagem de baixo para cima implica tomar as peças existentes e combiná-las.

Um problema que ilustra a diferença entre as duas abordagens é o do planejamento de um jantar de cerimônia, ilustrado na Figura 3.21. O planejamento de um jantar para um grande número de convidados normalmente é executado de cima para baixo: você começa com o objetivo de servir uma refeição, divide a refeição em pratos, como entrada, prato principal e sobremesa, e divide cada prato em opções e ingredientes específicos. Por outro lado, o planejamento do almoço do *dia seguinte* é normalmente executado de baixo para cima, para aproveitar as sobras!

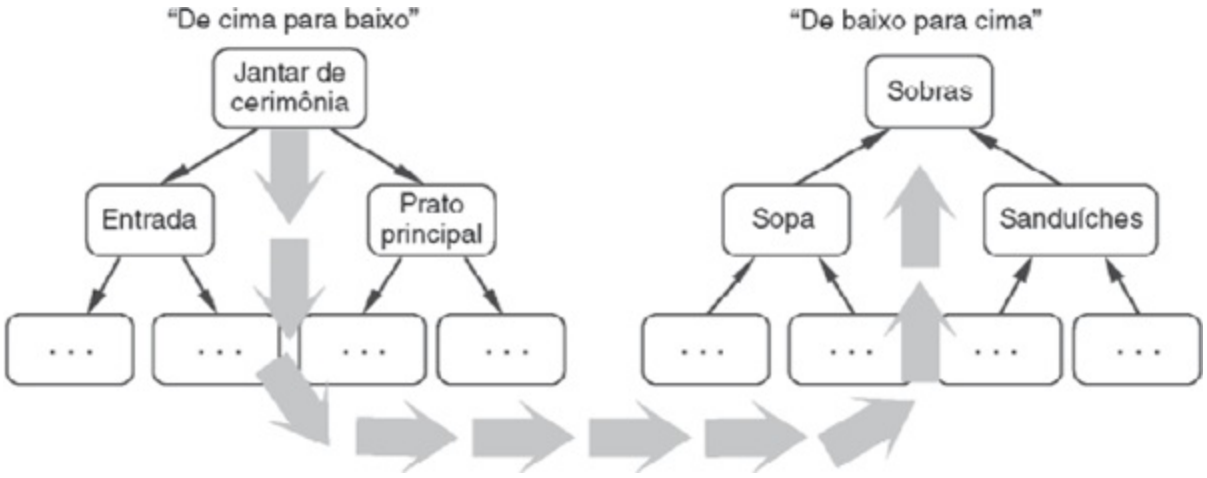


Figura 3.21 Comparação entre o planejamento de cima para baixo e de baixo para cima de uma refeição.

Alternar entre trabalhar para a frente e para trás ou entre trabalhar para baixo e para cima para chegar à solução completa no meio do caminho também pode ser uma abordagem produtiva, que é frequentemente praticada.

3.8.7 Divida para Conquistar

Dividir um problema complexo em pedaços que possam ser resolvidos independentemente é uma habilidade essencial para um engenheiro. É também uma habilidade difícil, pois exige o entendimento dos conceitos centrais do problema no nível de análise. A tática de dividir para conquistar funciona quando um problema pode ser dividido em partes *independentes*, ou seja, partes cuja solução não tem influência sobre a solução das outras partes. A divisão da caixa d'água do Exemplo 3.1 em componentes que podiam ser pintados separadamente é uma boa ilustração da técnica. Outro exemplo de dividir para conquistar é a fatoração de um polinômio para determinar suas raízes, ilustrada no Exemplo 3.5.

Exemplo 3.5 Dividir e Conquistar: Determinação das Raízes de um Polinômio

Determine os valores de x que satisfazem a seguinte equação:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

Solução Para usar a abordagem de dividir para conquistar, fatoramos o polinômio do segundo grau em dois polinômios do primeiro grau e determinamos os valores de x que anulam esses dois polinômios. Como os fatores são independentes, podemos determinar as raízes separadamente.

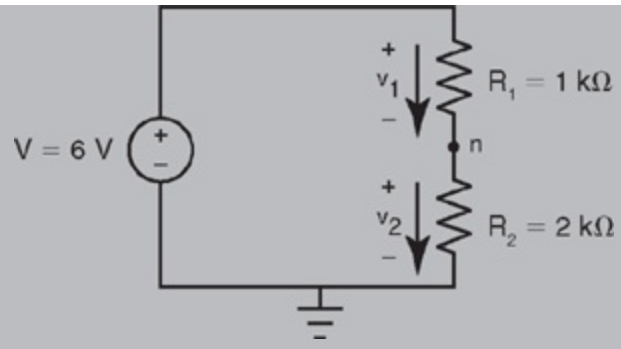
$$(x-3)(x-4)=0$$
$$x-3=0 \quad \text{ou} \quad x-4=0$$
$$x=\{3,4\}$$

É importante notar que nem todos os problemas podem ser facilmente divididos em partes que podem ser resolvidas independentemente. O projeto de um avião é um bom exemplo. Não é possível projetar a fuselagem independentemente das asas, pois toda a estrutura precisa ter uma forma aerodinâmica para poder voar. Na verdade, qualquer aspecto do projeto que afeta o peso do avião, como o número de passageiros e a quantidade de combustível nos tanques, tem influência sobre a aerodinâmica. Para resolver problemas desse tipo, em geral é preciso recorrer a técnicas que permitem lidar com mais de uma variável ao mesmo tempo. O Exemplo 3.6 ilustra esta situação no caso do cálculo da tensão entre os terminais dos componentes de um circuito elétrico simples.

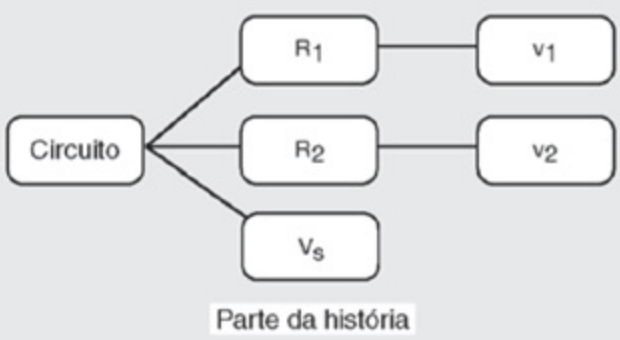
Exemplo 3.6 Tensões em um Circuito Elétrico

Determine as tensões v_1 e v_2 entre os terminais dos resistores R_1 e R_2 do circuito a seguir. Use as seguintes leis para obter a solução:

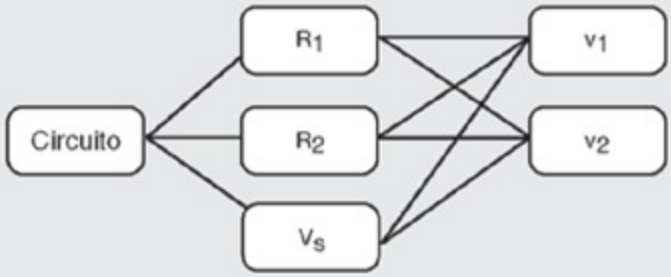
- *Lei de Kirchhoff para Tensões*: A soma das quedas e elevações de tensão em uma malha fechada é igual a zero.
- *Lei de Kirchhoff para Correntes*: A soma das correntes que entram em um nó é zero.
- *Lei de Ohm*: A corrente em um resistor é igual à tensão entre os terminais dividida pela resistência.



Solução Talvez pensando em outros problemas nos quais foi possível dividir um sistema em partes, como o problema da caixa d'água do Exemplo 3.1, você pode se sentir tentado a calcular separadamente o valor de v_1 em termos de R_1 e o valor de v_2 em termos de R_2. O problema, porém, é que, neste caso, v_1 e v_2 dependem *tanto* de R_1 *como* de R_2, como mostra o diagrama abaixo:



Parte da história



A história completa

Isso acontece porque as quedas de tensão nos resistores dependem da corrente no circuito, que passa pelos dois resistores e, portanto, dependem de ambos. Sistemas com dependências mútuas como este circuito levam a sistemas de várias equações com várias incógnitas que devem ser resolvidas *simultaneamente*. Neste caso, podemos escrever duas equações usando as Leis de Kirchhoff para Tensões e para Correntes em termos das tensões desconhecidas v_1 e v_2. Primeiro, de acordo com a Lei de Kirchhoff para Tensões, a soma das

quedas de tensão nos dois resistores menos a elevação de tensão na fonte de alimentação é igual a zero:

$$v_1 + v_2 - V = 0$$

De acordo com a Lei de Kirchhoff para Correntes, a corrente que entra no nó n menos a corrente que sai do nó n é igual a zero. Usando a Lei de Ohm para determinar as correntes nos resistores em função das tensões, temos:

$$\frac{v_1}{R_1} - \frac{v_2}{R_2} = 0$$

Substituindo R_1 e R_2 pelos valores das resistências, obtemos um sistema de duas equações com duas incógnitas:

$$v_1 + v_2 = 6$$

$$v_1 - \frac{1}{2}v_2 = 0$$

Resolvendo o sistema, obtemos $v_1 = 2$ volts e $v_2 = 4$ volts.

3.8.8 Verifique se Existem Restrições Desnecessárias

Você pode tornar um problema mais difícil do que realmente é se fizer restrições desnecessárias. Esta heurística pode ser chamada de "sair da casca". O Exemplo 3.7 mostra um problema clássico, mencionado em [NS72] e [Rub75], no qual esta heurística pode ser útil.

Exemplo 3.7 Saindo da Casca

Sem tirar o lápis do papel, trace quatro linhas retas que passem pelos nove pontos da figura abaixo.

Solução Aqui vai uma pista: não é necessário que os pontos de encontro das retas estejam nos pontos, nem que as retas se limitem ao quadrado formado pelos pontos da periferia.

Outro problema no qual evitar restrições desnecessárias pode ser útil é o seguinte: use seis lápis de mesmo comprimento (sem quebrá-los) para construir quatro triângulos.

3.8.9 Discuta

Discutir um problema com outra pessoa pode ajudá-lo a sair de um impasse. Muitas vezes, a simples ação de descrever o problema para alguém pode abrir novas ideias. Pessoas acostumadas a fazer as perguntas certas, como monitores ou professores, podem ser particularmente úteis. Amigos também podem se ajudar mutuamente pensando em voz alta ou mesmo preparando uma série de perguntas baseadas nesta lista de heurísticas. Quando você estiver discutindo um problema, não deixe de *prestar atenção* nas ideias dos outros; isso às vezes exige um esforço consciente quando você está muito preocupado com um problema.

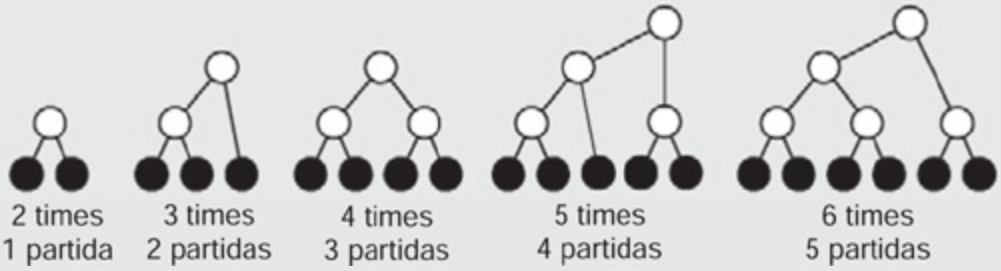
3.8.10 Tente Resolver uma Versão Simplificada do Problema

Às vezes, formular e resolver uma versão simplificada do problema, que seja mais fácil de resolver, ajuda a discernir um padrão que pode ser aplicado ao problema maior. Como exemplo, vamos considerar novamente o problema de determinar o número de partidas disputadas em um torneio, proposto anteriormente no Exemplo 3.4.

Exemplo 3.8 Número de Partidas de um Torneio, Resolvido de Outra Forma

Experimente resolver o problema de determinar o número de partidas de um torneio, apresentado anteriormente no Exemplo 3.4, resolvendo primeiro os casos mais simples, com um número menor de times.

Solução O desenho abaixo mostra as soluções do problema para os casos mais simples de 2, 3, 4, 5 e 6 times, em que o número é suficientemente pequeno para representar graficamente as partidas e simplesmente contá-las.



Vemos surgir um padrão. Embora não haja uma prova formal, o número de jogos parece ser igual ao número de times menos um. Ao nos perguntarmos por que isso acontece, podemos chegar à abordagem do "encadeamento para trás" que se discutiu no Exemplo 3.4.

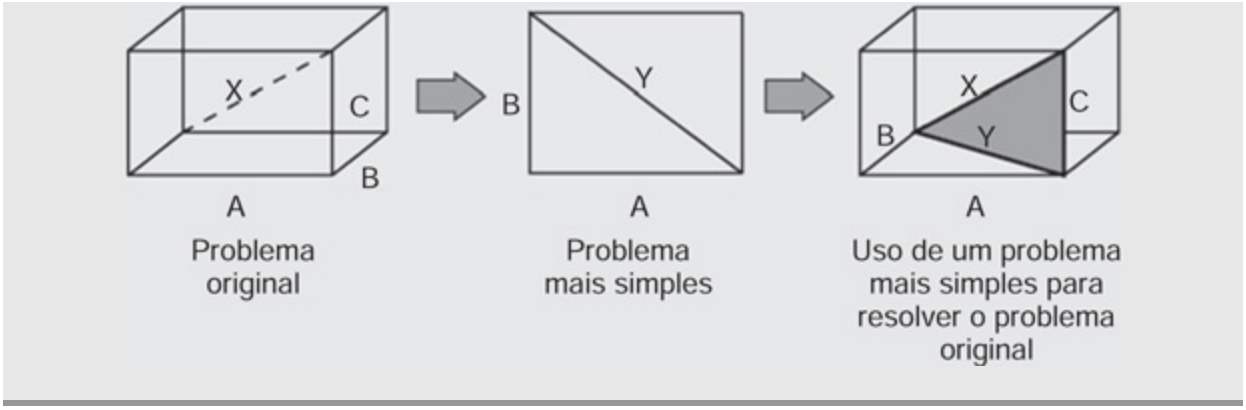
3.8.11 Tente Resolver um Problema Mais Simples do Mesmo Tipo

Resolver um problema mais simples que conserve algumas ideias do problema original, mas deixe outras de lado, pode fornecer as ideias de que você precisa para resolver o problema mais complexo. Uma boa ilustração desta heurística é o Exemplo 3.9, proposto por Pólya [Pol45]. Neste exemplo, a solução de um problema bidimensional relacionado ao problema tridimensional original ajuda a estabelecer o conceito mais importante para chegar à solução.

Exemplo 3.9 Cálculo da Diagonal de uma Caixa

Dada uma caixa retangular de dimensões *A*, *B* e *C*, qual é o comprimento da diagonal da caixa?

Solução Em *A Arte de Resolver Problemas* [Pol45], o autor descreve uma discussão imaginária entre um professor e um aluno que está tendo dificuldades para resolver um problema. O professor pergunta ao aluno se ele não pode imaginar um problema mais simples que se pareça com o problema original. Depois de alguma insistência, o aluno se lembra do problema de calcular o comprimento da diagonal de um retângulo, que ele sabe que pode ser resolvido usando o Teorema de Pitágoras. O professor então pergunta ao aluno se ele não acha que o resultado pode ser aplicado à solução do problema original. O aluno responde que sim; agora ele enxerga um caminho para a solução, indicado na figura abaixo. Você é capaz de acompanhar o raciocínio do aluno?



3.8.12 Use Modelos

Um modelo é uma aproximação do sistema real; ao ser submetido a certas ações, o modelo reage de uma forma que permite estimar qual seria o comportamento do sistema real na mesma situação. Em termos de precisão, os modelos podem variar desde os grosseiros até os extremamente precisos, e existe em geral um compromisso entre a precisão de um modelo e o custo e trabalho necessários para desenvolvê-lo. Os modelos podem assumir muitas formas: réplicas, equações, simulações em computador, etc.

Mesmo modelos muito simples podem facilitar a solução de um problema, como mostra o Exemplo 3.10.

Exemplo 3.10 Hobbits e Orcs

Três hobbits e três orcs estão na margem de um rio. Todos querem passar para o outro lado, usando uma canoa que comporta apenas dois passageiros. Em nenhum momento pode haver mais orcs do que hobbits em uma das margens do rio, pois os orcs matariam os hobbits. Formule um plano para transportar as seis criaturas para o outro lado sem que os hobbits sejam mortos.

Solução É muito mais fácil usar modelos físicos, como moedas diferentes para os hobbits e para os orcs, do que tentar resolver este problema de cabeça ou com papel e lápis. Este exemplo também costuma ser usado para ilustrar o fato de que, para resolver um problema, às vezes é necessário adotar medidas que parecem *afastar* você do objetivo final.

Observe que este problema com hobbits e orcs é uma versão “atualizada”

[And80] de um problema clássico de inteligência artificial chamado "missionários e canibais" [NS63].

3.8.13 Teste Palpites

Ironicamente, no caso de alguns problemas de difícil solução, é fácil verificar se a resposta está correta. Nessas situações, testar palpites pode ser a melhor abordagem.

O segredo para usar esta técnica é dar bons palpites e, sempre que possível, usar a experiência com palpites errados para chegar mais perto da resposta. Para ter uma ideia do poder desta técnica, pense no jogo "Vinte Perguntas". Neste jogo, um dos jogadores pensa em uma palavra e o outro pode fazer até vinte perguntas do tipo sim ou não para adivinhar a palavra. Apesar do vasto número de possibilidades, um jogador habilidoso quase sempre consegue chegar à solução correta.

Exemplo 3.11 Encontre a Raiz de um Polinômio por Tentativas

Determine um valor de x, com precisão de uma casa decimal, que satisfaça a seguinte equação:

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 100 = 0$$

Solução No Exemplo 3.5, fatoramos um polinômio para determinar as raízes. Neste caso, porém, a fatoração não é tão simples. Por isso, vamos usar a abordagem de testar palpites. Em primeiro lugar, como o lado esquerdo da equação é negativo para valores negativos muito grandes de x e positivo para valores positivos muito grandes de x, sabemos que o polinômio se anula para algum valor intermediário. Nossa estratégia será usar vários palpites para o valor de x, estreitando cada vez mais a região na qual o lado esquerdo da equação muda de sinal. Para começar, fazemos $x = 0$, o que nos dá $f(0) = -100$. Em seguida, fazemos $x = 10$, obtendo $f(10) = 400$. Isso significa que $f(x)$ deve ser igual a 0 para algum valor de x entre $x = 0$ e $x = 10$. Experimentamos o valor de x no centro deste intervalo, $x = 5$, que nos dá $f(x) = -50$. Agora sabemos que existe uma raiz entre $x = 5$ e $x = 10$. Continuamos a dar palpites desta forma, dividindo o intervalo ao meio de cada

vez, como mostra a tabela a seguir:

Palpite	x	$f(x) = x^3 - 7x^2 + 20x$ -
1	0	-100
2	10	400
3	5	-50
4	7,5	78,1
5	6,25	$-4,3$
6	6,4	3,4
7	6,3	$-1,8$

Assim, $x = 6,3$ é uma solução desta equação com precisão de uma casa decimal. Observe que poderíamos chegar mais depressa à solução dando palpites "melhores". Uma ideia seria plotar em um gráfico os valores da função em $x = 0$, $x = 5$ e $x = 10$ e interpolar para ver em que ponto o gráfico cruza o eixo x. Isso nos pouparia vários palpites.

3.8.14 Use uma Analogia

Analogia é uma relação entre duas situações na qual os conceitos de uma das situações têm uma correspondência direta ou são *mapeados* para os conceitos da outra situação. As analogias são instrumentos poderosos para o aprendizado e a solução de problemas, particularmente se você está familiarizado com os conceitos de uma área e consegue usá-los para entender os conceitos de uma área com a qual está menos familiarizado. Assim, por exemplo, a vazão de água em um cano é usada frequentemente como analogia para a passagem de corrente elétrica em um fio, como mostra a Figura 3.22.

Os engenheiros estão acostumados a usar analogias da física e da biologia como inspiração para resolver problemas e criar inventos. Em 1948, por exemplo, o inventor suíço George de Mestral teve a

ideia para um novo tipo de fecho ao ver seu cão coberto de carrapichos depois de um passeio no mato. Quando voltou para casa, observou ao microscópio que havia pequenos ganchos na ponta dos carrapichos. Em colaboração com um fabricante de tecidos da França, criou um fecho que usava pequenos ganchos e anéis de plástico. O nome que escolheu para o invento era uma combinação de “velour” e “crochet”: VELCRO^{TM}.

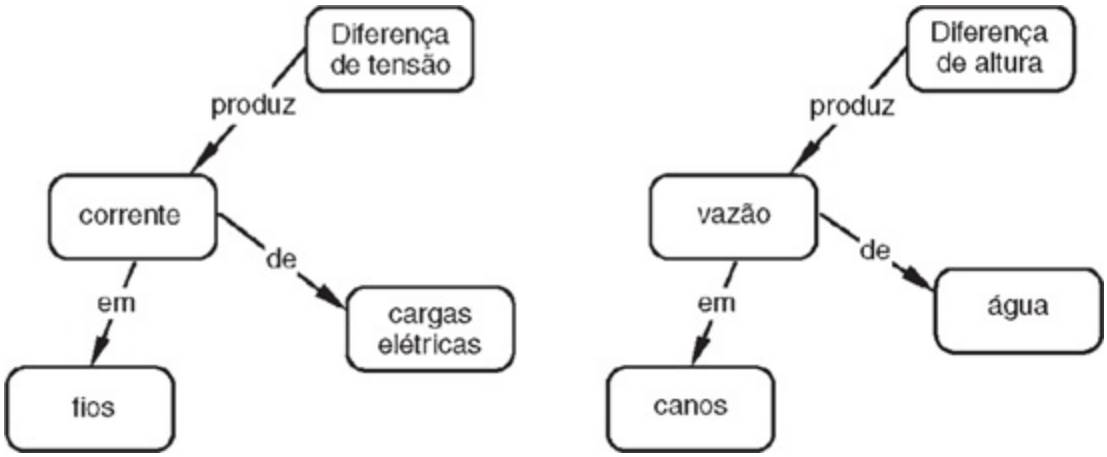


Figura 3.22 A vazão de água em um cano é uma analogia para a corrente elétrica em um fio.

Mais recentemente, os cientistas e engenheiros vêm usando processos naturais como analogias para resolver problemas de otimização ligados a análise combinatória, como o de acomodar as peças de um motor de automóvel da forma mais compacta possível, ou ligar bilhões de componentes de um circuito integrado através de conexões elétricas. Uma técnica popular para resolver problemas desse tipo é o chamado *recozimento simulado* [MRR$^+$][KGV83]. Em ciência dos materiais, recozimento é o processo de aquecer um sólido até uma temperatura elevada e depois resfriá-lo de forma controlada para melhorar suas propriedades. A Figura 3.23 mostra o material antes e depois do recozimento. Antes do recozimento, a estrutura cristalina apresenta vários defeitos, como lacunas (ausência de átomos) e discordâncias (planos de átomos deslocados em relação aos

planos vizinhos). Esses defeitos podem afetar negativamente as propriedades dos materiais, diminuindo, por exemplo, sua resistência mecânica. Quando a amostra é aquecida a altas temperaturas, os átomos têm mais liberdade para se mover e podem encontrar posições mais estáveis (de menor energia) que aliviam as tensões. Quando a amostra é resfriada, está livre de defeitos.

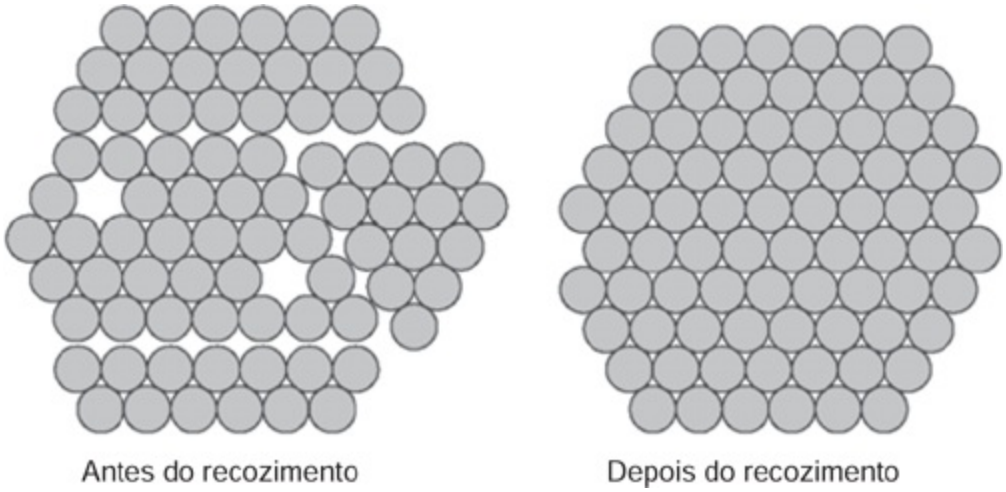


Figura 3.23 No recozimento, uma amostra é aquecida até uma temperatura elevada para que os átomos ganhem mobilidade. Quando a amostra é resfriada lentamente, os átomos encontram posições estáveis, e o número de defeitos diminui.

No recozimento simulado, um programa de computador usa a analogia do recozimento físico para encontrar configurações estáveis, "livres de tensões", para objetos virtuais, como mostra a Figura 3.24. Um programa de recozimento simulado usa números aleatórios e probabilidades para guiar o processo. Em altas temperaturas simuladas, existe um alto grau de aleatoriedade. Quando a temperatura simulada é reduzida, o programa tem menor probabilidade de aceitar configurações "defeituosas", de alta energia, e o sistema acaba por se acomodar em uma configuração mais estável.

Outras analogias com a natureza também têm sido usadas para resolver problemas de otimização. Os *algoritmos genéticos*[Hol75]

[Hol92], por exemplo, simulam os processos de mutação genética e seleção natural, gerando aleatoriamente soluções possíveis para um problema e permitindo que apenas as mais promissoras “sobrevivam”.

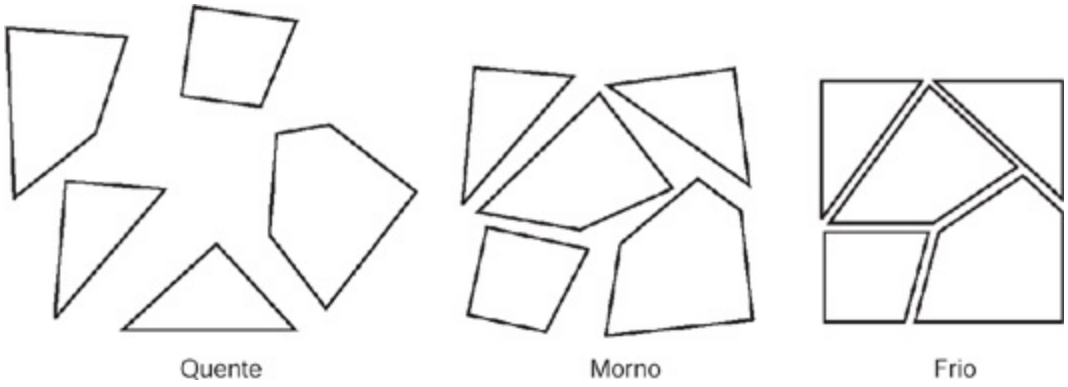


Figura 3.24 O recozimento simulado usa a analogia com o recozimento físico para encontrar configurações estáveis para objetos virtuais.

3.8.15 Mude de Perspectiva

Examinar um problema de uma perspectiva diferente pode levar a uma solução inesperada. Considere, por exemplo, o problema de fazer pousar uma sonda espacial não-tripulada na superfície de Marte. Uma ideia convencional seria usar um paraquedas para reduzir a velocidade antes do pouso. Como a atmosfera de Marte é muito rarefeita, o paraquedas teria que ter uma área 38 vezes maior que a necessária para um pouso na Terra, o que aumentaria consideravelmente o peso e o volume da nave.

Quando começaram a planejar a missão Pathfinder, que conseguiu fazer pousar uma sonda em Marte em 4 de julho de 1997, os engenheiros da NASA mudaram o enfoque: em vez de se preocupar em reduzir a velocidade da nave antes do pouso, preocuparam-se em amortecer a queda. O resultado foi o sistema de *airbags* mostrado nas Figuras 3.25 e 3.26. Alguns minutos depois de penetrar na atmosfera de Marte, um pequeno paraquedas foi aberto, reduzindo a velocidade da sonda para 65 m/s (234 km/h). A uma altitude de aproximadamente 300 m, os grandes *airbags* foram inflados; a 100 m,

foguetes de combustível sólido foram disparados para frear ainda mais a sonda. Desse ponto em diante, a sonda entrou em queda livre e quicou várias vezes até parar na superfície de Marte.

O exemplo de amarrar duas cordas penduradas no teto, descrito na Seção 2.1.3 e ilustrado na Figura 2.5, é outro exemplo clássico do modo como uma mudança de perspectiva pode ajudar. Nesse exemplo, o segredo está em deixar de pensar em como alcançar as duas cordas ao mesmo tempo e pensar em como fazer uma das cordas chegar até você. Apenas 40 por cento dos participantes do experimento de Maier conseguiram completar a tarefa em menos de 10 minutos [Mai31]. Um obstáculo importante foi o que os psicólogos chamam de rigidez funcional: muitas pessoas não conseguiram imaginar o alicate como outra coisa que não uma ferramenta.

Figura 3.25 Uma mudança de enfoque do pouso em Marte, de pousar suavemente para amortecer a queda: engenheiros da NASA testam o sistema de *airbags* do Pathfinder no Laboratório de Propulsão a Jato (JPL), em Pasadena, Califórnia. Foto cortesia da NASA.

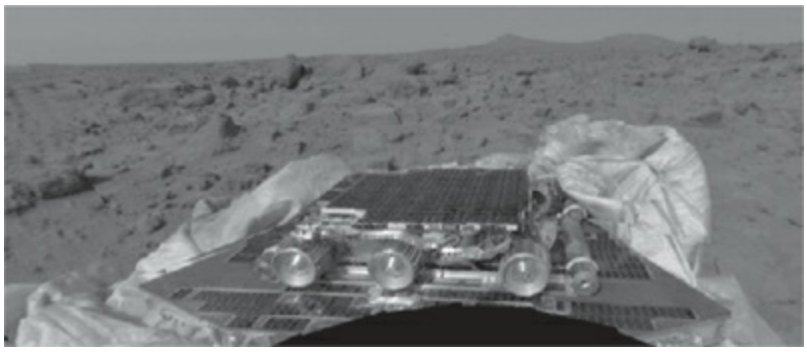


Figura 3.26 A sonda Pathfinder e o veículo Sojourner pousados na superfície de Marte, com os *airbags* já vazios. Foto cortesia da NASA.

3.8.16 Observe o Conjunto

Às vezes, ao resolver um problema, especialmente no caso de um problema de avaliação, ficamos presos a pequenos detalhes que, em última análise, não são muito importantes para a solução global. Um exemplo deste fenômeno é o caso de uma compra grande, como a de um carro ou uma casa. O fato de que você não gosta de papel de parede no quarto de dormir não deve afetar a avaliação de uma casa que você está pensando em comprar, já que é um detalhe fácil de mudar. Se você está indeciso diante de um problema de avaliação, experimente dar um passo atrás e observar o conjunto para ter uma ideia melhor do problema.

3.8.17 Comece pelas Partes Mais Fáceis

Os problemas com muitas partes podem parecer difíceis apenas por causa do tamanho, mesmo que muitas partes sejam fáceis. Fazer as partes fáceis primeiro pode tornar o resto do problema mais amigável, além de aumentar a confiança e o ânimo.

3.8.18 Experimente Alguns Números

Embora, em geral, seja melhor resolver os problemas simbolicamente e deixar para o final a substituição dos valores numéricos, Wankat [WO93] sugere que o uso de números pode tornar um problema

abstrato mais concreto, ajudando assim a estimular uma solução.

3.8.19 Mantenha um Registro dos Progressos

No caso de problemas complexos, com muitas partes, não confie na memória para saber que partes do problema já foram resolvidas e quais as que ainda estão pendentes. Uma simples lista de "tarefas que restam" pode ser uma boa forma de acompanhar o processo de solução. Se você desenhou um mapa conceitual do seu plano, ele é um meio excelente de registrar seus progressos.

3.8.20 Mude a Representação

A *representação* de um problema é uma estrutura lógica que relaciona as partes de um problema de uma forma que facilita a resolução. Ter uma boa representação é essencial para resolver um problema; no caso de muitos tipos de problemas, foram criadas representações que são quase sempre usadas para resolvê-los. A representação de partes de um problema na forma de tabelas pode ser particularmente útil. A eliminação gaussiana, por exemplo, é uma técnica para resolver sistemas de equações que consiste em colocar os coeficientes das equações em uma tabela e manipular linhas e colunas, usando um conjunto simples de regras, até que todos os elementos da tabela, diferentes de zero, estejam dispostos em forma de triângulo. O método está ilustrado no Exemplo 3.12.

Exemplo 3.12 Representação e Solução de um Sistema de Equações Usando uma Tabela

Resolva o seguinte sistema da equações:

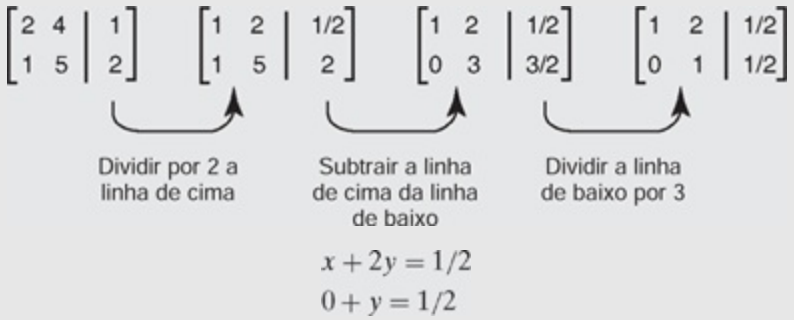
$$2x + 4y = 1$$
$$x + 5y = 2$$

Solução No método de eliminação gaussiano, escrevemos as equações em uma forma chamada de matriz aumentada, na qual os coeficientes das equações são

dispostos em colunas, e a coluna da direita, separada das outras por uma reta vertical, é formada pelos lados direitos das equações. Em seguida, manipulamos a tabela para obter um sistema de equações equivalente, usando as seguintes regras:

1. uma linha pode ser multiplicada por uma constante
2. uma linha pode ser somada a outra

Usando essas regras até que os elementos diferentes de zero da tabela formem um triângulo, obtemos um sistema fácil de resolver.



$$x + 2y = 1/2$$
$$0 + y = 1/2$$

Por inspeção, $y = 1/2$. Substituindo este valor na linha de cima, obtemos $x = -1/2$.

Outro exemplo que utiliza uma tabela e tem sido usado frequentemente para ilustrar o valor de uma boa representação de um problema é o jogo chamado *Number Scrabble* [NS72], que aparece no Exemplo 3.13.

Exemplo 3.13 Number Scrabble

Neste jogo, dois jogadores dispõem de um conjunto de nove peças, numeradas de 1 a 9, com os números visíveis. Os jogadores escolhem peças alternadamente; ganha quem escolher primeiro um conjunto de peças que some 15.

Solução Number Scrabble pode parecer um jogo muito difícil até que você percebe que se trata de uma forma disfarçada do jogo-da-velha! O segredo está em dispor os números de 1 a 9 em uma tabela como a figura abaixo, conhecida como quadrado mágico, na qual todas as linhas, colunas e diagonais somam 15.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Depois de desenhado o quadrado mágico, como a maioria das pessoas é "especialista" em jogo-da-velha, o jogo se torna muito fácil.

3.8.21 Mude de Plano

Às vezes, você não consegue progredir na solução de um problema porque seu plano não está bom.

3.8.22 Siga Seus Palpites

Se você tem um palpite que talvez possa levar a uma solução, não tenha receio de segui-lo.

3.8.23 Faça uma Pausa

Se você está realmente atrapalhado, talvez esteja na hora de fazer uma pausa. Trabalhar até a exaustão às vezes produz resultados e às vezes é necessário, mas na maioria dos casos é inútil. A persistência é uma qualidade muito importante dos engenheiros, mas você também deve reconhecer suas limitações físicas. Em várias ocasiões, o autor trabalhou até altas horas da noite tentando em vão resolver um problema como descobrir um erro em um programa de computador, apenas para encontrar a resposta com facilidade na manhã seguinte, depois de uma noite de sono. Afastar-se de um problema por algumas horas também é uma forma de deixar o seu subconsciente trabalhar em busca de novas ideias.

PROBLEMAS

1. **Mapa Conceitual: Competência e o Processo de Aprendizado**

Desenhe um mapa conceitual da Seção 3.2, “Competência e o Processo de Aprendizado”.

- Comece por fazer uma lista, ou iluminar 10 a 12 conceitos importantes da seção.
- Acrescente relações ao mapa conceitual e organize o mapa em uma hierarquia aproximada.
- Amplie o mapa para incluir pelo menos cinco conceitos da Seção 2.1, “O Que Pensamos a Respeito de Como Pensamos”.

2. Mapa Conceitual: Disciplinas e Especialidades da Engenharia

Como parte de um grupo de 3 ou 4 estudantes, desenhe um mapa conceitual que inclua 3 ou 4 das disciplinas descritas na Seção 1.4, “Disciplinas e Especialidades da Engenharia”. Cada estudante deve desenhar separadamente um mapa para uma disciplina; em seguida, o grupo deve se reunir e combinar esses mapas para formar um mapa único. O mapa final deve incluir ligações entre as disciplinas, sempre que possível.

3. Estudando com Música

Você já estudou ouvindo música? Isso ajuda ou atrapalha? Que influência você acha que a música deve ter, em termos do modelo cognitivo apresentado neste capítulo?

4. Níveis de Entendimento: Fazendo Cópias

Determine os níveis de entendimento necessários nos casos abaixo e justifique suas respostas.

(a) Lucas foi contratado como operador de fotocopiadora. É o seu primeiro dia no emprego, e, na primeira hora, o papel acaba. Lucas coloca mais papel na máquina.

(b) Lucas precisa copiar 10 artigos para um dos empregados da empresa.

(c) O papel embola no meio de uma cópia. Lucas precisa

consertar a máquina e acabar de fazer as cópias. Felizmente, a tela da copiadora explica com detalhes o que é preciso fazer para resolver o problema.

(d) Lucas está tendo um dia muito cansativo. Na hora de tirar uma folha de papel que ficou presa, esbarra em um controle e as cópias começam a sair muito claras. Lucas resolve o problema.

(e) Aparece uma mensagem na tela da copiadora informando que o tôner está no fim. Lucas resolve o problema.

(f) Finalmente, o turno de Lucas termina. Ele ficou muito estressado com os problemas da copiadora e pensa em arranjar um emprego mais agradável. Depois de muito procurar, encontra um emprego que realmente lhe agrada: piloto de provas de kart.

5. Níveis de Entendimento: Formulando Suas Próprias Perguntas

Escreva perguntas que testem o entendimento para cada um dos níveis da Taxonomia de Bloom:

(a) com base em tópicos que foram abordados neste livro;

(b) com base em tópicos abordados em outros cursos que você está fazendo ou fez recentemente.

Para cada pergunta, explique sucintamente de que forma a pergunta testa o nível de entendimento correspondente.

6. Humm…

Que nível de entendimento este problema testa?

7. Praticando a Estratégia para a Solução de Problemas

Os problemas a seguir foram extraídos de um livro-texto de matemática elementar. Vamos usá-los para praticar a estratégia para a solução de problemas apresentada e ilustrada nas Seções

3.5 e 3.6. Procure descrever suas soluções da forma mais clara possível, usando como modelo o exemplo das Figuras 3.11 e 3.12. Dedique uma atenção especial a uma descrição sucinta do plano, mesmo que ele pareça óbvio. Nos comentários finais, mencione qualquer heurística que você tenha utilizado.

- Em um telefonema interurbano, Amanda conversou com os pais duas vezes mais tempo que o irmão. A irmã falou mais 12 minutos que Amanda. Se o telefonema de Amanda durou 62 minutos, quanto tempo seus irmãos passaram no telefone?
- Roberto precisa traçar uma reta de 5 centímetros de comprimento, mas não dispõe de uma régua. Ele possui algumas fitas de papel com 1,5 centímetro de largura e 11 centímetros de comprimento. Explique de que forma Roberto pode usar as fitas de papel para medir 5 centímetros.
- Quando os ponteiros de um relógio se movem das 6 da manhã às 6 da tarde, quantas vezes os ponteiros das horas e dos minutos formam um ângulo reto?
- Alice, Teresa e Maria tocam na banda do colégio. Uma toca tambor, outra toca saxofone e a terceira toca flauta. Alice está no último ano. Alice e a moça que toca saxofone praticam juntas. Teresa e a moça que toca flauta estão no segundo ano. Que instrumento cada aluna toca?

8. Suposições e Aproximações para Resolver Problemas de Energia

Resolva os problemas a seguir, fazendo as suposições e aproximações que julgar necessário. Use como guia a estratégia proposta na Seção 3.5 e ilustrada no exemplo da Seção 3.6. Caso decida buscar informações adicionais, não se esqueça de citar a fonte.

(a) Estime o valor da conta de luz da sua casa no último mês. Verifique quanto foi realmente a conta. Você conseguiu fazer

uma boa estimativa? Note que o consumo dos aparelhos eletroeletrônicos é medido em watts (W), enquanto a eletricidade é cobrada pelas concessionárias em quilowatts-hora.

(b) Que quantidade de etanol uma plantação de milho com um quilômetro quadrado de área é capaz de produzir? Que quantidade de gasolina é necessária para produzir o milho, desde a preparação do terreno para o plantio até a entrega do milho à usina de produção de etanol?

(c) Que distância você precisaria caminhar para queimar as calorias contidas na sua barra de chocolate favorita?

9. Armazenando Texto em um DVD

Uma forma de representar caracteres de texto em um computador é usar o chamado *código ASCII*, no qual cada caractere utiliza um *byte* de dados. (Um *byte* é uma sequência de 8 bits.) Quantos DVDs, aproximadamente, seriam necessários para armazenar o texto de todos os livros da biblioteca da sua escola no formato ASCII? Descreva sua solução usando como modelo o exemplo da Seção 3.6 e não se esqueça de citar todas as fontes consultadas.

10. Estratégias e Heurísticas para Solução de Problemas

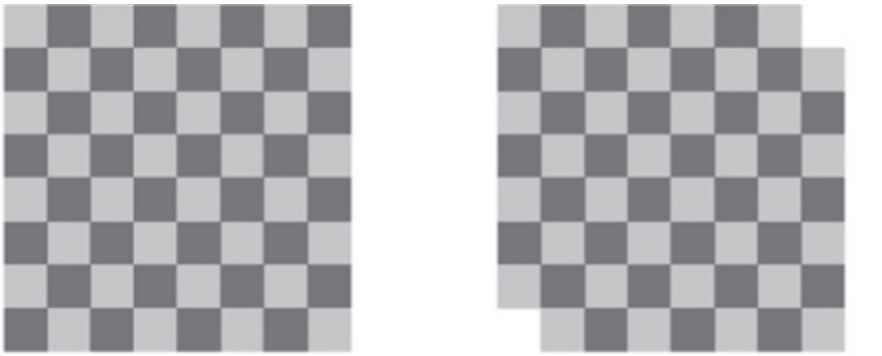
Resolva os problemas a seguir, que foram extraídos de um livro de matemática elementar [EDNK92]. Diga quais foram as heurísticas utilizadas e explique sucintamente por que se aplicam a cada caso.

(a) Existem 10 jogadores de hóquei no rinque no final de um jogo. Cada jogador aperta a mão de todos os outros jogadores. Qual é o número total de apertos de mão?

(b) Ligue todos os pontos da figura abaixo traçando exatamente quatro segmentos de reta, sem tirar o lápis do papel. Não passe mais de uma vez pelos pontos.

11. Como Demonstrar uma Afirmação: O Tabuleiro Mutilado

O Tabuleiro Mutilado é um problema clássico criado por Martin Gardner, que escreveu a coluna “Mathematical Games” da revista *Scientific American,* de 1956 a 1981. Neste exercício, vamos usar esse exemplo para mostrar algumas das vantagens e limitações das demonstrações físicas na solução de problemas. A figura abaixo mostra um tabuleiro de xadrez comum e um “tabuleiro mutilado”. Um tabuleiro de xadrez padrão tem 64 quadrados dispostos em 8 linhas e 8 colunas, enquanto o tabuleiro mutilado tem apenas 62 quadrados, já que dois quadrados nas extremidades de uma diagonal são removidos.



Tabuleiro de xadrez padrão Tabuleiro de xadrez mutilado

(a) Para começar, suponha que você tem um jogo de peças de dominó exatamente do tamanho de duas casas do tabuleiro. É possível cobrir todas as casas de um tabuleiro normal, não mutilado, com exatamente 32 peças de dominó? Como é que você sabe?

(b) É possível cobrir todas as casas de um tabuleiro mutilado com exatamente 31 peças de dominó? Se você acha que não é possível, existe uma forma simples de provar esse fato? *Tente resolver o problema sem ver a resposta, que é fácil de encontrar na Internet.*

(c) Explique por que este problema ilustra as vantagens e limitações das demonstrações físicas na solução de problemas.

12. Testando Palpites para Calcular uma Média

O método de Testar Palpites (Seção 3.8.13) pode ser útil quando você não dispõe de muitos recursos "computacionais", ou deve usar um número limitado de operações. Para ilustrar este fato, vamos calcular a média de um pequeno grupo de números, mas sem usar uma divisão. A abordagem é a seguinte: você primeiro estima uma média; em seguida, multiplica a média pelo número de números e observa a diferença entre o resultado e a soma dos números. Isso leva você a fazer uma nova estimativa, e você repete o processo até obter a média correta.

Considere os números 16, 28, 12, 17, 23 e 21. Calcule a média desses números por tentativas. Você pode somar, subtrair e multiplicar, mas não pode dividir. Anote todos os seus passos. Quantas tentativas foram necessárias?

13. O Coelho e as Tartarugas

Duas tartarugas, A e B, estão separadas por uma distância de 300 m quando começam a caminhar uma em direção à outra. A tartaruga A se move a 80 m/h e a tartaruga B a 70 m/h. Um coelho começa a correr a 137 m/h, na direção da tartaruga B, a partir do ponto onde está a tartaruga A. Ao atingir a posição da tartaruga B, dá meia volta e corre em direção à tartaruga A. O coelho continua a correr de um lado para outro, entre as duas tartarugas, até elas se encontrarem. Determine a distância total percorrida pelo coelho.

Note que este problema pode ser resolvido com muita dificuldade ou com muita facilidade, dependendo de se o enfoque é na distância ou no tempo.

14. A Multiplicação é Igual à Adição?

Você garante a um colega que somar dois números é a mesma coisa que multiplicá-los. Naturalmente, ele não concorda. Você argumenta que $2 + 2$ e 2×2 dão o mesmo resultado. Ele continua a duvidar, apesar desse exemplo bem conhecido. Por isso, você mostra a ele que $3 + 1{,}5$ e $3 \times 1{,}5$ também dão o mesmo resultado e o mesmo acontece com $5 + 1{,}25$ e $5 \times 1{,}25$. Você acrescenta que, na verdade, pode apresentar um número infinito de exemplos para provar o que está dizendo. É tudo brincadeira, claro, já que sua afirmação inicial é ridícula. Escreva uma fórmula para gerar pares de números que estejam de acordo com sua afirmação. Explique por que, mesmo que seja possível confirmar sua alegação com um número infinito de exemplos, isso não significa que ela é verdadeira. Dê outro exemplo de afirmação obviamente falsa que pode ser aparentemente confirmada por um número infinito de exemplos.

15. O Que Estes Problemas Têm em Comum?

Dos três problemas a seguir, quais são os dois que têm mais pontos em comum? Justifique sua resposta.

(a) Determine a aceleração produzida em uma massa conhecida por uma força conhecida.

(b) Determine a corrente elétrica em um resistor de valor conhecido quando uma tensão elétrica de valor conhecido é aplicada aos seus terminais.

(c) Determine o volume de um recipiente que contém um gás cuja pressão e cuja temperatura são conhecidas.

16. Representação Gráfica de Equações de Segundo Grau

Na Seção 3.8.20, vimos que uma mudança de representação pode facilitar a resolução de um problema. Representações gráficas são frequentemente usadas com este propósito. Um exemplo comum

é o das equações de segundo grau, caso em que o gráfico das parábolas correspondentes pode ajudar a ver se existem raízes reais e onde estão localizadas.

Para cada uma das equações de segundo grau a seguir, plote a curva em um sistema de coordenadas cartesianas. Mostre que o número de raízes (duas, uma ou nenhuma) está associado ao fato de a parábola interceptar o eixo x, tangenciá-lo, ou não interceptá-lo. Observe também que os pontos de interseção correspondem às raízes.

(a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
(b) $x^2 - 2x + 1 = 0$
(c) $x^2 - 3x + 4 = 0$

17. Substituição de Variáveis para Obter um Problema Clássico

Na matemática, a mudança de variáveis é usada frequentemente para transformar um problema pouco comum em um problema clássico. Considere a seguinte equação:

$$x^3 - 3x\sqrt{x} + 2 = 0$$

Sua missão é calcular as raízes da equação, ou seja, os valores de x que a tornam verdadeira. Resolva o problema escrevendo a equação em termos de uma variável y que seja função de x e transforme a equação em uma equação clássica, no caso uma equação de segundo grau. A partir da solução dessa nova equação, determine as raízes da equação original.

18. Combinando Bom Senso com Álgebra

Uma combinação de bom senso com pragmatismo pode ser muito útil na solução de problemas. Isso se aplica especialmente aos casos em que parece estar faltando alguma informação ou o número de equações é menor que o número de incógnitas.

Considere um problema em que você dispõe de 100 contas.

Algumas são vermelhas, algumas são brancas e algumas são azuis, e elas pesam, respectivamente, 20 gramas, 6 gramas e 1 grama. O peso total das 100 contas é de 200 gramas. Determine quantas contas existem de cada cor. Resolva o problema, não por tentativa e erro, mas usando bom senso e matemática.

19. Um Plano para Entrar na Faculdade

Desenhe um mapa conceitual que ilustre o plano que você seguiu para entrar na faculdade, do começo do penúltimo ano do segundo grau até o primeiro dia no curso de engenharia. Desenhe uma carta de Gantt com as linhas de tempo de todas as tarefas que você teve que cumprir. Escreva a solução desse problema em uma forma que você possa usar para explicar o processo a um aluno do segundo grau que está prestes a iniciar o mesmo processo.

20. Carta de Gantt

Organizações e sociedades de engenharia norte-americanas como o Instituto de Engenheiros Elétricos e Eletrônicos (IEEE) e a Sociedade Americana de Engenheiros Mecânicos (ASME) promovem vários congressos nos quais pesquisadores apresentam suas descobertas mais recentes. Um congresso típico leva de 3 a 4 dias e é dividido em sessões que podem consistir em palestras, apresentações de painéis ou conferências. Os trabalhos são submetidos pelos autores com meses de antecedência e avaliados por especialistas antes de serem aceitos para apresentação. Além de serem apresentados no congresso, os artigos também são incluídos em um livro ou CD que é distribuído no congresso. Os congressos também costumam oferecer algumas refeições para os participantes, além de um jantar de gala com um palestrante convidado.

A partir desta descrição de um congresso típico, faça uma lista

de 10 a 15 tarefas que devem fazer parte da organização de um congresso. Desenhe uma carta de Gantt para essas tarefas.

[1]Agradeço a Ed Maginn, do Departamento de Engenharia Química da Universidade de Notre Dame, que sugeriu esse projeto.

[2]Este número está próximo dos valores publicados pelo Departamento de Transportes dos Estados Unidos [HrR04].

[3]Agradeço ao Professor Stephen Batill, do Departamento de Engenharia Aeroespacial e Mecânica da Universidade de Notre Dame, que ministrou o curso em 2006 e forneceu este exemplo.

PARTE II

PROJETOS BASEADOS EM MODELOS

CAPÍTULO 4

LEIS DA NATUREZA E MODELOS TEÓRICOS

CAPÍTULO 5

ANÁLISE DE DADOS E MODELOS EMPÍRICOS

CAPÍTULO 6

MODELAGEM DE RELAÇÕES ENTRE OS COMPONENTES DE UM SISTEMA: ESTRUTURAS LEVES

CAPÍTULO 7

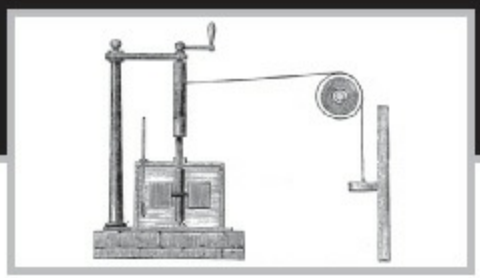
MODELAGEM DE RELAÇÕES ENTRE OS COMPONENTES DE UM SISTEMA: CIRCUITOS ELETRÔNICOS DIGITAIS

CAPÍTULO 8

MODELAGEM DE MUDANÇAS EM SISTEMAS

CAPÍTULO

4



Leis da Natureza e Modelos Teóricos

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- explicar o que é uma "teoria" e a relação entre teoria e experimento;
- discutir a evolução das teorias básicas do movimento, da conservação de energia e da conservação de massa;
- discutir a relação entre prática e teoria no desenvolvimento do motor de pistão e usar modelos teóricos simples para analisar aspectos do seu comportamento;
- discutir o uso de modelos teóricos em projetos, tomando como exemplo o projeto da alavanca de uma bomba d'água manual.

4.1 MODELOS DE ENGENHARIA

Alguns estudantes de engenharia tiveram a felicidade de participar de atividades de pré-engenharia como o primeiro concurso de montagem de robôs de LEGO™ e os concursos de construção de pontes da Sociedade Americana de Engenharia Civil. Além de estimularem soluções criativas, esses concursos também passam aos alunos a importante noção de que ideias aparentemente boas nem sempre funcionam na prática. Muitas vezes, nesses concursos, os estudantes têm amplas oportunidades de testar e modificar seus protótipos antes

que sejam formalmente avaliados. Se o protótipo não funciona, o projetista, como um escultor trabalhando com barro, acrescenta algo aqui ou remove algo ali até que o protótipo seja aceitável.

Às vezes, este método de tentativa e erro é utilizado na indústria, particularmente nos casos em que o projeto é simples ou o risco ou custo de um eventual fracasso é relativamente pequeno. Em muitas situações, porém, não haverá uma segunda oportunidade em caso de insucesso. Em sistemas de engenharia como edifícios, pontes e aviões, para citar apenas alguns exemplos, deixar de atender às especificações pode resultar na perda de vidas. Em outros casos, como o da fabricação de circuitos integrados, o custo de fabricação é tão elevado que uma empresa pode não dispor de recursos suficientes para uma segunda tentativa. Nessas situações, é importante que a equipe de engenharia tenha uma razoável certeza de que, *antes* de ser fabricado, o produto vai funcionar. Para isso, os engenheiros usam *modelos* para prever o comportamento dos seus produtos. Um modelo é a aproximação de um sistema real, tal que, quando o modelo é submetido a certas condições, comporta-se de forma semelhante ao sistema real. Os modelos podem ter muitas formas diferentes, desde protótipos concretos, como bonecos submetidos a testes de impacto, até simulações complexas em computador. Nesta parte do livro, serão apresentadas algumas das formas básicas de modelos matemáticos usadas em análises e projetos de engenharia.

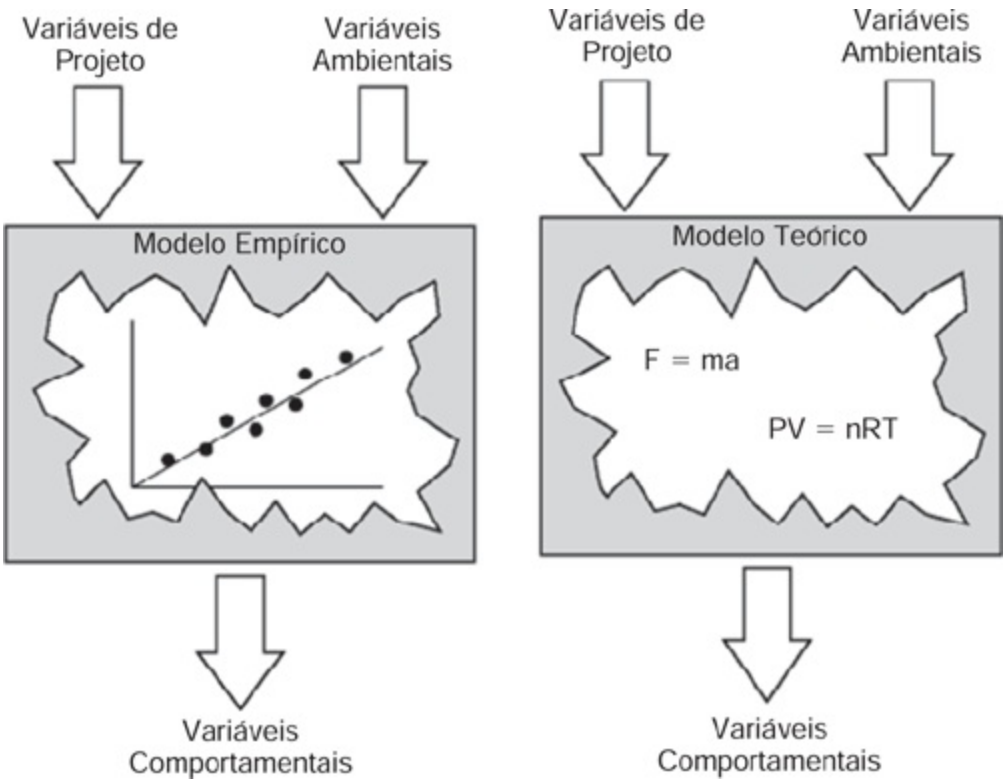


Figura 4.1 Modelo matemático.

Como mostra a Figura 4.1, podemos pensar em um modelo matemático como uma espécie de sistema virtual cuja entrada é um conjunto de variáveis que representam aspectos do produto ou aspectos do ambiente e cuja saída é um conjunto de variáveis que representam o comportamento do produto. No interior existe um conjunto de relações matemáticas que descrevem a operação do sistema.

De forma geral, podemos classificar os modelos matemáticos em duas categorias, de acordo com a natureza dessas relações. Os *modelos teóricos*, discutidos no Capítulo 4, descrevem o comportamento de um sistema em termos de leis e relações naturais, usando teorias básicas da física, química e outras ciências. Os *modelos empíricos*, discutidos no Capítulo 5, se baseiam na observação ou na experiência, muitas vezes sem que haja uma compreensão detalhada de como o sistema funciona. Considere, por exemplo, duas formas diferentes de modelar uma tacada de golfe. Para projetar um taco de golfe de alto

desempenho, como o que aparece na Figura 4.2, os engenheiros de uma fábrica de material esportivo usam modelos teóricos baseados em leis da física como as Três Leis de Newton, a Lei de Hooke, a Lei de Conservação do Momento, a Lei de Conservação da Energia e as leis de aerodinâmica para modelar o que acontece quando uma bola de golfe é golpeada por um taco. Um golfista típico, por outro lado, usa um modelo empírico simples para escolher o taco mais adequado para uma dada tacada, talvez com base na distância atingida em treinamentos.

Às vezes, um modelo matemático pode ser tão simples que consiste em uma única equação. Assim, por exemplo, podemos formular um modelo matemático de uma balança de mola como a do lado esquerdo da Figura 4.3 usando a Lei de Hooke, de acordo com a qual o alongamento de uma mola é proporcional à força aplicada ($F = kx$). Na maioria dos casos, porém, são necessárias muitas equações para descrever as relações entre as partes do sistema, todas sujeitas a várias leis naturais. Considere, por exemplo, o modelo da deformação sofrida por uma ponte quando um caminhão a atravessa. Estruturas como pontes podem ser modeladas por conjuntos de molas como o que aparece do lado direito da Figura 4.3. Cada mola do conjunto obedece à Lei de Hooke, mas a força a que é submetida depende dos deslocamentos das molas vizinhas. Além disso, a Lei de Hooke não é suficiente para modelar a deformação; precisamos usar também as Três Leis de Newton para determinar o equilíbrio de forças que mantém a ponte no lugar, bem como as leis das propriedades dos materiais que permitem representar vigas de aço como molas. Encontramos o mesmo tipo de situação ao modelar o comportamento de um circuito elétrico, caso em que precisamos considerar as correntes em todos os elementos e as tensões em todos os nós do circuito. Os Capítulos 6 e 7 apresentam dois estudos detalhados da modelagem de inter-relações em sistemas, um para um tipo de estrutura leve conhecida como *treliça* e outro para *circuitos eletrônicos*

digitais. Matematicamente, a análise dos dois tipos de sistema leva a um sistema de equações.

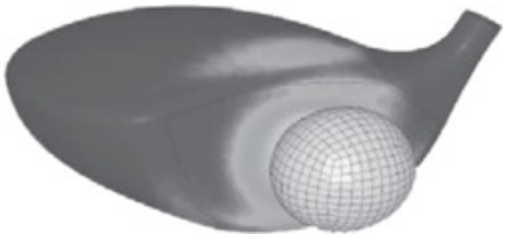


Figura 4.2 Os engenheiros da Karsten Manufacturing, fabricante de tacos de golfe PING, usaram modelos teóricos rodando-os em um supercomputador Cray para analisar o desempenho e a integridade estrutural de um novo *driver* [Mor07].

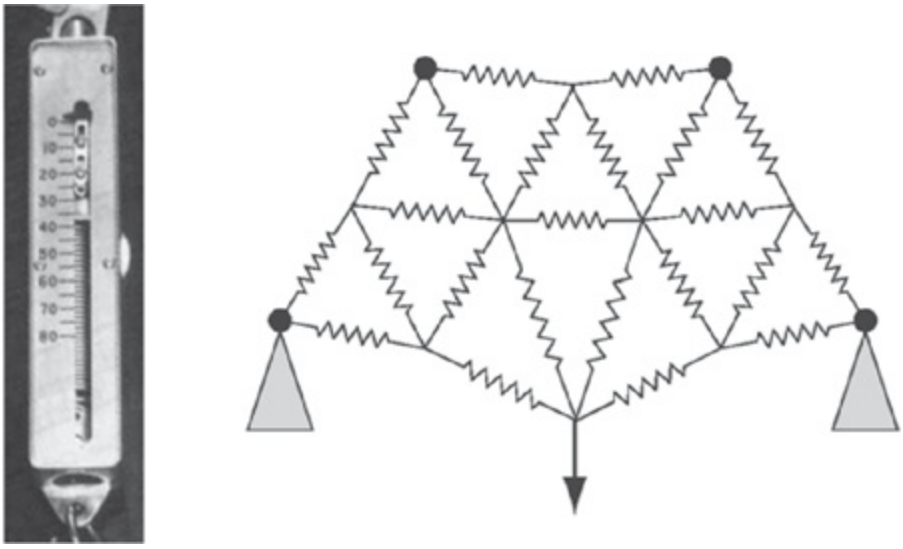


Figura 4.3 Molas.

Para poder prever qual será a distância percorrida por uma bola de golfe ou quanto tempo vão durar as reservas conhecidas de petróleo, devemos ser capazes de modelar a variação de um sistema com o tempo. No último capítulo desta parte do livro, o Capítulo 8, serão discutidas várias formas de modelar essa variação. Usamos uma técnica proposta pelo matemático do século XVIII Leonhard Euler, que modela um sistema que está variando como uma soma ou acúmulo, com o tempo, de pequenas variações. Usando o método de Euler, mostramos que é possível modelar esse tipo de sistema usando

uma planilha eletrônica que complementa os métodos tradicionais usados no cálculo.

4.2 EVOLUÇÃO DA TEORIA

Considere os seguintes problemas:

- Um peso de 10 kg é mantido a uma altura de 5 m. Qual é sua energia potencial?
- Um cilindro com uma capacidade de 1 litro contém ar a 100°C e à pressão atmosférica. Qual será a pressão do gás se a temperatura for reduzida para 0°C?
- O comprimento de uma mola de aço aumenta de 2 cm quando ela é usada para sustentar um peso de 20 N. Qual será a dilatação total da mola se o peso for aumentado para 30 N?

São "problemas em palavras" como esses que os alunos do segundo grau frequentemente encontram nas aulas de ciências. Para resolvê-los, os estudantes aprendem a procurar a fórmula correta e entrar com valores numéricos para obter um resultado. Os alunos que fizeram um curso de física no segundo grau, por exemplo, provavelmente sabem que o primeiro problema pode ser resolvido usando a fórmula da energia potencial gravitacional, segundo a qual a energia potencial de uma massa m mantida a uma altura h é dada pelo produto do peso pela altura, ou seja,

$$E = mgh$$

onde g é a aceleração da gravidade. Os alunos que fizeram um curso de química no segundo grau provavelmente sabem que o segundo problema pode ser resolvido usando-se a fórmula da Lei dos Gases Ideais, segundo a qual, no caso de um gás em um recipiente fechado, a pressão do gás vezes o volume do recipiente é proporcional ao

produto do número de moléculas do gás pela temperatura, ou seja,

$$PV = nRT$$

Finalmente, o terceiro problema pode ser resolvido usando-se a Lei de Hooke, segundo a qual o alongamento de uma mola é proporcional à força aplicada, ou seja,

$$F = kx$$

A diferença entre resolver um "problema em palavras", como os que acabam de ser apresentados, e construir e utilizar um modelo teórico é sutil, mas importante, e ilustra o processo de amadurecimento que se espera para que um estudante de segundo grau se torne um engenheiro. Dando um passo atrás, podemos encarar cada uma dessas questões como uma pergunta a respeito do comportamento de um objeto (um peso, um gás ou uma mola) ao ser submetido a certas condições. Ao responder a *esta* pergunta, um engenheiro não está simplesmente introduzindo números em uma fórmula; na realidade, ele usa o que conhecemos a respeito da natureza para fazer uma previsão.

Boa parte do que conhecemos a respeito da natureza foi incorporada ao que chamamos de "Leis Naturais", como a Lei de Conservação da Energia, a Lei dos Gases Ideais e a Lei de Hooke. No segundo grau, essas leis são frequentemente ensinadas como se fossem fatos, como se fossem verdades universais. Na verdade, porém, essas leis são *teorias* que os cientistas formularam e descreveram matematicamente e que são continuamente testadas. No livro *Lectures on Physics/Aulas de Física*, Richard Feynman descreve a geração dessas leis da seguinte forma:

> Todo pedaço ou parte da natureza é apenas uma aproximação da verdade completa, ou da verdade completa como a conhecemos. Na verdade, tudo que conhecemos é apenas uma *aproximação* já que *sabemos que não conhecemos ainda todas as leis*. Sendo assim, as coisas são aprendidas apenas

para serem desaprendidas ou, o que é mais provável, corrigidas.

O princípio da ciência, quase por definição, é o seguinte: *O teste de qualquer conhecimento é a experiência.* A experiência é o *único juiz* da "verdade" científica. Qual, porém, é a fonte do conhecimento? De onde vêm as leis que nos dispomos a testar? A própria experiência ajuda a gerar essas leis, e nos fornece indícios. Entretanto, precisamos também de *imaginação* para, a partir desses indícios, chegar a grandes generalizações, enxergar os padrões maravilhosos, simples e ao mesmo tempo muito estranhos que estão por trás desses indícios, e depois experimentar de novo para ter certeza de que nosso palpite está certo [Fey04].

Muitos ficam surpresos ao descobrir que a típica Lei Natural não se revelou de uma vez, a uma pessoa, em um momento de "eureka"; em muitos casos, os cientistas passaram séculos colhendo, examinando e descartando indícios antes que as leis simples que conhecemos hoje tomassem forma. Nesse intervalo, como disse Feynman, foi preciso muita imaginação ou inspiração para juntar os pedaços. Embora pareça, à primeira vista, que as três leis mencionadas há pouco, a Lei dos Gases Ideais, a Lei de Conservação da Energia e a Lei de Hooke, são ideias totalmente distintas, suas histórias estão intimamente relacionadas, pois envolveram muitos dos mesmos lugares, problemas e pessoas. Além disso, as inspirações para sua formulação percorrem todo o espectro das emoções humanas, indo desde a vontade de ser o primeiro a lançar uma nova ideia, ou desacreditar uma ideia antiga, até o desejo de desenvolver um novo produto ou negócio e a vontade de compreender melhor o mundo no contexto de uma fé religiosa.

No restante deste capítulo, ilustramos a evolução de uma série de modelos teóricos revendo a história da Lei dos Gases Ideais, da Lei de Conservação da Energia, da Lei de Hooke e da Lei de Conservação da Massa. Vamos mostrar de que forma as primeiras ideias associadas a essas leis levaram à criação da máquina a vapor, e que melhoramentos da máquina a vapor, por sua vez, levaram a novos e melhores modelos. Em vez de apresentar uma lista de leis como verdades incontestáveis, vamos chamar a atenção para o fato de que,

na maioria dos casos, os primeiros modelos, propostos por pessoas muito inteligentes, como Aristóteles, Galileu, Descartes e Hooke, estavam simplesmente *errados* ou, pelo menos, eram muito imprecisos quando aplicados a contextos diferentes do original. Além disso, não há razões para duvidar de que muitas das teorias científicas atuais venham a sofrer revisões semelhantes. Isso não quer dizer que os engenheiros não devam confiar na lei da gravidade ao projetar uma ponte ou nas teorias da genética ao planejar um novo tratamento médico. A razão para isso é que essas teorias foram exaustivamente testadas e suas previsões sempre foram confirmadas, o que provou tratar-se de excelentes aproximações da realidade. Por outro lado, os engenheiros devem ser cautelosos quando estiverem lidando com uma teoria que não compreendem; na verdade, eles têm a responsabilidade ética de levantar dúvidas.

A Figura 4.4 mostra uma linha de tempo dos filósofos, cientistas e engenheiros mencionados neste capítulo, que formam uma linha praticamente contínua, de meados do século XVI aos dias de hoje. Começamos por examinar alguns dos primeiros modelos de matéria e movimento propostos por Aristóteles em 335 a.C., que dominaram a ciência até serem contestados por Galileu no início do século XVII. Depois concentraremos a atenção em um grupo de cientistas e matemáticos europeus do século XVII que trabalharam em uma série de problemas interligados e estabeleceram os fundamentos dessas quatro leis. Muitos desses homens, como Robert Boyle, Robert Hooke, Christian Huygens, Isaac Newton, Gottfried Leibniz e Denis Papin, pertenciam à Royal Society of London e se envolveram nos mesmos tipos de colaborações e conflitos que encontramos em qualquer empreendimento técnico ou científico moderno. Em seguida, descrevemos o modo como esse grupo contribuiu diretamente para a criação das primeiras máquinas a vapor modernas e examinamos alguns melhoramentos introduzidos por Thomas Newcomen e James Watt durante o século XVIII. A partir daí, discutimos de que forma a

vontade de conhecer as limitações da máquina a vapor levou homens como Sadi Carnot, James Joule e William Thomson (Lord Kelvin) a formular novas teorias no século XIX que levaram ao campo de estudo do calor e da energia que conhecemos com o nome de termodinâmica. Finalmente, voltamos a Londres do século XVII para contar a história de como o desejo de transformar chumbo em ouro levou à química moderna e à lei de conservação da massa, e como os experimentos dos alquimistas tinham por objetivo responder às mesmas questões que levantamos hoje na tentativa de encontrar combustíveis alternativos para os modernos motores de combustão interna.

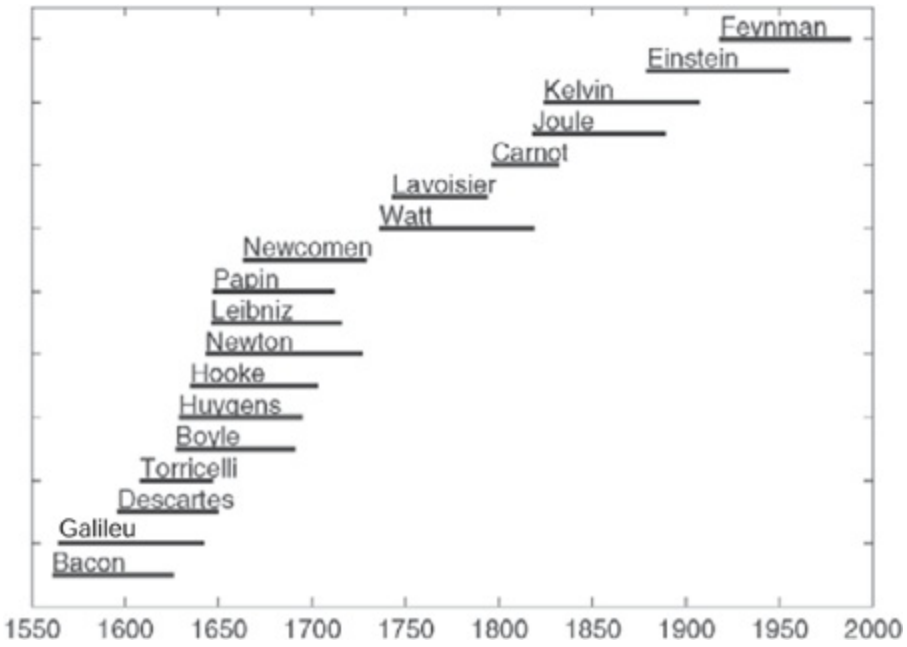


Figura 4.4 Linha de tempo dos cientistas e engenheiros mencionados neste capítulo.

4.3 MODELOS DE MOVIMENTO

4.3.1 A Física de Aristóteles

Hoje em dia, conhecimento e experimentos científicos andam de mãos

dadas, mas, algumas gerações antes da tecnologia que levou à máquina a vapor, esta ligação ainda era uma ideia revolucionária. Até o final do Renascimento, a atitude dos estudiosos em relação à natureza era guiada pelo pensamento dos antigos filósofos gregos, Aristóteles em particular. Como seu mestre Platão, Aristóteles acreditava que a maior qualidade humana era a razão e que o conhecimento podia ser adquirido apenas através da contemplação.[1] Na Academia de Platão, os tópicos de estudo mais importantes eram lógica e matemática. Quando Aristóteles fundou a escola chamada *Lyceum* em 335 a.C., acrescentou ao currículo o estudo da natureza, introduzindo a física, a mecânica e a biologia, e, ao fazê-lo, criou o primeiro programa organizado de estudo de ciências.

Para Aristóteles, o estudo da natureza era uma busca de *causas*. Em sua opinião, todo objeto, vivo ou inanimado, estava perfeitamente equipado para desempenhar uma certa função. Segundo Aristóteles, tudo que existia na natureza era formado por quatro elementos básicos: terra, água, ar e fogo. O movimento também era uma ideia centralizada na filosofia de Aristóteles, e significava o processo através do qual o objeto buscava seu estado natural. Esse conceito muito amplo se aplicava tanto ao processo de envelhecimento dos seres humanos quanto à queda de uma pedra. Aristóteles fazia distinção entre o movimento próprio dos objetos e o movimento produzido por uma força externa. O movimento próprio dos objetos estava associado à ordem natural dos elementos dos quais era composto. Assim, a terra se movia para baixo, com força, e a água também se movia para baixo, mas com menos força, já que a pedra afunda na água. Por outro lado, o ar tendia a subir, já que sobe na água, e o fogo tendia a subir mais ainda, pois sobe no ar. Como a madeira desce no ar, mas sobe na água, Aristóteles concluiu que ela é feita de terra e ar.

Aristóteles foi o primeiro a pensar quantitativamente a respeito da *velocidade* dos movimentos, e enunciou várias leis de movimento:

1. Os objetos mais pesados caem mais depressa, com uma velocidade proporcional ao peso.
2. A velocidade de um objeto em queda é inversamente proporcional à densidade do meio através do qual está caindo.
3. No caso de movimentos bruscos, a velocidade de um objeto em movimento é diretamente proporcional à força aplicada.

Essas regras têm uma elegância e simplicidade que devem ter cativado o senso estético e a razão dos contemporâneos de Aristóteles: afinal de contas, uma folha cai mais devagar que uma pedra, uma pedra cai mais depressa no ar que na água, e a velocidade de uma carroça depende da força com a qual é empurrada. Hoje, naturalmente, sabemos que as três leis estão erradas. Mesmo assim, o trabalho de Aristóteles foi tão bem-feito que teve grande aceitação e chegou a fazer parte da doutrina oficial da Igreja cristã, o que causou problemas para cientistas, como Galileu, que vieram a questionar esse trabalho dois mil anos mais tarde.

4.3.2 Galileu e o Método Científico

Durante o Renascimento, a visão aristotélica do mundo, que havia dominado o mundo durante séculos, foi seriamente contestada pela primeira vez. O filósofo e estadista Francis Bacon (1561-1626) escreveu uma série de livros e ensaios que defendiam veementemente a precedência das evidências experimentais em relação à lógica e razão puras, e assim estabeleceu a base filosófica para o *método científico* como o conhecemos hoje em dia. Mais ou menos na mesma época, na Itália, Galileu Galilei (1564-1642) iniciou uma série de investigações que terminariam por demonstrar que a maior parte da física de Aristóteles estava errada. Embora Galileu seja mais conhecido hoje em dia por suas descobertas na física e na astronomia (além, naturalmente, de seus conflitos com a Igreja), sua maior contribuição para a ciência moderna foi talvez o padrão que ele

estabeleceu para conduzir experimentos meticulosos e fazer observações detalhadas, para fornecer descrições precisas de seus métodos e resultados e para propor explicações convincentes com base nesses resultados. Seus escritos mostram que Galileu não tinha muita paciência com teorias "científicas" que não eram apoiadas por dados experimentais, e parecia se divertir com a oportunidade de enfrentar e superar seus adversários intelectuais. A Igreja proibiu Galileu, ameaçando-o de tortura, de defender a teoria de Copérnico de que a Terra gira em torno do Sol. Para poder publicar os resultados de suas pesquisas de astronomia, Galileu teve que concordar em apresentar todos os pontos de vista. No seu *Diálogo sobre os Dois Maiores Sistemas do Mundo*: *Ptolomaico e Copernicano*, Galileu escondeu suas teorias na forma de uma discussão entre três personagens fictícios, "Salviati", que representava o ponto de vista de Galileu, "Sagredo", um cientista supostamente neutro, e "Simplício", que representava o ponto de vista da Igreja e cujos argumentos eram facilmente rebatidos pelos outros dois. A Igreja ficou compreensivelmente furiosa e proibiu o livro. Sem se deixar intimidar, Galileu tornou a usar o artifício em seu *Discurso sobre Duas Novas Ciências*, no qual criticava a física do movimento de Aristóteles [Gall4]:

> SALVIATI: Duvido muito que Aristóteles tenha testado experimentalmente se é verdade que duas pedras, uma pesando dez vezes mais que a outra, se deixadas cair, no mesmo instante, de uma altura de, digamos, 100 cúbitos, teriam velocidades tão diferentes que, quando a mais pesada chegasse ao chão, a outra não teria caído mais que 10 cúbitos.
>
> SIMPLÍCIO: Sua linguagem parece indicar que ele fez a experiência, porque ele diz: Vemos o mais pesado; a palavra "vê" mostra que ele fez a experiência.
>
> SAGREDO: Mas eu, que fiz o teste, Simplício, posso lhe assegurar que uma bala de canhão pesando cem ou duzentas libras, ou até mais, não chega ao chão nem um palmo à frente de uma bala de mosquete pesando apenas meia libra, se as duas são deixadas cair de uma altura de 200 cúbitos.

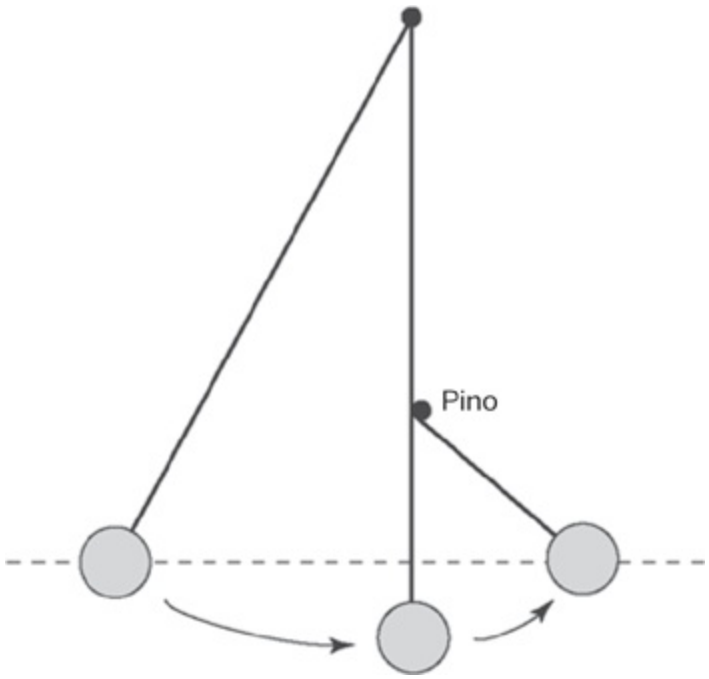


Figura 4.5 O pêndulo interrompido de Galileu.

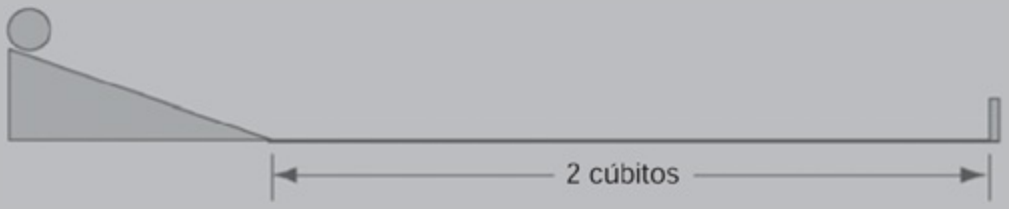
Diz a lenda que Galileu testou sua teoria deixando cair duas esferas do alto da Torre Inclinada de Pisa. Não existe nenhum registro histórico de que isso seja verdade, mas, em *Duas Novas Ciências*, ele descreve uma série de experimentos muito mais sofisticados usando pêndulos e planos inclinados para estudar o movimento de objetos em queda. Medindo a passagem do tempo com um relógio de água, Galileu mostrou que a velocidade de uma esfera em queda livre *aumentava* a uma taxa constante, enquanto Aristóteles afirmava que a velocidade permanecia constante. Galileu também percebeu que uma esfera deixada cair de uma certa altura adquiria um *momento* suficiente para quicar de volta até a mesma altura, independentemente da trajetória, contanto que não houvesse nenhum atrito. Ele demonstrou esse fato usando um "pêndulo interrompido", como o da Figura 4.5. Além disso, calculou que o quadrado da velocidade do peso do pêndulo ao passar pelo ponto mais baixo da trajetória era proporcional à altura de onde tinha sido liberado, ou seja,

$$h = \text{constante} \times v^2 \qquad (4.1)$$

O Exemplo 4.1 ilustra o tipo de cálculo que Galileu deve ter realizado em seus experimentos.

Exemplo 4.1 Velocidade de uma Esfera em uma Rampa

Para medir o tempo com precisão em seus experimentos, Galileu usou um relógio de água que, com vazão constante, drenava água de um tanque para um pequeno recipiente. Suponha que Galileu deixasse uma esfera rolar em um plano inclinado, abrisse a torneira do relógio no momento em que a esfera chegasse ao chão e fechasse a torneira no momento em que a esfera tivesse rolado dois cúbicos na horizontal. Se havia 4 unidades de água no recipiente depois deste experimento, quanta água haveria no recipiente se Galileu repetisse o experimento com uma rampa duas vezes mais alta?



Solução

Dados: Uma rampa R_1 de altura h_1 e tempo de rolagem da esfera $t_1 = 4$ unidades; uma rampa R_2 de altura $h_2 = 2h_1$ e tempo de rolagem da esfera t_2.

Objetivo: Determinar t_2 em unidades de água.

Plano: Usar a Equação (4.1) para descrever a proporcionalidade entre a altura da rampa e o tempo de rolagem e explicitar t_2.

Análise: De acordo com a Equação (4.1), se v_1 e v_2 são as velocidades das esferas ao chegarem ao chão nos dois experimentos, então

$$\frac{h_1}{v_1^2} = \frac{h_2}{v_2^2}$$

Como a velocidade é inversamente proporcional ao tempo de rolagem,

$$h_1 t_1^2 = h_2 t_2^2$$

Explicitando t_2, obtemos

$$t_2 = t_1\sqrt{\frac{h_1}{h_2}}$$
$$= 4\sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$= 2{,}8 \text{ unidades de água}$$

4.3.3 René Descartes e a Conservação do Movimento

Para Galileu, descobrir que o quadrado da velocidade de um objeto em queda é proporcional à distância percorrida era um resultado importante, pois isso mostrava que a teoria de Aristóteles estava errada. Galileu, porém, não explicou *por que* essa relação era observada, nem mesmo tentou calcular o valor da constante de proporcionalidade entre h e v^2. Ele usou o termo "momento" para explicar por que a velocidade de um pêndulo faz com que ele atinja sempre a mesma altura, mas não definiu o termo de forma precisa e às vezes o usava de formas incompatíveis. Hoje em dia, reconhecemos a Equação (4.1) como uma consequência da equivalência entre energia potencial gravitacional, mgh, e energia cinética, $(1/2)\,mv^2$, mas levaria mais de um século para que os cientistas compreendessem o resultado nesses termos. Galileu, em suma, não pensava em suas observações em termos da *conservação* de alguma grandeza física.

Foi um tipo diferente de pensador, René Descartes, que deu o passo seguinte para explicar as observações experimentais, propondo uma teoria de conservação. Nascido na França em 1596, Descartes viveu e trabalhou na mesma época que Galileu. Os dois homens afetaram profundamente o futuro da ciência, mas suas contribuições e métodos foram muito diferentes. Enquanto Galileu abriu portas usando experimentos como formas de testar ideias, Descartes deu nova vida ao uso da razão e da matemática, à maneira de Aristóteles, para imaginar como *poderiam ser* as leis naturais. Usando a terminologia de hoje, diríamos que Descartes era um *físico teórico* e Galileu um *físico experimental*; as duas abordagens são partes complementares do

processo de investigação científica.

Enquanto Galileu teve desavenças com a Igreja, Descartes se inspirou na religião. Em seu *Principia Philosophiae*, escrito em 1644, Descartes propôs uma lei de conservação do movimento que se baseava em sua fé religiosa.

> *Lei de Descartes de Conservação do Movimento*: Que Deus é a causa primeira do movimento; e que Ele sempre mantém uma quantidade igual desse movimento no universo [Des91].

Descartes imaginou um universo completamente ocupado por partículas de terra, ar e fogo, que se aglomeravam para formar objetos em um mar de uma partícula celeste chamada *éter*. Quando dois objetos ou aglomerados de partículas colidiam, um podia transferir uma certa quantidade de movimento para o outro, mas a quantidade total de movimento permanecia a mesma. Descartes definiu a medida da quantidade de movimento da seguinte forma: "quando uma parte da matéria se move duas vezes mais depressa que outra duas vezes maior, há tanto movimento na menor quanto na maior [Des91]". Assim, a definição de quantidade de movimento de Descartes pode ser definida como

$$\text{Quantidade de movimento} = \text{tamanho} \times \text{velocidade}$$

onde, para Descartes, tamanho queria dizer volume, e não peso ou massa. Além dessa lei de conservação, Descartes propôs mais três leis naturais que expressam com mais detalhes sua teoria de como os objetos se movem [Bla66]:

1. Toda coisa, contanto que seja deixada parada, sempre permanece no mesmo estado, e se for posta em movimento, sempre continua a se mover.
2. Todo movimento em si é em linha reta, e, portanto, as coisas que se movem circularmente sempre tendem a se afastar do centro

da circunferência que estão descrevendo.

3. Se um corpo em movimento A colide com um corpo em movimento B e se A tem menos força para continuar em linha reta do que B tem para resistir, A se desvia na direção oposta e, conservando seu próprio movimento, perde apenas a direção do movimento. Se, porém, A tem mais força que B, o corpo A passa a se mover com o corpo B e transfere para ele uma parte do movimento igual à que perde.

As primeiras duas leis se referem ao movimento de objetos isolados. A primeira lei descreve o princípio da *inércia*, que significa "resistência a mudanças"; ela está de acordo com nossa experiência do dia a dia de que o movimento de um objeto não muda, a menos que alguma coisa interaja com ele. Descartes ilustra a segunda lei com o exemplo de uma pedra lançada por uma funda, que assume uma trajetória tangente ao movimento circular. Essa lei também está de acordo com nossas expectativas. Um exame mais atento, porém, mostra que a terceira lei de Descartes não pode estar correta. Para ilustrar a terceira lei, o próprio Descartes apresenta vários exemplos, que não só contradizem o que observamos na prática, mas também parecem contradizer sua própria lei de conservação e sua definição de movimento! Em um desses exemplos, Descartes considera um objeto B em movimento que colide com um objeto C maior, inicialmente em repouso. Podemos representar esses objetos como duas esferas de metal suspensas em cordas para formar dois pêndulos, como na Figura 4.6. Nesse exemplo, Descartes afirma que B ricocheteia em C e passa a se mover para trás com a mesma velocidade escalar, enquanto C permanece em repouso. De acordo com sua terceira lei e a definição de repouso, porém, como B tem mais movimento que C (que não tem nenhum movimento, já que está em repouso), B deveria continuar a se mover para a frente com menor velocidade escalar e C deveria começar a se mover no mesmo sentido com a velocidade perdida por

B. O que realmente acontece, porém, e que podemos observar se realizarmos o experimento, é que, depois da colisão, B passa a se mover para trás com menor velocidade escalar e C começa a se mover para a frente com uma velocidade escalar menor que a de B.

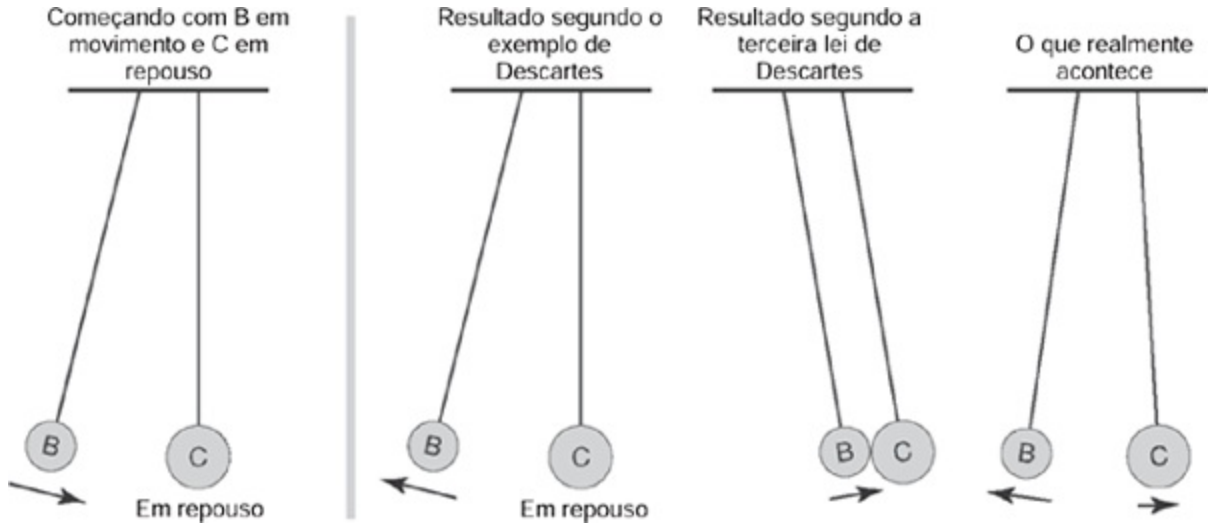


Figura 4.6 As Leis de Movimento de Descartes e os exemplos do seu *Principia Philosophiae* estavam errados no que se refere a colisões.

Embora o modelo de Descartes para o movimento não esteja de acordo com as observações experimentais, seus métodos e ideias influenciaram profundamente o futuro do pensamento científico. Os cientistas da geração seguinte estudaram com interesse o seu trabalho e, no final do século XVII, desenvolveram modelos capazes de prever com precisão a velocidade escalar e a direção do movimento dos objetos após uma colisão. Com isso, formularam um modelo teórico geral do movimento capaz não só de prever o tempo que uma maçã em queda levaria para chegar ao chão, mas também explicaria por que a Lua descreve uma volta completa em torno da Terra a cada 28 dias. Além disso, estabeleceram os fundamentos de duas leis de conservação diferentes: a lei de conservação do momento e a lei de conservação da energia.

4.3.4 A Royal Society

Em meados da década de 1640, um grupo de leitura começou a se reunir em Londres para discutir os trabalhos de Descartes, Galileu e Bacon e, de forma geral, "para promover o aprendizado experimental físico-matemático" [The]. Na época, esses homens eram conhecidos como "filósofos naturais" (o nome "cientista" surgiu apenas no século XIX) e em geral se interessavam não só por vários ramos da ciência, mas também pela arte, filosofia e teologia. Um dos organizadores do grupo, Robert Boyle, era ao mesmo tempo um alquimista, tendo instalado um laboratório em Oxford, e um homem profundamente religioso, tendo escrito várias obras a respeito de suas ideias religiosas. O assistente de Boyle, Robert Hooke, era um exímio pintor, músico e artesão, tendo inventado coisas tão diferentes como a câmara de vácuo e o relógio de corda, e cujo best-seller *Micrographia*, publicado em 1664, continha desenhos detalhados de insetos, fósseis e outros espécimes que Hooke havia observado em um microscópio que ele mesmo aperfeiçoara. Com o aumento do número de membros do grupo, as reuniões se tornaram mais formais; em 1660, eles obtiveram uma autorização do rei Carlos II para formar a "Royal Society of London for Improving Natural Knowledge" ("Real Sociedade de Londres para Aumentar o Conhecimento da Natureza" [The]. Desde o início, a Royal Society teve como membros muitos dos cientistas mais importantes da Europa, como o físico e astrônomo holandês Christiaan Huygens, o matemático e filósofo alemão Gottfried Leibniz e o professor lucasiano de Matemática, de Cambridge, que se tornaria um dos maiores cientistas de todos os tempos, Isaac Newton. Hoje em dia, a Royal Society continua a ser uma das organizações científicas de maior prestígio do mundo, que conta, entre seus membros, com o atual detentor da cadeira lucasiana, Stephen Hawking.

Como lema, a Sociedade escolheu a expressão latina "*Nullius in Verba*", que pode ser traduzida como "não confie na palavra de ninguém a respeito de nada". A ideia era deixar claro que a Sociedade

depositava mais confiança nas demonstrações experimentais que nos conhecimentos livrescos, mas o lema também era um presságio das desconfianças e dissensões que estavam para surgir entre os primeiros membros da sociedade. Nas primeiras décadas de existência da Royal Society, Hooke acusou Huygens de roubar suas ideias a respeito das molas e Newton de roubar suas teorias de ótica. Newton, por sua vez, retirou o retrato de Hooke da galeria quando foi eleito presidente da Sociedade, e disputou com Leibniz a invenção do cálculo.[2] Apesar desses conflitos, a Royal Society se tornou um polo importante para troca de ideias de pesquisadores de toda a Europa, e as leis básicas da natureza que hoje têm o nome de alguns dos primeiros membros, como a Lei de Boyle dos gases, a Lei de Hooke das molas e as Leis de Newton do movimento, foram descobertas a partir dessas colaborações.

A Sociedade se reunia regularmente para discutir tópicos diversos, e uma das primeiras questões abordadas foram as objeções à teoria de conservação do movimento de Descartes. A ideia básica de Descartes de que *algo* relacionado ao movimento era conservado na natureza parecia razoável, mas os detalhes do seu modelo não estavam corretos. É importante compreender as dificuldades que os cientistas enfrentavam quando tentaram modelar a dinâmica da colisão de objetos na década de 1660; eles não podiam contar nem com as definições precisas de conceitos físicos nem com as ferramentas matemáticas que hoje são ensinadas no segundo grau.

Do lado da física, ainda não havia uma compreensão clara da diferença entre massa e peso. Além disso, o conceito de "força" ainda não estava bem definido: alguns usavam o termo ou sua versão em latim, "*vis*", com o mesmo sentido que usamos hoje, enquanto outros chamavam de "força" o que hoje chamaríamos de "energia" ou de "momento". Nossas definições atuais de massa e força vêm do livro de Newton *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, que só foi publicado em 1687, embora Newton tenha chegado a esses conceitos

entre 1666 e 1668, quando a Universidade de Cambridge foi fechada como precaução por causa da Peste. Newton definiu a *massa* de um objeto como "a quantidade de matéria… que resulta conjuntamente de sua densidade e volume" [New29], e *força* como algo que produz em um objeto uma aceleração constante, diretamente proporcional à força e inversamente proporcional à massa. Atualmente, expressamos esta relação através da equação $F = ma$, mas Newton nunca fez isso, pois descreveu suas leis em palavras, como era costume na época. Newton também compreendeu que a gravidade era uma força e que o peso do corpo era uma força proporcional à massa. Atualmente, expressamos esta relação através da relação $P = mg$, onde g é a aceleração da gravidade.

Do lado da matemática, a álgebra, na qual são usadas letras para representar valores numéricos em equações, era ainda uma ideia que estava começando; foi apenas no século XIX que os matemáticos começaram a resolver equações algébricas para obter soluções literais usando leis recém-descobertas como as propriedades comutativa, associativa e distributiva. No final do século XVII, os matemáticos convertiam expressões algébricas em figuras geométricas e analisavam as figuras usando as mesmas leis da geometria que Euclides havia formulado por volta de 300 a.C. Descartes foi o primeiro a propor esta técnica de "plotar" expressões algébricas, na qual uma expressão como $y = 2x + 3$ pode ser representada como uma linha reta, em 1637, no apêndice *Geometria* do seu *Discurso sobre o Método*, o mesmo livro que contém a famosa frase "Penso, logo existo" [Des37].

4.3.5 Huygens Melhora o Modelo de Descartes

Christiaan Huygens descobriu a solução correta do problema da colisão entre objetos rígidos usando uma abordagem muito diferente da de Descartes [Goe75]. De acordo com sua correspondência, ele já havia encontrado a solução em 1655, quando tinha apenas 23 anos,

mas só apresentou o resultado à Royal Society em 1668, e o trabalho completo, *De Motu Corporum ex Percussione* (*O Movimento de Corpos em Colisão*) [Huy88], só foi publicado postumamente. Huygens baseou a primeira parte de sua solução na hipótese de que a percepção do movimento depende do observador. Galileu havia proposto este *princípio da relatividade* em 1632, em seu *Diálogo*, e Einstein voltou a usá-lo quase trezentos anos depois, em 1905, quando acrescentou a condição de que a velocidade da luz deve parecer a mesma para todos os observadores. Huygens imaginou dois objetos colidindo em um barco, com uma pessoa observando a colisão de dentro do barco e outra observando da margem. Enquanto os dois objetos podem parecer estar se movendo para a direita ou para a esquerda para a pessoa que está a bordo, dependendo do movimento do barco, um dos objetos pode parecer estacionário para a pessoa que está na margem. Huygens raciocinou que se um corpo colidisse com um corpo, como uma parede, que permanecesse em repouso antes e depois da colisão, ele ricochetearia com a mesma velocidade escalar no sentido oposto. Assim, de acordo com o princípio da relatividade, a velocidade relativa com a qual os dois corpos se afastariam após a colisão seria a mesma com a qual eles se aproximariam antes da colisão. Algebricamente, podemos expressar esta condição como

$$\text{Princípio de velocidade relativa: } v_{1_i} - v_{2_i} = v_{1_f} - v_{2_f} \qquad (4.2)$$

onde v_{1_i} e v_{1_f} são as velocidades inicial (antes da colisão) e final (depois da colisão) do primeiro corpo, e v_{2_i} e v_{2_f} são as velocidades inicial e final do segundo corpo. Na formulação original, Huygens considerou apenas a *velocidade escalar* dos corpos, que é sempre positiva, enquanto estamos usando a *velocidade vetorial* (ou, simplesmente, velocidade), que, em um problema unidimensional, se reduz a usarmos sinais positivos ou negativos para a velocidade, dependendo do sentido. Vamos adotar a convenção, muito usada na

prática, de que a velocidade de um corpo que se move para a esquerda é negativa e a velocidade de um corpo que se move para a direita é positiva.

Na Equação (4.2), as velocidades antes da colisão, v_{1_i} e v_{2_i}, são conhecidas e as velocidades depois da colisão, v_{1_f} e v_{2_f}, são desconhecidas. Assim, temos duas incógnitas e apenas uma equação, e o princípio de velocidade relativa não é suficiente para determinar as velocidades dos dois corpos após a colisão. Huygens, portanto, precisava encontrar outra "lei" que se aplicasse à situação. Ele descartou a Lei de Conservação do Movimento de Descartes e começou a investigar o trabalho de Galileu com pêndulos. O peso de um pêndulo sempre volta à mesma altura, mas Huygens imaginou se seria possível encontrar uma relação semelhante para as alturas dos pesos de dois pêndulos antes e depois de uma colisão. A resposta a esta pergunta veio de uma descoberta do assistente de Galileu, Evangelista Torricelli. Torricelli havia observado que, em uma máquina formada por pesos interligados, o *centro de gravidade* não pode se mover. Como mostra a Figura 4.7, o centro de gravidade neste caso nada mais é que o ponto de equilíbrio entre os pesos. Supondo que dois pesos W_1 e W_2 são ligados por uma barra rígida, de peso desprezível, para formar uma alavanca, o centro de gravidade é o ponto da barra para o qual

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{d_2}{d_1} \qquad (4.3)$$

e a alavanca fica equilibrada. Quer a barra esteja na horizontal, quer esteja inclinada para cima ou para baixo, o ponto de equilíbrio permanece no mesmo lugar. Para deslocar o centro de gravidade para cima ou para baixo, é preciso aplicar uma força externa à alavanca como um todo.

Huygens descobriu que o princípio de Torricelli também se aplicava a um sistema de pêndulos em colisão, ou seja, se os pesos de dois pêndulos liberados de alturas diferentes colidissem ao passar

pelo ponto mais baixo da trajetória e voltassem a subir, ao chegarem ao ponto mais alto do movimento, o centro de gravidade voltaria à posição em que estava antes de os pesos serem liberados, mesmo que dessa vez os pesos atingissem alturas diferentes. Usando a Equação (4.3), juntamente com a geometria de triângulos semelhantes, é possível mostrar que se dois pesos W_1 e W_2 estão nas alturas h_1 e h_2, como na Figura 4.8, a altura do centro de gravidade, h_{cg}, é dada por

$$h_{cg} = \frac{W_1 h_1 + W_2 h_2}{W_1 + W_2} \qquad (4.4)$$

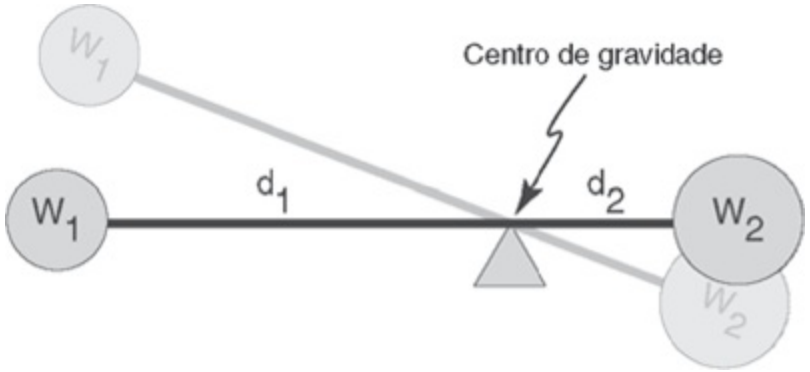


Figura 4.7 Centro de gravidade.

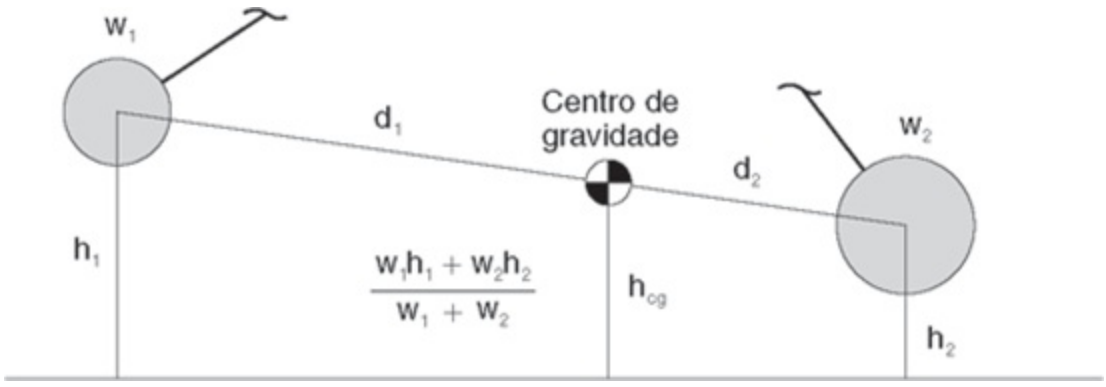


Figura 4.8 Cálculo da altura do centro de gravidade entre dois objetos.

De acordo com o princípio de Torricelli, h_{cg} e, portanto, a grandeza $W_1h_1 + W_2h_2$ devem ter o mesmo valor antes e depois da colisão. Além disso, segundo Galileu, a altura atingida pelo peso de um pêndulo é proporcional ao quadrado da sua velocidade no ponto mais

baixo da trajetória. Como v_{1_i} e v_{2_i} são determinadas pelas alturas antes da colisão e v_{1_f} e v_{2_f} determinam as alturas depois da colisão, e como o peso é proporcional à massa, temos a seguinte relação:

$$\text{Conservação de } mv^2\text{, segundo Huygens: } m_1v_{1_i}^2 + m_2v_{2_i}^2 = m_1v_{1_f}^2 + m_2v_{2_f}^2 \quad (4.5)$$

Combinando o princípio da velocidade relativa da Equação (4.2) com o princípio de conservação de mv^2 da Equação (4.5), temos um sistema de duas equações com duas incógnitas. Esse sistema permite calcular as velocidades v_{1_f} e v_{2_f} após a colisão. O Exemplo 4.2 ilustra o método de Huygens para verificar os resultados de Descartes.

Exemplo 4.2 Colisões Segundo Descartes e Huygens

No livro *Princípios de Filosofia*, para ilustrar sua terceira lei do movimento, Descartes dá o exemplo de uma colisão entre dois objetos de mesmo tamanho, um se movendo para a direita com 4 unidades de velocidade e o outro se movendo para a esquerda com 6 unidades de velocidade, e afirma que após a colisão os dois se movem para a esquerda com 5 unidades de velocidade. De acordo com os princípios de Huygens de velocidade relativa e de conservação de mv^2, este resultado está correto?

Solução

Dados: $v_{1_i} = 4\ v_{2_i} = -6\ v_{1_f} = v_{2_f} = -5$

Objetivo: Esses resultados estão de acordo com a teoria das colisões de Huygens?

Plano: Substituir valores numéricos nas Equações (4.2) e (4.5).

Análise: De acordo com o princípio de velocidade relativa,

$$v_{1_i} - v_{2_i} = v_{2_f} = v_{1_f}$$

$$4 + 6 = -5 + 5$$

$$10 = 0$$

De acordo com o princípio de conservação de mv^2,

$$m_1 v_{1_i}^2 + m_2 v_{2_i}^2 = m_1 v_{1_f}^2 + m_2 v_{2_f}^2$$
$$m(4)^2 + m(-6)^2 = m(-5)^2 + m(-5)^2$$
$$52m = 50m$$

Como as duas igualdades não são satisfeitas, os dois princípios de Huygens são violados pelo exemplo de Descartes, embora satisfaçam a Lei de Conservação do Movimento de Descartes.

Como vimos, Huygens chegou a duas leis para as colisões sem usar a Lei de Conservação do Movimento, que, como ele bem percebeu, levava a resultados errôneos. Acontece, porém, que a lei de Descartes pode ser consertada por uma pequena alteração. Supondo que tamanho significa massa e substituindo a velocidade escalar pela velocidade vetorial, que pode ser positiva ou negativa, obtemos uma nova grandeza, chamada *momento*, que *é* conservada:

Conservação do momento: $mv_{1_i} + mv_{2_i} = mv_{1_f} + mv_{2_f}$

Com a conservação do momento, temos agora três leis que podem ser usadas para obter o valor das duas velocidades após a colisão; como apenas duas são suficientes, qualquer das três pode ser descartada. O Exemplo 4.3 ilustra o uso dos princípios de conservação do momento e de velocidade relativa.

Exemplo 4.3 Determinação das Velocidades após uma Colisão

Use os princípios de conservação do momento e de velocidade relativa para determinar as velocidades após a colisão dos corpos do Exemplo 4.2.

Solução

Dados: $m_1 = m_2 = m$ $v_{1_i} = 4$ $v_{2_i} = 6$

Objetivo: Calcular v_{1_f} e v_{2_f}.

Plano: Resolver um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas.

Análise: Usamos o princípio de velocidade relativa para obter a primeira

equação com duas incógnitas.

$$\begin{aligned} v_{2_f} - v_{1_f} &= v_{1_i} - v_{2_i} \\ &= 10 \end{aligned}$$

Usamos o princípio de conservação do momento para obter a segunda equação com duas incógnitas.

$$\begin{aligned} mv_{1_i} + mv_{2_i} &= mv_{1_f} + mv_{2_f} \\ v_{1_f} + v_{2_f} &= v_{1_i} + v_{2_i} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de duas equações com duas incógnitas, obtemos $v_{1_f} = -6$ e $v_{2_f} = 4$.

Assim, os dois corpos trocam de velocidade ao sofrerem a colisão.

4.3.6 Leis de Movimento de Newton

Huygens sabia que o momento era conservado, mas preferiu não citar isso em seu artigo. John Wallis apresentou o primeiro artigo a respeito de colisões. Ele usou a conservação do momento à Royal Society em 1668. Foi Newton, porém, que explorou plenamente o conceito de momento e o usou em suas Leis de Movimento, que aparecem assim em seu *Principia* [New29]:

1. Todo corpo em repouso permanece em repouso, e todo corpo em movimento permanece em movimento, a menos que seja forçado a mudar de estado por forças que ajam sobre ele.
2. A variação de movimento (taxa de variação do momento) de um corpo é sempre proporcional à força que age sobre ele.
3. Para cada ação, existe uma reação igual e oposta, ou as forças mútuas que dois corpos exercem um sobre o outro são sempre iguais em módulo e apontam em sentidos opostos.

Enquanto Descartes incluiu um caso especial em suas leis de movimento para definir as regras para colisões, as Leis de Newton são suficientemente gerais para lidar com colisões sem mencioná-las

explicitamente. Além disso, as Leis de Newton cobrem as forças e movimentos em *qualquer* direção, enquanto Descartes, Huygens e Wallis apenas consideram colisões entre objetos que se movem um em direção ao outro ao longo de uma reta horizontal. Para modelar uma colisão usando as Leis de Newton, precisamos das três leis. Em primeiro lugar, de acordo com a Terceira Lei de Newton, enquanto os dois corpos se mantêm em contato durante uma colisão, cada um exerce uma força igual e oposta sobre o outro, $F_{\text{A-em-B}}$ e $F_{\text{B-em-A}}$, como mostra a Figura 4.9. Na verdade, o módulo dessas forças varia com o tempo quando os dois corpos se deformam imperceptivelmente e depois se empurram mutuamente, mas podemos representar esse efeito, de forma aproximada, como uma força média constante que age durante todo o tempo de colisão, t_c.

Em seguida, de acordo com a Primeira Lei de Newton, essas forças causam uma mudança no movimento de cada corpo. Finalmente, de acordo com a Segunda Lei de Newton, a variação do momento de cada corpo é proporcional à força que age sobre ele. Assim, no caso do corpo A,

$$F_{\text{B-em-A}} = \frac{\text{momento após a colisão} - \text{momento antes da colisão}}{\text{tempo de colisão}} = \frac{m_A v_{A_f} - m_A v_{A_i}}{t_c}$$

Analogamente, para o corpo B,

$$F_{\text{A-em-B}} = \frac{m_B v_{B_f} - m_B v_{B_i}}{t_c}$$

Como, de acordo com a Terceira Lei, $F_{\text{B-em-A}} = -F_{\text{A-em-B}}$, temos

$$\frac{m_A v_{A_f} - m_A v_{A_i}}{t_c} = -\frac{m_B v_{B_f} - m_B v_{B_i}}{t_c}$$
$$m_A v_{A_i} + m_B v_{B_i} = m_A v_{A_f} + m_B v_{B_f}$$

que é a Lei de Conservação do Momento.

Para demonstrar a conservação do momento durante uma colisão a partir das leis de Newton, supusemos que os corpos foram submetidos a forças iguais e opostas durante o *tempo* em que estiveram em contato. Para demonstrar a conservação de mv^2, devemos supor que os corpos foram submetidos a forças ao longo de uma certa *distância*, muito pequena, na qual os corpos primeiro foram comprimidos e depois recuperaram a forma original. Antes de examinar o caso de uma colisão, porém, vamos discutir a situação em que uma força age sobre um único objeto ao longo de uma certa distância, como é o caso do bloco que se desloca em uma superfície sem atrito na Figura 4.10. Suponhamos que o corpo tem massa m, velocidade inicial v_i e é submetido a uma força F ao longo de uma distância x, atingindo uma velocidade final v_f no instante t. De acordo com a Segunda Lei de Newton, a força é igual à taxa de variação do momento, ou seja,

Figura 4.9 Terceira Lei de Newton.

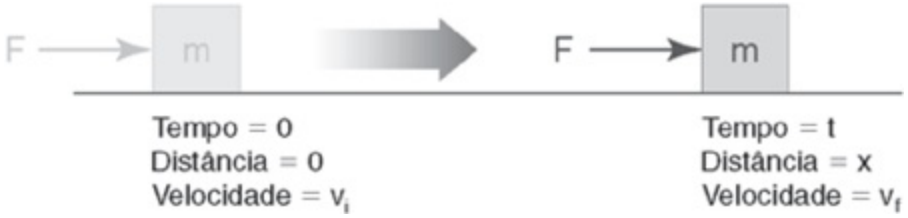


Figura 4.10 Aplicação de uma força a um bloco que está sobre uma superfície sem atrito.

$$F = \frac{\text{variação de momento}}{\text{variação de tempo}} = \frac{m(v_f - v_i)}{t}$$

Multiplicando ambos os membros pela distância x, obtemos

$$F \cdot x = \frac{m(v_f - v_i)}{t} x \qquad (4.6)$$

Vamos agora expressar x em termos da velocidade e do tempo. Se o bloco estivesse se movendo com velocidade constante, a distância seria simplesmente o produto da velocidade pelo tempo. Como porém o corpo está se movendo com aceleração uniforme, a distância é o produto da velocidade *média* pelo tempo.
Assim,

$$x = \frac{(v_f + v_i)}{2} t$$

Substituindo este valor na Equação (4.6), obtemos

$$\begin{aligned} F \cdot x &= \frac{m(v_f - v_i)(v_f + v_i)}{2} \\ &= \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \end{aligned} \qquad (4.7)$$

Com nossos olhos do século XXI, reconhecemos a Equação (4.7) como um importante teorema a respeito da equivalência entre trabalho mecânico, $F{\cdot}x$, e energia cinética, $\frac{1}{2} mv^2$. Newton, porém, não teria visto as coisas desta forma; para ele, seria simplesmente uma relação obtida a partir de suas leis. De modo que vamos continuar a discussão sem dar mais atenção a esse resultado – por enquanto.

Uma vez obtido o resultado da Equação (4.7), voltamos ao caso de uma colisão entre dois corpos, A e B, mostrada na Figura 4.9. Novamente, de acordo com a Terceira Lei de Newton, a força que A exerce sobre B ao longo da distância x é igual e oposta à força que B exerce sobre A:

$$F_{\text{B-em-A}} \cdot x = -F_{\text{A-em-B}} \cdot x$$

Aplicando a Equação (4.7) e reagrupando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_A v_{A_f}^2 - \frac{1}{2} m_A v_{A_i}^2 &= -\left(\frac{1}{2} m_B v_{B_f}^2 - \frac{1}{2} m_B v_{B_i}^2 \right) \\ m_A v_{A_i}^2 + m_B v_{B_i}^2 &= m_A v_{A_f}^2 + m_B v_{B_f}^2 \end{aligned}$$

que é a lei de conservação de mv^2. Como antes, dadas as equações de

conservação do momento mv e de conservação de mv^2, temos informações suficientes para calcular as duas velocidades desconhecidas após a colisão.

4.3.7 Leibniz e a "Força Viva", Trabalho e Energia

Tanto Huygens como Newton perceberam que a grandeza mv^2 era conservada em uma colisão, mas nenhum dos dois atribuiu grande importância a esse fato; ao contrário da grandeza mv, que recebeu o nome de momento, Huygens e Newton não se deram ao trabalho de dar um nome a mv^2. Para o filósofo e matemático alemão Gottfried Leibniz, porém, mv^2 tinha um significado especial. Leibniz afirmou que mv^2 devia ser a verdadeira medida do movimento conservado no universo, e não o produto do tamanho pela velocidade, como Descartes havia proposto. Em 1686, Leibniz publicou um artigo com o título explosivo

> *Breve Demonstração de um Erro Memorável de Descartes e Outros a Respeito de uma Lei Natural, de Acordo com a qual, Segundo Eles, Deus Conserva Sempre a Mesma Quantidade de Movimento; Uma Lei que Eles Também Usam Erradamente na Mecânica* [Ilt71].

Na verdade, o artigo de Leibniz não demonstrava nada de novo, pois foi publicado aproximadamente vinte anos depois que Huygens e Newton descobriram que a Lei de Conservação do Movimento de Descartes estava errada e, também, que mv e mv^2 eram conservados em colisões. Como o trabalho de Descartes, o documento de Leibniz era mais um tratado filosófico a respeito de uma forma de entender a organização do universo. Leibniz deu à grandeza mv^2 o nome latino "*vis viva*" ("força viva") e, em particular, observou que, em um objeto em queda, a *vis viva* é convertida, de altura, em movimento. Durante boa parte do século XVIII, a teoria de Leibniz de conservação da *vis viva* foi um assunto controvertido. Isso se deveu, em parte, a outras disputas que surgiram entre Leibniz e membros da Royal Society, especialmente a disputa entre Newton e ele pela primazia na invenção

do cálculo.

Embora, como mostramos, a conservação da *vis viva* pudesse ser deduzida das leis de movimento de Newton, foi tratada separadamente durante boa parte do século XIX, quando cientistas e engenheiros estavam mais interessados em entender a teoria por trás das máquinas responsáveis pela Revolução Industrial do que na física teórica. Em 1807, o cientista inglês Thomas Young[3] criou o termo "energia" para designar a *vis viva* de Leibniz [You07], e, aproximadamente 20 anos depois, o físico francês Gaspard Coriolis[4] criou o termo "*travail*" ou "*trabalho*" para designar o processo de fazer um corpo percorrer uma certa distância aplicando uma força. Esses termos são usados até hoje com o mesmo significado; assim, em linguagem moderna, diríamos que, de acordo com a Equação (4.7), a quantidade de trabalho $F \cdot x$ é equivalente à energia (cinética) $\frac{1}{2}mv$.

Uma das propriedades curiosas do trabalho é que o trabalho executado por uma força pequena para fazer um corpo percorrer uma grande distância pode ser igual ao trabalho executado por uma força maior para fazer o mesmo corpo percorrer uma distância menor. Para ilustrar este fato, considere o uso de uma alavanca para levantar um objeto pesado, como na Figura 4.11. Se é aplicada à extremidade esquerda da barra a menor força F_1 necessária para levantar um peso F_2 situado na extremidade direita da barra, temos:

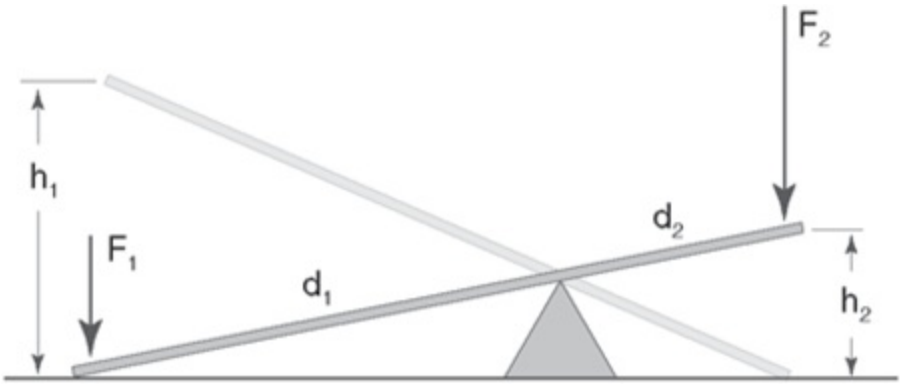


Figura 4.11 Uma alavanca.

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

Por semelhança de triângulos,

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{h_2}{h_1},$$

e, portanto,

$$F_1 \cdot h_1 = F_2 \cdot h_2$$

Assim, o trabalho realizado para empurrar para baixo a extremidade esquerda da barra é igual ao trabalho realizado para levantar o peso na extremidade direita. Na verdade, o trabalho *tem* que ser o mesmo; caso contrário, uma alavanca (operada em um sentido ou no outro) poderia criar energia, o que não faz sentido. Em outras palavras, uma alavanca transforma trabalho na forma de um tipo de movimento em uma quantidade equivalente de trabalho na forma de outro tipo de movimento. Todas as outras máquinas simples, como as talhas e as engrenagens, fazem o mesmo. Esta ideia se tornou extremamente importante nos séculos XVIII e XIX, quando os engenheiros inventaram mecanismos para usar um simples motor alternativo a pistão para mover fábricas inteiras.

4.4 UM MODELO PARA A “MOLA DE AR”

4.4.1 O Horror ao Vácuo

Para Aristóteles, o vácuo, uma região totalmente desprovida de matéria, era impossível, já que, pela lógica, tudo tinha que ser feito de *alguma coisa*. Além disso, de acordo com as leis de movimento de Aristóteles, a velocidade de um objeto caindo em um meio de densidade zero seria infinita, um resultado que ele considerava absurdo. A ideia do vácuo também não agradava à Igreja, pois de acordo com a doutrina cristã, não devia existir nenhum “vazio” na

Terra depois da Criação. Esta doutrina ficou conhecida como *horror vacui*, literalmente "horror ao vácuo", também conhecida pela expressão "a natureza tem horror ao vácuo", e as pessoas acreditavam que, se um dia fosse criado um vácuo, algo logo se apressaria em preenchê-lo. O *horror vacui*, por exemplo, explicava o funcionamento do sifão e do canudinho; quando o ar era extraído de um tubo, o "horror" ao vácuo fazia a água subir para ocupar o vazio.

Em 1630, um nobre e cientista amador de Gênova chamado Giovani Battista Baliani escreveu uma carta a Galileu perguntando por que o sifão que ele havia construído não conseguia fazer a água transpor uma colina com 21 metros de altura [Ins07][Mid63]. Depois de fazer alguns experimentos, Galileu verificou que a altura máxima a que uma bomba de sucção e um sifão podiam levantar uma coluna de água era de aproximadamente 11 metros. Ele concluiu que isso acontecia porque havia realmente um vácuo no interior do tubo, e o vácuo exercia uma força sobre a água, mas, como uma corda, a coluna de água podia suportar apenas uma força limitada sem se romper. Galileu enviou suas conclusões a Baliani, que não ficou satisfeito com a explicação. Na verdade, Baliani tinha outra teoria, que comunicou por carta a Galileu. Ele achava que a superfície da Terra estava no fundo de um oceano de ar, e que, assim como um mergulhador quando está submerso se sente comprimido em todas as direções pela força da água, tudo que está na superfície da Terra é comprimido pelo peso do ar na atmosfera. Segundo Baliani, quando era extraído ar de um tubo acima do nível da água, o ar restante ficava mais leve, e o ar mais pesado do lado de fora do tubo empurrava a água para cima, como na Figura 4.12. O que incomodava Baliani, porém, era que ele achava que a pressão no fundo do oceano de ar devia ser suficiente para fazer a água subir muito mais que 11 metros.

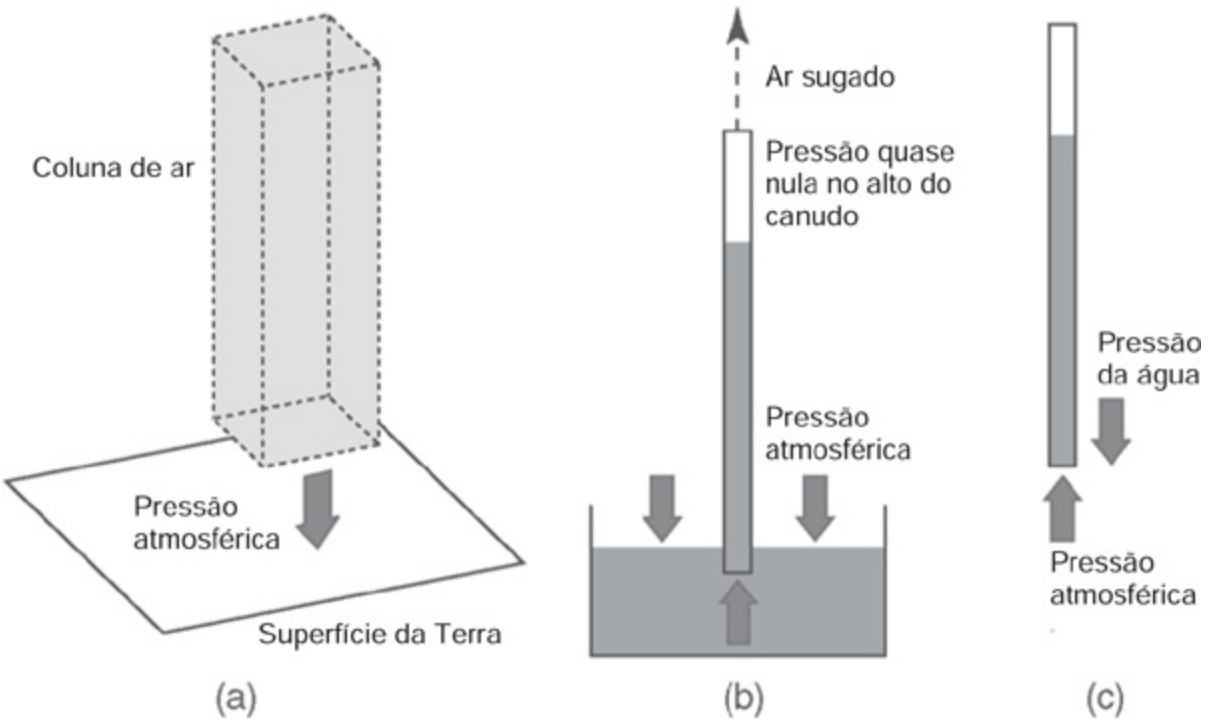


Figura 4.12 Como funciona um canudinho. (a) Uma coluna de ar da atmosfera exerce pressão sobre a superfície da Terra. (b) Quando o ar é sugado da parte de cima do canudo, a pressão diminui e a pressão atmosférica do lado de fora do canudo força o líquido a subir no interior do canudo. (c) O líquido permanece em equilíbrio no interior do canudo quando a diferença de pressão entre o "vácuo" acima do líquido e a pressão do ar do lado de fora equilibra o peso da coluna de líquido.

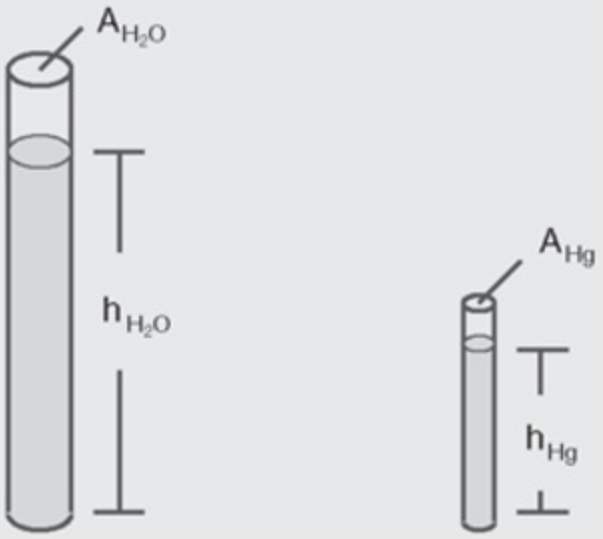
As teorias de Galileu e Baliani, apesar de incorretas, contribuíram para esclarecer o funcionamento da bomba de sucção. O modelo do "oceano de ar" de Baliani é o que mais se aproxima de nossa visão atual da pressão atmosférica, mas ele superestimou o valor dessa pressão. Por outro lado, o espaço acima da água no tubo não continha apenas "ar mais leve"; estava praticamente vazio (a definição de vácuo) como Galileu sugerira. O assistente de Galileu, Evangelista Torricelli, estudou a correspondência entre seu mentor e Baliani e chegou à conclusão de que, se Baliani estivesse correto em sua teoria do oceano de ar, a altura a que um sifão conseguiria fazer subir um líquido mais pesado que a água seria ainda menor [Mid63]. Em 1643, Torricelli pegou um tubo comprido de vidro aberto em uma

extremidade, encheu-o de mercúrio, inverteu-o e introduziu a extremidade aberta em uma cuba com mercúrio. Como Torricelli havia previsto, parte do mercúrio passou para a cuba, mas a coluna de mercúrio no interior do tubo logo parou de descer e se estabilizou com um espaço vazio acima, que foi o primeiro vácuo a existir por um tempo significativo na superfície terrestre. A altura da coluna de mercúrio era realmente muito menor que 11 metros, como mostra o Exemplo 4.4. Torricelli notou que o nível da coluna de mercúrio variava de dia para dia, de acordo com as condições do tempo, e atribuiu corretamente o fenômeno a variações da pressão do ar, sendo por isso considerado o inventor do barômetro. Alguns anos mais tarde, em 1648, o cientista francês Blaise Pascal convenceu o cunhado a escalar uma montanha levando um barômetro; o cunhado observou que quanto maior a altitude, menor o nível de mercúrio, o que confirmava a teoria da atmosfera como um "oceano de ar" [Gal81]. A unidade de pressão no SI é o Pascal (Pa): $1\ \text{Pa} = 1\ \text{N/m}^2$.

Exemplo 4.4 O Barômetro de Torricelli

Galileu observou que a altura máxima a que um sifão podia fazer subir uma coluna de água era de aproximadamente 11 metros. Supondo que a altura máxima fosse exatamente de 11 metros, qual seria a altura de uma coluna de mercúrio no barômetro de Torricelli?

Solução A ideia básica é comparar dois "barômetros" diferentes usados para medir a mesma pressão do ar, um com água (H_2O) e o outro com mercúrio (Hg). Para tornar o problema mais geral, podemos supor que as áreas das seções retas dos tubos são diferentes (embora, como vamos ver, isso seja irrelevante). Em vista disso, o problema pode ser formulado como a seguir:



Dados: Pressão do ar P, um barômetro de água com seção reta de área A_{H_2O} e altura da coluna $h_{H_2O} = 11$ m, e um barômetro de mercúrio com seção reta de área A_{Hg} e altura da coluna h_{Hg}.
Objetivo: Determinar o valor de h_{Hg}.
Plano: Para cada barômetro, a pressão do ar é igual ao peso da coluna de fluido dividida pela área da seção reta.

1. Expressar a pressão do ar em termos das dimensões das colunas de fluido e da massa específica dos fluidos.
2. Igualar as pressões do ar medidas pelos dois barômetros e explicitar h_{Hg}.

Análise: Dadas as massas específicas

$$\rho_{H_2O} = 1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \qquad \rho_{Hg} = 13579\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

temos, para o barômetro de água,

$$\begin{aligned} P_{H_2O} &= \frac{\text{peso}}{A_{H_2O}} \\ &= \frac{\rho_{H_2O} \times \text{volume} \times g}{A_{H_2O}} \\ &= \frac{\rho_{H_2O} \times A_{H_2O} \times h_{H_2O} \times g}{A_{H_2O}} \\ &= \rho_{H_2O} \times g \times h_{H_2O} \end{aligned}$$

e para o barômetro de mercúrio ar,

$$P_{Hg} = \rho_{Hg} \times g \times h_{Hg}$$

Fazendo $P_{H_2O} = P_{Hg}$ e explicitando h_{Hg}, obtemos

$$\begin{aligned} h_{Hg} &= \frac{\rho_{H_2O}}{\rho_{Hg}} \times h_{H_2O} \\ &= \frac{1000}{13579} \times 11\,\text{m} \\ &= 0{,}81\,\text{m} \end{aligned}$$

Este é um valor muito menor que os 11 metros da água.

4.4.2 Lei de Boyle

Em meados do século XVII, os cientistas de toda a Europa tinham começado a investigar as propriedades do vácuo. Um desses homens era Robert Boyle, de Oxford, um dos fundadores da Royal Society. Boyle nasceu na Irlanda em 1627 e, como Descartes, era profundamente religioso. Em sua autobiografia, Boyle conta que acordou certa noite com trovões tão violentos que "começou a imaginar… se o Dia do Juízo Final havia chegado" [MA06]. Jurou dedicar-se a uma vida religiosa e durante a carreira escreveu muitos trabalhos sobre a relação entre o poder divino e a percepção do homem desse poder; para Boyle, a experimentação científica meticulosa e sem preconceitos levaria a um melhor entendimento do poder divino [Hun]. Com uma personalidade assim, Boyle não podia deixar de achar interessante o problema da existência do vácuo.

Os melhores trabalhos de Boyle resultaram de uma longa e profícua colaboração com seu discípulo Robert Hooke. Hoje em dia, a maioria dos estudantes de física conhece Hooke por causa da "Lei de Hooke", segundo a qual o alongamento de uma mola é proporcional à força aplicada. Na verdade, o interesse de Hooke por molas veio de suas pesquisas com Boyle, investigando a relação entre a pressão e o volume de ar em uma bomba. Na infância, Hooke tinha facilidade de aprender e revelou um talento precoce para a pintura, a música e o artesanato, chegando a construir, sozinho, vários brinquedos mecânicos muito engenhosos. Estudou em Oxford, onde conheceu

Boyle e outros futuros fundadores da Royal Society. Alguns anos depois de se formar em Oxford, em 1658, Hooke começou a trabalhar como assistente de laboratório de Boyle e usou sua habilidade manual para construir instrumentos.[5]

Em um dos seus primeiros projetos com Boyle, Hooke criou uma câmara de vácuo formada por um bulbo de vidro e uma bomba de ar. A câmara, que aparece na Figura 4.13, era suficientemente grande para conter objetos como velas acesas e pequenos animais para observar como reagiam quando o ar era removido. O próprio Hooke, uma vez, se espremeu no interior de uma grande campânula de vidro para experimentar, em primeira mão, os efeitos da rarefação do ar. Um dos inventos mais engenhosos de Hooke foi uma maçaneta de latão, liberalmente untada com "óleo de salada", que podia ser usada para controlar os experimentos no interior da câmara sem quebrar o vácuo.[6] Usando este equipamento, Boyle e Hooke estudaram a relação entre pressão e volume. Em outra série de experimentos usando uma coluna de mercúrio para comprimir uma coluna de ar em um tubo de vidro (que será discutida com detalhes na Seção 5.2.1), Boyle e Hooke descobriram que, se a temperatura é mantida constante, a pressão e o volume de ar em um recipiente fechado são inversamente proporcionais. Hoje em dia, expressaríamos o resultado algebricamente:

Figura 4.13 A bomba de ar de Hooke, segundo [Boy60].

$$PV = \text{constante, a temperatura constante}$$

Boyle descreveu os resultados desses experimentos em 1660, em um artigo chamado *Novos Experimentos Físico-Mecânicos, Relativos à Mola do Ar, e Seus Efeitos* [Boy60]. Boyle e Hooke descobriram, por exemplo, que, no interior de uma câmara de vácuo, uma bexiga de ovelha podia atingir 152 vezes o volume original. Hooke e Boyle sabiam também que o ar se expandia com o aumento da temperatura, mas seria preciso mais de um século para que Jacques Charles executasse os primeiros experimentos sistemáticos em 1787 para determinar que a variação de volume era proporcional à variação de temperatura a pressão constante. Joseph Louis Gay-Lussac confirmou, em 1802, que a variação de pressão também era proporcional à variação de temperatura a volume constante, o que levou à equação composta

$$PV = kT,$$

onde k é uma constante. Finalmente, em 1834, Benoît Paul Émile Clapeyron combinou este resultado com a hipótese de Avogadro de que volumes iguais de gases à mesma temperatura e pressão contêm o

mesmo número de moléculas para chegar à Lei dos Gases Ideais,

$$PV = nRT,$$

onde

- P é a pressão em pascals (Pa)
- V é o volume em metros cúbicos (m^3)
- n é a quantidade de gás em mols (mol)
- T é a temperatura em kelvins (K)
- R é a constante dos gases perfeitos, 8,31 $m^3 \cdot Pa \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$

Queimando diferentes substâncias no interior da câmara de vácuo de Hooke, Boyle fez muitas descobertas importantes, que estabeleceram os fundamentos da química moderna, como será discutido com mais detalhes na Seção 4.7.

4.4.3 Lei de Hooke

Em um adendo a um artigo de 1676, Hooke apresentou um anagrama, "ceiiinossstuv", que classificou como uma descoberta a respeito da qual pretendia escrever no futuro [Cha96]. Este era um artifício bastante comum em sua época, através do qual um cientista podia reivindicar a primazia de uma ideia e, mesmo assim, continuar a trabalhar nela em segredo. Dois anos depois, Hooke revelou que o significado do anagrama era "*ut tensio, sic vis*", ou seja, "como a extensão, assim a força". Neste tratado de 1678, *Lectures de potentia restitutiva*, ou *Da Mola, Explicando o Poder dos Corpos Elásticos* [Hoo78], Hooke escreveu:

> … em todo corpo elástico… a força ou poder de voltar à posição natural é sempre proporcional à distância ou espaço que foi removido…

Hoje em dia, expressaríamos esta ideia através da equação

$$F = kx,$$

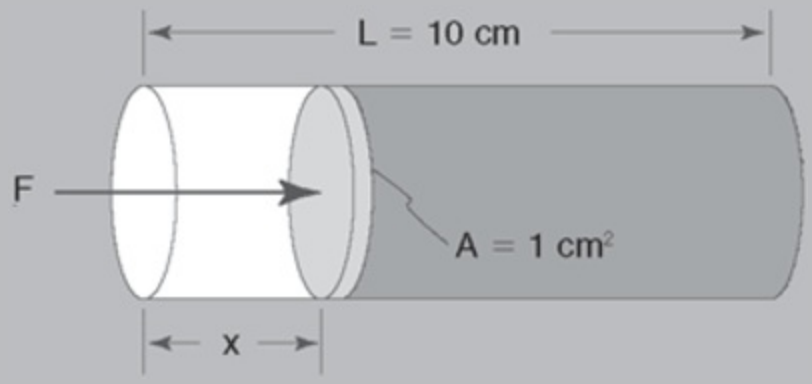
onde

- F é a força aplicada à mola
- x é a compressão ou alongamento
- k é a constante da mola

Em *O Poder dos Corpos Elásticos*, Hooke descreve vários tipos de molas que, de acordo com ele, obedecem à sua lei, entre eles uma "bobina ou hélice" de fio, um fio longo retilíneo, e "um corpo de ar, seja rarefeito ou comprimido". Hoje sabemos que a Lei de Hooke é uma boa aproximação nos dois primeiros casos, mas como se aplica a um "corpo de ar"? Este caso é examinado no Exemplo 4.5.

Exemplo 4.5 Mola Pneumática

Uma certa mola pneumática ideal é formada por um cilindro e um êmbolo sem atrito, porém estanque. O cilindro tem 10 cm de comprimento e 1 cm^2 de seção reta. Quando o êmbolo está totalmente recolhido, o ar no interior do cilindro se encontra à pressão atmosférica (100 kPa, aproximadamente). Determine a relação matemática entre a força exercida sobre o êmbolo e a distância percorrida pelo êmbolo no interior do cilindro. A mola pneumática obedece à Lei de Hooke?



Solução

Dados: Comprimento do cilindro $L = 0{,}1$ m, área da seção reta $A = 0{,}0001$ m^2, pressão $P = 100$ kPa quando o deslocamento x é 0.

Objetivo: Expressar a força F em função de x e determinar se F é proporcional a x.

Plano: Verificar se é possível escrever a Lei de Boyle na forma $F = kx$.

1. Expresse a pressão P no interior do cilindro em termos da força F e da área A.
2. Expresse o volume interno V do cilindro em termos do comprimento total L, do deslocamento x do êmbolo e da área A.
3. Use a Lei de Boyle para expressar a relação entre a pressão e o volume em termos de F e x.
4. Verifique se F é proporcional a x. Se isso for verdade, o gráfico de F em função de x será uma linha reta.

Análise: Se o êmbolo não está se movendo, a força F dividida pela área do êmbolo deve ser igual à pressão interna, ou seja,

$$P = \frac{F}{A}$$

Observe que estamos supondo que F é a soma da força aplicada com a força exercida pela pressão atmosférica do lado de fora do cilindro. O volume interno do cilindro é dado por

$$V = A(L - x)$$

De acordo com a Lei de Boyle,

$$PV = c$$
$$\frac{F}{A}[A(L - x)] = c$$

Explicitando F, obtemos:

$$F = \frac{c}{L - x}$$

Isto mostra que F *não* é proporcional a x; é inversamente proporcional a $(L - x)$! Para plotar F em função de x, precisamos conhecer o valor de c, que pode ser obtido aplicando a Lei de Boyle para $x = 0$:

$$\begin{aligned} c &= PV \\ &= P \times AL \\ &= 100\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times (0{,}0001\ \text{m}^2)(0{,}1\ \text{m}) \\ &= 0{,}001\ \text{N-m} \end{aligned}$$

Assim, a relação entre F e x é dada pela equação

$$F = \frac{0{,}001}{0{,}1 - x}\ \text{N}$$

que está plotada na Figura 4.14. O gráfico é muito diferente de uma linha reta e, na verdade, a força se torna infinita quando o êmbolo atinge a extremidade do cilindro. Ao contrário do que Hooke afirma, portanto, a Lei de Hooke não se aplica a um "corpo de ar".

Não existe uma explicação óbvia para o fato de Hooke haver escrito que sua lei das molas se aplicava ao ar, quando obviamente isso não é verdade. Ele não podia deixar de saber que a pressão e o volume são inversamente proporcionais, já que ajudou a descobrir a Lei de Boyle. Moyer apresenta uma discussão interessante desta contradição em [Moy77]; uma possibilidade é que Hooke tenha sido simplesmente descuidado com a matemática e feito confusão entre a proporcionalidade direta e inversa de duas grandezas, algo que Newton jamais teria tolerado!

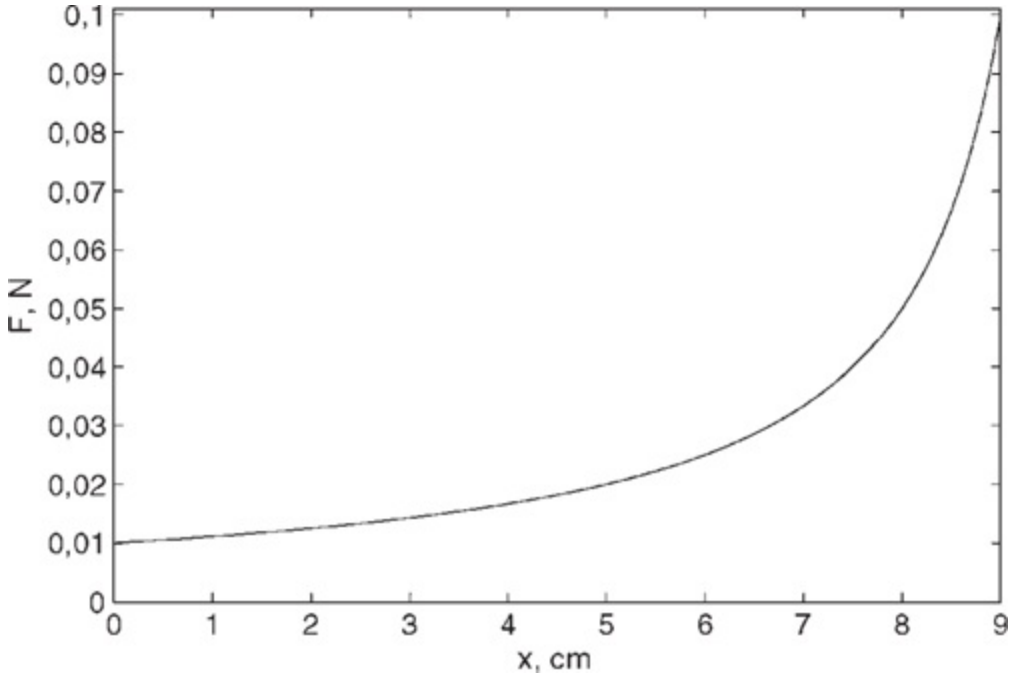


Figura 4.14 Gráfico de F em função de x para a mola pneumática do Exemplo 4.5. Embora F aumente com x, a relação entre as duas grandezas não é linear como na Lei de Hooke.

4.5 A MÁQUINA DE PISTÃO

Não foi preciso muito tempo após as pesquisas de Boyle e Hooke para

que as pessoas tivessem a ideia de usar gases aquecidos para mover uma máquina. Denis Papin foi um cientista francês que se interessou pelo assunto quando trabalhava com Leibniz e Huygens em Paris. Ele visitou a Royal Society em 1675 e nos anos seguintes trabalhou com Boyle e Hooke. Neste período, inventou uma panela de pressão, e enquanto observava a válvula de segurança abrir e fechar, teve a ideia de usar vapor d'água e pressão atmosférica para movimentar um pistão para cima e para baixo. Huygens já havia proposto usar pólvora para mover o pistão, mas a ideia se revelara pouco prática. Papin modificou o projeto de Huygens para usar vapor d'água. Em 1690, Papin publicou um artigo no qual propunha o uso de uma máquina a vapor rudimentar a pistão como a que aparece na Figura 4.15(a). A máquina de Papin não passava de um cilindro com um pistão móvel, mas estanque, e uma pequena quantidade de água no interior. O cilindro era aquecido por uma chama, a água fervia e a expansão do vapor movimentava o pistão para cima. Quando o pistão chegava no alto do cilindro, a chama era removida, o vapor se condensava, a pressão no interior do cilindro diminuía e o pistão era empurrado para baixo pela pressão atmosférica.

4.5.1 A Máquina de Newcomen

A máquina de Papin tinha vários problemas. Para começar, era lenta; Papin calculou que seria necessário um minuto para aquecer a água até a temperatura de ebulição. Em segundo lugar, Papin não tinha acesso a uma tecnologia metalúrgica capaz de construir uma máquina suficientemente grande para produzir trabalho útil e ao mesmo tempo manter o pistão e o cilindro bem ajustados para que o vapor não escapasse. Thomas Newcomen, um ferreiro inglês, resolveu os dois problemas; em 1712, construiu uma máquina para bombear água dos poços das minas. A Figura 4.15(b) mostra a máquina de Newcomen, ligada por um balanço à haste de uma bomba. Um peso fixado na haste a puxa para baixo, enquanto a máquina puxa a haste para cima

fazendo descer a outra extremidade do balanço. No centro da máquina está o cilindro *B*, que contém um pistão *P*. Quando o pistão sobe por causa da força exercida pelo peso sobre a haste da bomba, o vapor d'água produzido na caldeira *A* entra no cilindro através da válvula *V*. A essa altura, a pressão no interior do cilindro é igual à pressão atmosférica do lado de fora do cilindro. Quando o pistão chega à extremidade superior do cilindro, a válvula *V* é fechada e a válvula *V'* é aberta, deixando a água fria do tanque *C* borrifar no interior do cilindro. A queda da temperatura faz a pressão no interior do cilindro diminuir e a pressão do ar empurra o pistão para baixo, fazendo a haste da bomba subir. Quando o pistão chega à extremidade inferior do cilindro, a válvula *V* é aberta e o processo se repete.

(a)

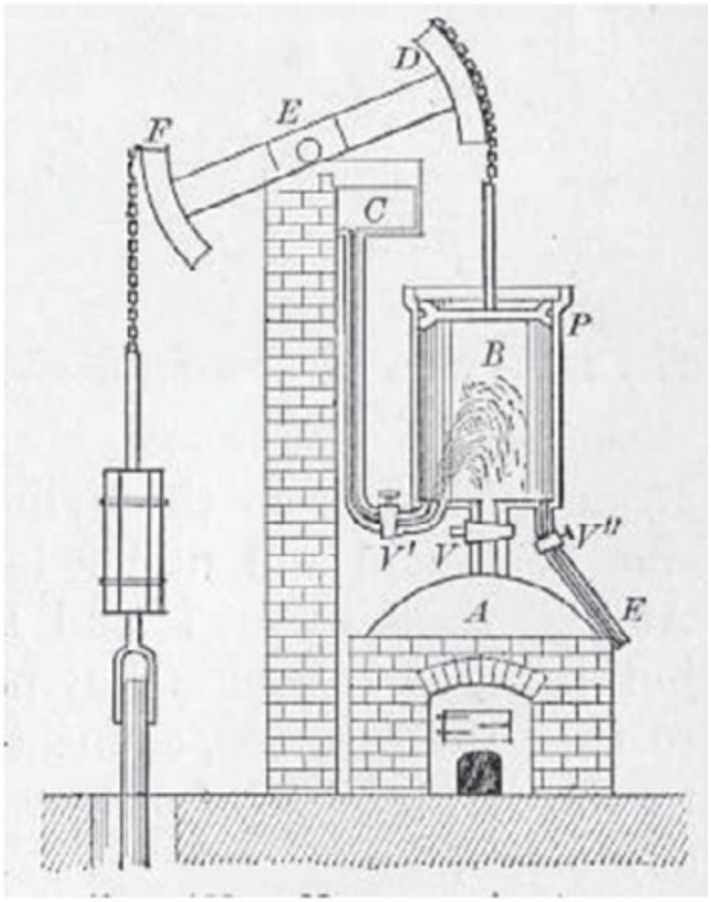
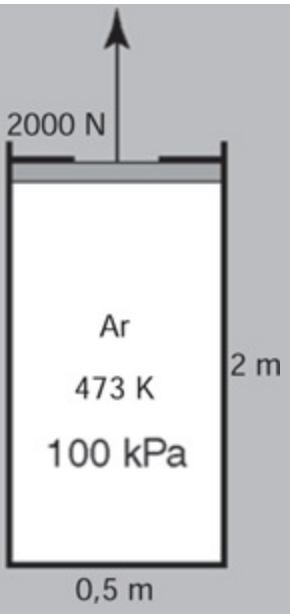


Figura 4.15 (a) A máquina a vapor de Papin, segundo [Wik]. (b) A máquina a vapor de Newcomen, segundo [Bla13].

A relação entre a temperatura, a pressão e o volume do vapor d'água no interior do cilindro é dada pela Lei dos Gases Ideais. O Exemplo 4.6 mostra que uma variação de temperatura relativamente pequena é suficiente para levantar um peso razoável.

Exemplo 4.6 Uso de uma Máquina de Pistão para Levantar um Peso

Suponha que uma máquina de pistão semelhante à máquina de Newcomen da Figura 4.15(b) – exceto pelo fato de que usa ar como fluido de trabalho em vez de vapor d'água – precisa levantar um peso de 2000 N (200 kg, aproximadamente), preso à outra extremidade do balanço. O cilindro tem 0,5 m de diâmetro e 2 m de comprimento. Se a temperatura do ar no interior do cilindro antes de ser resfriado é de 200°C e a pressão é a atmosférica, qual deve ser a temperatura do ar após o resfriamento para que o pistão se mova?



Solução O pistão só se moverá se a diferença entre a pressão atmosférica do lado de fora do cilindro e a pressão no interior do cilindro produzir uma força para baixo, no pistão, maior que 2000 N. Em vista disso, o problema pode ser formulado como a seguir.

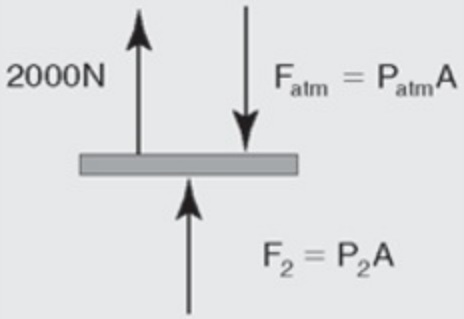
Dados: Comprimento do cilindro $L = 2$ m, diâmetro do cilindro $d = 0{,}5$ m, temperatura inicial $T_1 = 473$ K, pressão inicial $P_1 = P_{\text{atm}} = 100$ Pa, força aplicada de 2000 N.

Objetivo: Determinar a temperatura T_2 para a qual a pressão no interior do cilindro equilibra a pressão do lado de fora do cilindro (uma temperatura ligeiramente menor fará o pistão se mover).

Plano: Podemos resolver este problema em duas etapas:

1. Primeiro, determinamos qual é a pressão no interior do cilindro para a qual a força exercida sobre o pistão é zero.
2. Segundo, usamos a Lei dos Gases Ideais para determinar a temperatura correspondente a essa pressão.

Análise: A figura abaixo mostra as forças que agem sobre o pistão.



Se a força exercida sobre o pistão é zero, temos:

$$2000 - F_{atm} + F_2 = 0$$
$$2000 - P_{atm}A + P_2A = 0$$

Explicitando P_2, obtemos

$$\begin{aligned} P_2 &= P_{atm} - \frac{2000\,\text{N}}{A} \\ &= 100\,\text{kPa} - \frac{2000\,\text{N}}{\pi \times (0{,}25)^2\,\text{m}^2} \\ &= 89{,}8\,\text{kPa} \end{aligned}$$

Para um volume fixo no interior do cilindro (porque o pistão ainda não começou a se mover), a Lei dos Gases Ideais nos dá

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{T_1} &= \frac{P_2}{T_2} \\ T_2 &= \frac{P_2}{P_1} T_1 \\ &= \frac{89{,}8\,\text{kPa}}{100\,\text{kPa}} \times 473\,\text{K} \\ &= 425\,\text{K} \end{aligned}$$

Assim, o ar no interior do cilindro deve ser resfriado a 425 K (152°C) para que a máquina consiga levantar um peso de 2000 N.

Como mostra o Exemplo 4.6, quando a temperatura no interior do cilindro da máquina de Newcomen é suficientemente baixa, a diferença entre a pressão atmosférica do lado de fora e a pressão do gás do lado de dentro do cilindro é suficiente para fazer o pistão descer, levantando o peso que está preso a ele. Depois que o pistão começa a descer, o comportamento do sistema é determinado pelas

Três Leis de Newton e pela Lei dos Gases Ideais. Se a temperatura não muda, o pistão desce um pouco e para. Isso acontece porque, como vimos no Exemplo 4.5, o gás no interior do cilindro se comporta como uma mola (uma mola que não obedece à Lei de Hooke, mas, mesmo assim, uma mola) que mantém o pistão no lugar. Se empurramos o pistão para baixo, o volume do cilindro diminui e a pressão interna aumenta (PV = constante), de modo que, no momento em que largamos o pistão, o excesso de pressão o faz voltar à posição inicial. Para que o pistão continue a descer, é preciso diminuir continuamente a temperatura. Quando o gás atinge a temperatura final, o pistão fica parado em algum ponto do cilindro. Nesse instante, a pressão no interior do cilindro é a mesma que existia quando o cilindro começou a se mover (a pressão necessária para equilibrar o peso), mas o volume, de acordo com a Lei dos Gases Ideais, é menor, já que a temperatura é menor, como mostra a Figura 4.16.

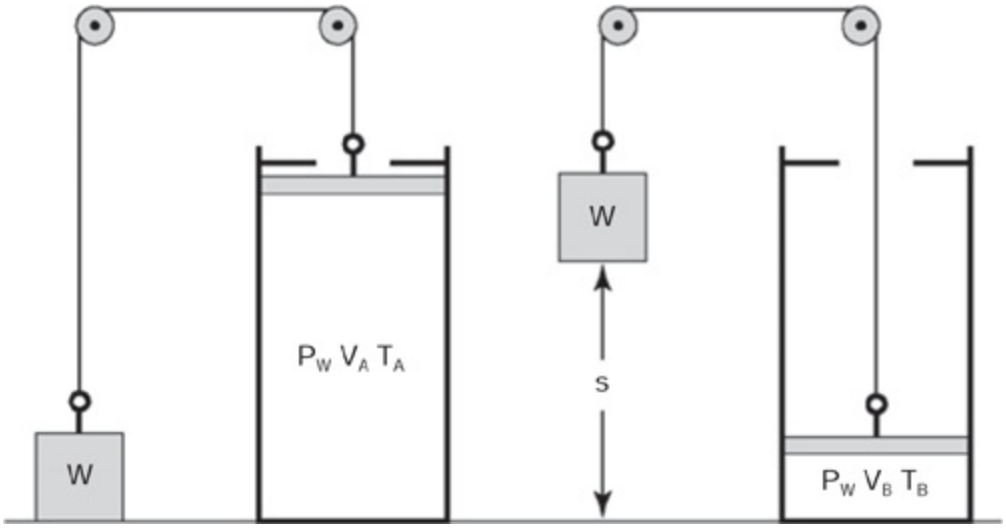


Figura 4.16 O pistão só consegue levantar um peso quando a diferença entre a pressão atmosférica e a pressão interna do cilindro é maior que um certo valor.

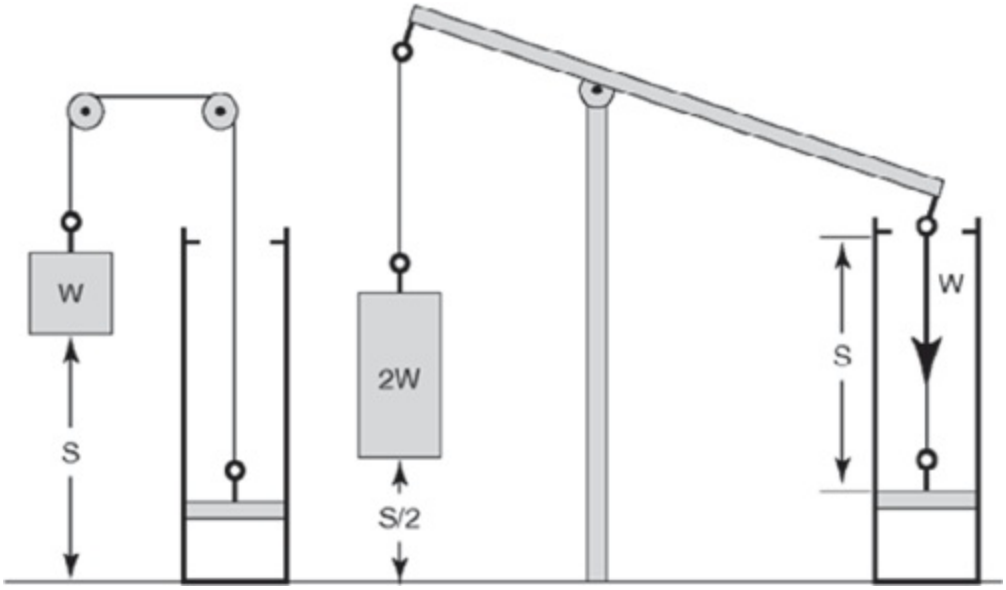


Figura 4.17 Uma máquina a vapor que levanta um peso W a uma altura s realiza o mesmo trabalho que uma máquina que levanta um peso $2W$ a uma altura $s/2$.

- W: o peso
- P_W: a pressão que equilibra o peso
- T_A e V_A: a temperatura alta (antes do resfriamento) e o volume correspondente
- T_B e V_B: a temperatura baixa (após o resfriamento) e o volume correspondente
- s: a distância percorrida pelo pistão

Aquecendo e depois resfriando o gás, a máquina levantou o peso W a uma altura s igual ao deslocamento do pistão. Ligando a máquina a um outro dispositivo, como a alavanca da Figura 4.17, seria possível realizar um trabalho equivalente aplicando uma força diferente ao longo de uma distância diferente.

4.5.2 A Versão de James Watt da Máquina de Newcomen

Cada ciclo da máquina a vapor de Newcomen exigia uma mudança da temperatura interna do cilindro. Esses aquecimentos e resfriamentos

sucessivos acarretavam um grande consumo de carvão, e as tentativas de tornar a máquina de Newcomb mais eficiente envolveram as mesmas questões básicas que os engenheiros modernos têm que enfrentar ao projetar motores com menor consumo de combustível. Um fabricante de instrumentos, de Glasgow, Escócia, chamado James Watt, foi responsável pelo primeiro melhoramento importante da máquina a vapor em meados da década de 1760, cerca de 50 anos depois do primeiro projeto de Newcomen. Enquanto estudava o funcionamento de uma máquina de Newcomen, Watt notou que até 80% do combustível era usado para aquecer novamente o cilindro depois que ele era resfriado com água, quando tudo que precisava ser aquecido e resfriado para movimentar o pistão era o gás no interior do cilindro. Watt descobriu uma forma de resfriar o vapor em uma câmara separada, do lado de fora do cilindro, chamada *condensador*, o que permitia que o cilindro permanecesse quente, reduzindo grandemente o consumo de combustível. Watt construiu o primeiro protótipo de sua máquina em 1765, mas foi necessária uma década para que ele e seu sócio e dono de fundição, Matthew Boulton, encontrassem uma maneira de fabricar máquinas a vapor de forma confiável e lucrativa. Boulton e Watt aceitaram as primeiras encomendas em 1775; na virada do século, sua firma havia vendido 300 a 400 máquinas a vários tipos de indústrias, como firmas de mineração, tratamento de água, metalurgia e tecelagem.

Watt precisava de um meio de quantificar o trabalho produzido por suas máquinas, para poder fixar os preços de forma justa. Decidiu então classificá-las de acordo com a *potência* desenvolvida, definida como quantidade de trabalho por unidade de tempo:

$$\begin{aligned}\text{potência} &= \frac{\text{trabalho}}{\text{tempo}} \\ &= \frac{\text{força} \times \text{distância}}{\text{tempo}}\end{aligned}$$

Na época, muitas fábricas inglesas usavam juntas de cavalos para

mover suas máquinas. Em um bom exemplo de aproximação de engenharia, Watt decidiu basear sua unidade na potência desenvolvida por um cavalo. Consultando o dono de uma fábrica de papel, Watt estimou que um cavalo era capaz de trotar aproximadamente 2,5 vezes por minuto em um percurso circular com 24 pés de diâmetro, puxando um peso de 180 libras. Arredondando para 3 o valor de π, Watt calculou a potência desenvolvida por um cavalo da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\text{Potência de 1 cavalo} &= \frac{\text{força} \times \text{distância}}{\text{tempo}} \\ &= \frac{(180\,\text{lbs}) \times (2{,}5 \times \pi \times \text{diâmetro})}{1\,\text{min}} \\ &= \frac{(180\,\text{lbs}) \times (2{,}5 \times 3 \times 24\,\text{ft})}{1\,\text{min}} \\ &= 32.400\ \text{pés-libras por minuto}\end{aligned}$$

Arredondando para 33.000 pés-libras por minuto, Watt definiu esta unidade de potência como 1 “horse” (cavalo, em inglês), que hoje chamamos de 1 horsepower.[7*] Em sua homenagem, a unidade de potência do SI recebeu o nome de watt.

$$1\,\text{W} = 1\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

4.6 A CIÊNCIA DA TERMODINÂMICA

4.6.1 Sadi Carnot e os Limites da Eficiência das Máquinas Térmicas

No início do século XIX, embora a máquina a vapor já fosse um sucesso comercial, os cientistas ainda pouco sabiam a respeito dos conceitos de trabalho e energia que hoje aprendemos no segundo grau. Watt e outros engenheiros experimentaram vários métodos para aumentar a potência e reduzir o consumo de combustível das

máquinas a vapor, mas, na falta de um bom modelo teórico, não faziam ideia dos limites de desempenho dessas máquinas. Em 1824, cinco anos após a morte de James Watt, um físico francês de 28 anos, de nome Sadi Carnot, escreveu um pequeno livro chamado *Reflexões sobre a Força Motriz do Fogo*, que mudaria drasticamente a situação.

Sadi Carnot era filho de Lazare Carnot, um engenheiro, matemático e líder militar. Como Lazare e a esposa eram apreciadores das artes, batizaram o filho com o nome de um poeta e moralista persa do século XII, Sheikh Saadi de Shiraz. Lazare Carnot serviu como "Organizador da Vitória" na Revolução Francesa e Napoleão o nomeou Ministro da Guerra e, mais tarde, Ministro do Interior. Quando o exército inglês e seus aliados, comandados pelo Duque de Wellington, derrotaram Napoleão em 1815, Lazare Carnot foi banido para a Alemanha e nunca mais voltou à França. Sadi, que se formara recentemente na École Polytechnique de Paris, estava impressionado com a contribuição da máquina a vapor para o poderio econômico e militar da Inglaterra e consternado porque a França havia ficado muito para trás nessa tecnologia. Além disso, como cientista francês de boa formação, Carnot não se conformava com o fato de que a máquina a vapor tinha sido inventada por um pequeno grupo de engenheiros ingleses com pouco estudo e ainda não havia uma teoria consistente do seu funcionamento.

Reflexões sobre a Força Motriz do Fogo é um livro muito bem escrito, no qual, em linguagem acessível, Carnot explica alguns dos princípios que servem de fundamento para o campo da *termodinâmica*– o estudo do calor e energia. Carnot começa o livro com a seguinte introdução, traduzida para o inglês em 1890 por Robert H. Thurston, um dos fundadores e primeiro presidente da Associação Americana de Engenheiros Mecânicos (ASME) [Car90]:

> Todos sabem que o calor pode produzir movimento. Ninguém pode duvidar de que o calor possui um vasto poder motor, nesses dias em que a máquina a vapor é tão conhecida em toda parte. Ao calor também se devem os vastos

> movimentos que acontecem na Terra. Ele causa as agitações da atmosfera, a ascensão das nuvens, a queda da chuva e de meteoros, as correntes de água que cortam a superfície do globo e das quais o homem aproveitou apenas uma pequena parte. Até mesmo os terremotos e erupções vulcânicas são causados pelo calor. Desse imenso reservatório podemos retirar a força motriz necessária para nossos propósitos…
>
> A máquina a vapor já opera nossas minas, impulsiona nossos navios, escava nossos portos e rios, forja o ferro, trabalha a madeira, mói os grãos, tece nossos panos, transporta as cargas mais pesadas, etc… Apesar dos trabalhos de todos os tipos que são executados pelas máquinas a vapor, apesar das condições satisfatórias a que chegou seu funcionamento, sua teoria é muito pouco compreendida, e as tentativas de melhorá-las ainda são feitas quase ao acaso… Frequentemente se tem levantado a questão de se a força motriz do calor é ilimitada ou se as melhorias possíveis das máquinas a vapor têm um limite definido, um limite que a natureza das coisas jamais permitirá que seja ultra-passado… Propomos agora submeter essas questões a um exame cuidadoso.

Carnot introduziu no livro a ideia abstrata de uma *máquina térmica* com a capacidade de produzir movimento ao aquecer e resfriar qualquer coisa que se expanda e se contraia com variações de temperatura, desde um gás, como o vapor d'água, até um líquido ou mesmo um sólido. Para aquecer e resfriar essa substância, Carnot supôs que sua máquina continha dois corpos a temperaturas diferentes e constantes, que chamou de forno e geladeira. Usando um argumento que ficou famoso, declarou que o calor devia sempre fluir de corpos mais quentes para corpos mais frios, como, por exemplo, do forno para o gás e do gás para geladeira, porque, se não fosse assim, seria possível produzir um movimento perpétuo, o que obviamente não fazia sentido. Mostrou que o que chamava de "força motriz" de uma máquina térmica, a grandeza hoje conhecida como trabalho, depende da diferença entre a temperatura máxima de aquecimento e a temperatura máxima de resfriamento. Isso significava, entre outras coisas, que a *eficiência* de uma máquina térmica, ou seja, a porcentagem da energia contida no calor que pode ser transformada em movimento, é limitada pela temperatura de resfriamento. Em

outras palavras, é *impossível* converter em movimento todo o calor gerado pela queima do combustível.

O trabalho de Carnot não despertou grande atenção até sua morte, em 1832, mas foi reconhecido pelos cientistas da geração seguinte, como Clapeyron (o mesmo que formulou a Lei dos Gases Ideais), Rudolf Clausius e Lord Kelvin, e acabou por tornar-se um dos pilares da ciência da termodinâmica. Hoje em dia, expressamos a *eficiência de Carnot* de uma máquina térmica através da fórmula

$$\text{Eficiência de Carnot} = \frac{T_Q - T_F}{T_Q} \qquad (4.8)$$

onde T_Q e T_F são as temperaturas, em kelvins, do forno (que hoje chamamos de *fonte quente*) e da geladeira (que hoje chamamos de *fonte fria*). O uso desta lei é ilustrado no Exemplo 4.7.

Exemplo 4.7 Eficiência de uma Máquina a Vapor

Uma máquina a vapor funciona com vapor d'água à pressão atmosférica e é resfriada com uma mistura de gelo e água. Qual é a maior eficiência possível da máquina?

Solução

Dados: A temperatura da fonte quente, T_Q, é a temperatura de ebulição da água; a temperatura da fonte fria, T_F, é a temperatura de congelamento da água.

Objetivo: Determinar a eficiência de Carnot.

Plano: Substituir os parâmetros por valores numéricos na fórmula da eficiência de Carnot.

Análise: Usando a fórmula da eficiência de Carnot com $T_Q = 373$ K e $T_F = 273$ K, temos:

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{T_Q - T_F}{T_Q} \\ &= \frac{373 - 273}{373} \\ &= 0{,}268\end{aligned}$$

Assim, a maior eficiência possível é de 26,8%. Em uma máquina real, a eficiência é normalmente muito menor, já que nem toda a energia usada para produzir vapor é convertida, pela máquina, em trabalho útil.

4.6.2 James Joule: Dos Planos de uma Nova Cervejaria a uma Teoria de Calor e Energia

Carnot prestou uma contribuição inestimável ao entendimento dos conceitos teóricos de calor e energia. Entretanto, partes da sua teoria não estavam de acordo com as observações experimentais. Em particular, Carnot acreditava em uma antiga teoria de que o calor era uma substância fundamental – chamada *calórico*– que era sempre conservada; em outras palavras, o calor podia ser transferido de um objeto para outro, mas não podia ser criado nem destruído. No final, foi o trabalho de outro engenheiro inglês com pouca educação formal que refutou a teoria do calórico.

James Joule trabalhava como gerente da cervejaria do pai, em Manchester, Inglaterra, quando começou a pensar em substituir as máquinas a vapor pelo recém-inventado motor elétrico. Nascido na Noite de Natal de 1818, Joule era uma criança com a saúde frágil, e estudou em casa até os 14 anos, quando o pai o mandou, junto com o irmão, estudar ciências e matemática com John Dalton, um eminente químico da época. Joule se interessou pela eletricidade e continuou a fazer experimentos com ela enquanto trabalhava na cervejaria. Publicou seu primeiro artigo, a respeito de melhoramentos em eletroímãs para motores, quando tinha 20 anos; nos cinco anos seguintes, escreveu uma série de artigos com os resultados de experiências nos campos da eletricidade, trabalho e calor. Esses artigos revelam a extraordinária habilidade e meticulosidade de Joule para controlar seus experimentos e fazer medidas. Em um artigo de 1840 a respeito dos efeitos de aquecimento de uma corrente elétrica passando por um fio, Joule descreve a técnica que usou para medir a temperatura:

> O termômetro que usei tinha uma escala graduada no tubo de vidro. As divisões eram largas e precisas. Na hora de medir as temperaturas, mexo o líquido suavemente com uma pena; em seguida, suspendendo o termômetro pela extremidade superior, … coloco os olhos no mesmo nível que o alto da coluna de mercúrio. Desse modo, com um pouco de prática, posso estimar a temperatura com a precisão de um décimo de grau Fahrenheit [Jou63b].

Era fato sabido que um fio se aquecia com a passagem de uma corrente elétrica. A teoria do calórico explicava o fenômeno como uma transferência de calor de outra parte do sistema para o fio. Em 1843, porém, medindo meticulosamente a temperatura em vários pontos do seu equipamento, Joule mostrou, sem sombra de dúvida, que o calor era *produzido* pela corrente elétrica e não transferido de outro lugar. Desafiando a opinião dos principais cientistas de Londres, Cambridge, Glasgow e Paris, o cervejeiro de 25 anos de Manchester assegurou que o calórico (ou seja, o calor) não era conservado. Compreensivelmente, a comunidade acadêmica a princípio não levou a sério o trabalho de Joule.

De acordo com Joule, o calor não era uma substância, mas um estado de vibração que podia ser induzido por meios mecânicos, tanto diretamente, através do atrito, como indiretamente, usando um gerador para produzir uma corrente elétrica em um fio. No seu experimento mais famoso, realizado em 1845, Joule demonstrou a equivalência entre energia cinética e calor [Jou63c][Jou63d]. Nesse experimento, imergiu uma roda de pás em um recipiente com água e usou um sistema de pesos, corda e roldanas para fazer girar a roda, como mostra a Figura 4.18. Joule pendurou um peso de 4 libras na corda e o deixou descer 12 jardas, repetindo o processo 16 vezes antes de medir a temperatura da água com um termômetro muito preciso. Normalizando os resultados, observou que, “quando a temperatura de uma libra de água aumenta de um grau da escala Fahrenheit, ela recebe uma quantidade de *vis viva* igual à adquirida por um peso de 890 libras ao descer da altura de um pé” [Jou63c].

Joule persistiu em seus experimentos, e em poucos anos conseguiu

provas suficientes para convencer o maior especialista da época em calor e temperatura, William Thomson, o Lord Kelvin, de que suas teorias estavam corretas. Como Descartes, Joule e Lord Kelvin tinham uma visão religiosa da conservação da energia. Em uma palestra proferida na Igreja de St. Ann, em Manchester, em 1847, Joule comentou que muitos cientistas acreditavam que a *vis viva* podia ser destruída, por exemplo, quando um objeto em queda chega ao solo. Para Joule, isso era uma afronta: "podemos assegurar *a priori*" – declarou – "que tal destruição absoluta da força viva não pode ocorrer, pois seria manifestamente absurdo supor que os poderes com os quais Deus dotou a matéria podem ser destruídos ou criados pela mão do homem" [Jou63a]. Quando Lord Kelvin aceitou a teoria de Joule da equivalência entre energia mecânica e calor, o resto da comunidade o acompanhou. Depois de analisar os trabalhos de Joule e Carnot durante os 50 anos seguintes, os cientistas condensaram suas descobertas em dois princípios fundamentais envolvendo o calor, o trabalho e a energia, que vieram a ser conhecidos como Primeira e Segunda Leis da Termodinâmica.

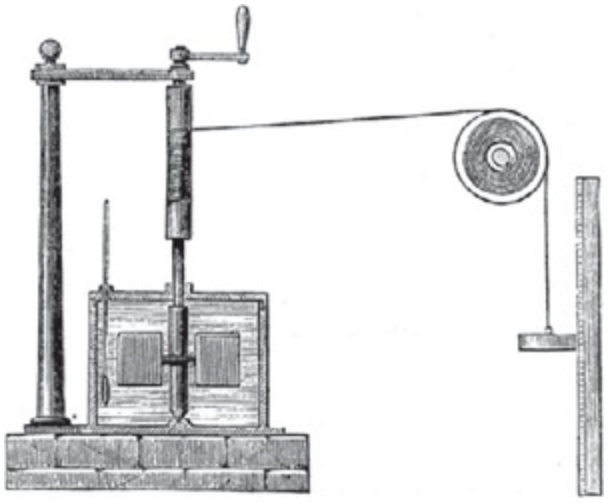


Figura 4.18 O equipamento usado por Joule para demonstrar a equivalência entre trabalho e calor, segundo [har69].

Primeira Lei da Termodinâmica A *Primeira Lei da Termodinâmica* é a

lei de conservação da energia, a ideia de que a quantidade de energia no universo é constante, e nada pode ser criado ou destruído. Começando com a equivalência entre trabalho, a lei foi ampliada para cobrir uma jurisdição cada vez maior quando os cientistas perceberam que a energia podia existir em outras formas. Em um artigo de 1852, Lord Kelvin comentou a respeito da ideia de Carnot de que havia uma "perda" de energia mecânica quando o calor era transferido de um corpo quente para um corpo frio:

> Como é absolutamente seguro que apenas o Poder Criador pode trazer à existência ou aniquilar energia mecânica, a "perda" mencionada não pode ser aniquilação, e sim alguma transformação de energia.

Em seguida, Lord Kelvin citou algumas possíveis "reservas" de energia, entre as quais estavam formas "estáticas" de energia como "pesos mantidos a uma certa altura, prontos para descer e realizar trabalho no momento desejado, um corpo eletrificado, [ou] um suprimento de combustível", e formas "dinâmicas" de energia como "massas de matéria em movimento, um volume de espaço pelo qual estão passando ondulações de luz ou calor radiante, um corpo cujas partículas executam movimentos térmicos (ou seja, não infinitamente frio)" [TLK52].

Segunda Lei da Termodinâmica Usando a descida de um peso para fazer girar uma roda de pás, Joule demonstrou que o trabalho mecânico pode ser convertido em calor. Se a roda de pás de Joule em seguida começasse a girar sozinha, levantando o peso e fazendo a água retornar à temperatura inicial, isso não seria uma violação da Primeira Lei da Termodinâmica. O fato de que isso jamais acontece é garantido pela *Segunda Lei da Termodinâmica*. A Segunda Lei tem sido expressa de várias formas, algumas incorretas; existe um site na web que mostra mais de cem versões diferentes. Uma das mais simples foi a proposta por Rudolf Clausius em 1850:

> O calor não pode passar espontaneamente de um corpo mais frio para um corpo mais quente [Cla79].

Para compreender a relação entre este enunciado da Segunda Lei e o fato de que o equipamento de Joule não pode funcionar ao contrário, podemos pensar no equipamento em termos da máquina térmica ideal definida por Carnot. Lembre-se de que a máquina de Carnot dispõe de dois reservatórios de calor, a fonte quente e a fonte fria, para expandir e condensar um fluido de trabalho e assim realizar trabalho, e a eficiência da máquina é proporcional à diferença entre as temperaturas das duas fontes. No equipamento de Joule, a água estava em um recipiente isolado, de modo que, se considerarmos a água quente no interior do recipiente como fonte quente, não haveria uma fonte fria para a qual o calor pudesse ser transferido. Também podemos pensar na água dos dois lados da roda de pás como duas fontes de calor separadas; nesse caso, como estão à mesma temperatura, a eficiência de uma máquina que usasse as duas fontes seria zero.

Isso não quer dizer que seja impossível construir uma máquina que use a água aquecida para levantar o peso. Se a água estiver inicialmente à mesma temperatura que o ambiente, depois que o peso descer, estará a uma temperatura maior que o ambiente e, portanto, a água do recipiente poderá ser a fonte quente de uma máquina térmica e o ar do exterior a fonte fria. O problema é que, como a temperatura da água seria apenas ligeiramente maior que a temperatura do ar, a eficiência dessa máquina seria muito baixa e apenas uma pequena fração da energia armazenada na água em forma de calor poderia ser transformada em trabalho. Em consequência, a máquina poderia levantar o peso apenas a uma pequena fração da altura original. Além disso, se repetíssemos o processo, a eficiência do processo na segunda vez seria ainda menor, já que a temperatura da água estaria mais próxima da temperatura do ar; depois de algumas repetições, a temperatura da água seria igual à temperatura do ar e a máquina

deixaria de funcionar.

4.7 CONSERVAÇÃO DA MASSA

4.7.1 Robert Boyle e *O Químico Cético*

Quando Robert Boyle investigou experimentalmente a relação entre a pressão e o volume de ar em um recipiente, não sabia que o ar era uma mistura de vários gases, como nitrogênio, oxigênio e dióxido de carbono, e não fazia ideia do que poderia ser um gás ideal. No final do século XVII, os cientistas europeus ainda acreditavam que a matéria era formada pelos quatro "elementos clássicos", Terra, Água, Ar e Fogo, uma ideia que remontava à Grécia antiga. Como muitos dos cientistas da época, Boyle era um alquimista e acreditava que metais diferentes como chumbo, prata e ouro podiam ser transformados uns nos outros; muitos dos seus experimentos foram realizados com esse objetivo. Com mais de três séculos de vantagem, hoje acusamos os alquimistas de serem retrógrados e supersticiosos, mas suas tentativas eram motivadas por algumas observações curiosas, que, dados os conhecimentos da época, faziam suas hipóteses parecerem bastante plausíveis.

Um fenômeno bem conhecido na época de Boyle era que, quando certos metais são aquecidos em um cadinho, podem ser reduzidos a um tipo de cinza chamado *calx*. O calx de chumbo, em particular, era um pó amarelo que, estranhamente, pesava mais que o chumbo original. Além disso, se o calx era queimado com palha, transformava-se novamente em chumbo. Boyle não acreditava em teorias que não fossem apoiadas por experimentos; em 1661, escreveu o livro *O Químico Cético* [Boy61], no qual ridicularizava os métodos dos alquimistas que se baseavam apenas em argumentos teóricos, e os exortava a usar métodos experimentais para determinar a composição dos materiais. Usando a câmara de vácuo que projetara com Hooke,

Boyle executou experimentos detalhados a respeito de como diferentes materiais queimavam na presença e na ausência de ar. Observou que o chumbo não queimava quando não havia ar na câmara, mas que enxofre e carvão (dois componentes da pólvora) queimavam normalmente se estivessem misturados com salitre (o terceiro componente). Essa observação levou Boyle a concluir que havia algo no salitre (hoje conhecido como nitrato de potássio, KNO_3), também existente no ar, que permitia que o carvão e o enxofre queimassem. Boyle observou também que esta substância responsável pela queima também era necessária para a respiração, já que os pássaros e pequenos mamíferos que ele colocara na câmara de vácuo morreram quando o ar foi retirado. Boyle não sabia qual era essa substância, mas passou a acreditar que havia mais elementos do que os clássicos Terra, Água, Ar e Fogo. Em sua opinião, a matéria era constituída por "corpúsculos" de alguns elementos básicos e o que distinguia os materiais eram a forma, o arranjo e o movimento desses corpúsculos. Os experimentos o levaram à conclusão de que algum tipo de "partícula de fogo" passava a fazer parte dos metais quando eram queimados, o que explicava o aumento de peso.

Dois contemporâneos de Boyle na Alemanha, Johann Becher e seu aluno Georg Stahl, também postularam a existência de uma partícula de fogo, que chamaram de *flogístico*. Durante mais ou menos um século, a teoria da combustão baseada no flogístico foi tão popular quanto a teoria de gravitação de Newton. No século XVIII, os cientistas começaram a perceber que o ar não era um gás único, mas uma mistura de gases com diferentes propriedades. Joseph Priestley, um professor e clérigo de Leeds, Inglaterra, fez algumas de suas primeiras descobertas literalmente ao lado de um copo de cerveja. Como morava perto de uma cervejaria, Priestley observou que o gás produzido pela fermentação da cerveja podia extinguir uma chama. Observou também que podia introduzir o gás na água para criar uma nova bebida colocando um recipiente com água acima de um tonel de

cerveja. Priestley chamou esse gás (hoje conhecido como dióxido de carbono, CO_2) de “ar fixo”. Em 1774, Priestley descobriu outro gás, que podia ser produzido aquecendo calx de mercúrio com um facho luminoso concentrado por uma lente. Chamou a descoberta de “ar deflogisticado” e observou que isso tornava as chamas mais brilhantes e podia manter um rato vivo dentro de uma campânula fechada. Alguns anos mais tarde, Antoine Lavoisier concluiu erradamente que esse gás era responsável pela acidez, e o chamou de *oxigênio*, que em grego significa “gerador de acidez”.

4.7.2 Antoine Lavoisier

Como Boyle e Hooke, Lavoisier era um experimentalista diligente e meticuloso. Pesava cuidadosamente os reagentes e os produtos da combustão antes e depois de uma queima. Através dessas medições, Lavoisier observou que o peso do oxigênio consumido na queima de um metal correspondia exatamente à diferença entre o peso do calx e o peso inicial do metal. Repetindo esses experimentos com vários materiais, Lavoisier concluiu que os pesos dos reagentes e dos produtos eram sempre iguais. Com esses resultados, refutou a teoria do flogístico, substituindo-a por uma lei de conservação de matéria ou massa. No primeiro ano da Revolução Francesa, 1789, Lavoisier publicou seu *Traité Élémentaire de Chimie* (*Tratado Elementar de Química*), que é considerado o primeiro livro moderno de química [Lav89]. Além de apresentar a Lei de Conservação da Massa, o livro definia *elemento* como uma substância básica que não podia ser reduzida a elementos mais simples, e apresentava uma lista com mais de trinta elementos, entre eles muitos que ainda são considerados elementos, alguns que na verdade são compostos, e outros – como calor e luz – que hoje são encarados de outra forma.

Embora a maior contribuição de Lavoisier tenha sido para a ciência, ele ganhava a vida como coletor de impostos, uma escolha infeliz na época da Revolução Francesa. Considerado um inimigo do

povo, foi preso em 1794 e guilhotinado no mesmo dia. Em seu necrológio de Lavoisier, o matemático francês Joseph Louis Lagrange declarou: “Bastou um instante para cortar essa cabeça, mas pode levar mais de um século para que apareça outra igual na França”.[8]

4.8 EXEMPLO DE ANÁLISE: O MOTOR DE COMBUSTÃO INTERNA

No final do século XIX, os avanços da termodinâmica, da química e das técnicas de fabricação levaram à produção de motores mais eficientes, o que, por sua vez, deu origem ao automóvel. Em vez de usar uma caldeira externa para produzir vapor, os novos *motores de combustão interna* queimavam combustíveis líquidos no interior do próprio cilindro para produzir o calor necessário para expandir o ar e movimentar o pistão. Nesta seção, vamos discutir o funcionamento do tipo mais comum de motor de combustão interna, o chamado *motor de quatro tempos*, e usar modelos teóricos apresentados no início deste capítulo para analisar seu desempenho.

4.8.1 Funcionamento do Motor de Quatro Tempos

O primeiro motor de combustão interna foi fabricado em 1854 pelos engenheiros italianos Eugenio Barsanti e Felice Matteucci. Em 1876, os engenheiros alemães Nikolaus Otto, Gottlieb Daimler e Wilhelm Maybach criaram o motor de quatro tempos, no qual o pistão sobe e desce duas vezes cada vez que o combustível queima no cilindro. Alguns anos depois, Karl Benz usou um modelo semelhante para fabricar os primeiros automóveis. Hoje em dia, o ciclo Otto de quatro tempos continua a dominar o mercado de motores de automóveis. Os passos do ciclo Otto estão ilustrados na Figura 4.19. O primeiro tempo é o tempo de *admissão*, no qual uma mistura de combustível e ar frio é introduzida no cilindro através de uma válvula de admissão,

enquanto o pistão se move para baixo no interior do cilindro. O segundo tempo é o tempo de *compressão*, no qual o pistão comprime a mistura ar-combustível em um pequeno espaço na parte superior do cilindro. Quando o pistão chega ao *ponto morto superior*, a vela de ignição produz uma centelha que inflama o combustível. Isto produz um aumento quase instantâneo da pressão, impulsionando o pistão para baixo no tempo de *expansão* ou tempo de força. Quando o pistão chega ao *ponto morto inferior*, a válvula de exaustão se abre e começa o ciclo de *exaustão*, no qual o pistão, ao subir, expele os gases quentes e os resíduos da combustão para fora do cilindro, deixando-o pronto para iniciar outro ciclo com o tempo de admissão. Dos quatro tempos do ciclo (admissão, compressão, expansão e exaustão), o tempo de expansão é o único em que a queima de combustível fornece energia ao motor; o objetivo dos outros três tempos é maximizar a eficiência do tempo de força.

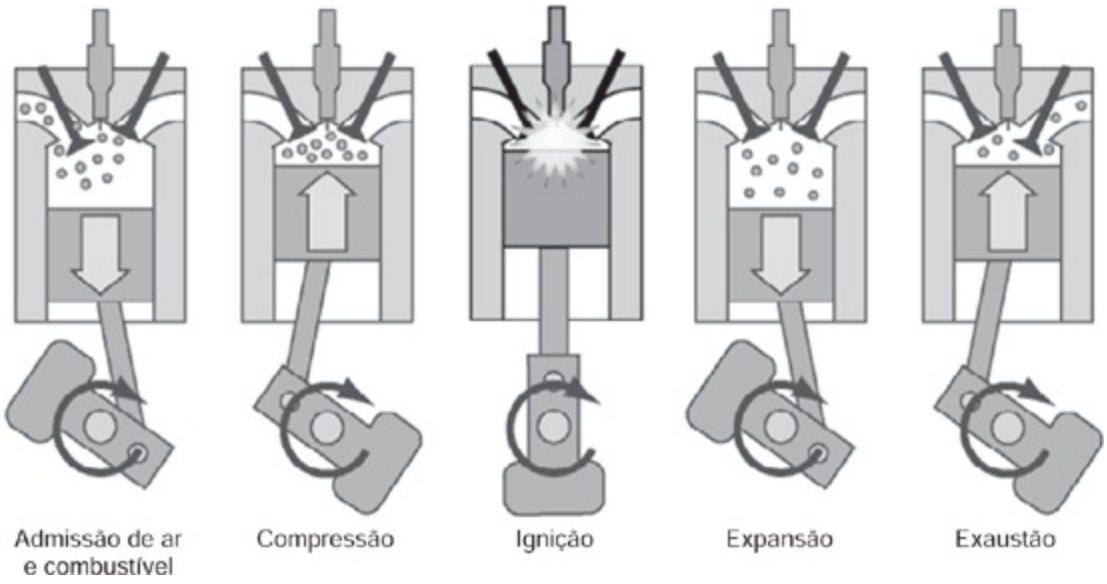


Figura 4.19 O ciclo Otto de quatro tempos.

4.8.2 Eficiência do Tempo de Admissão e a Mistura Ar/Combustível

Durante o tempo de admissão, um *carburador* ou um sistema de

injeção eletrônica borrifa uma mistura de combustível e ar no interior do cilindro; um dos parâmetros de desempenho mais importantes de um motor de combustão interna é a razão entre combustível e ar nesta mistura. À primeira vista, poderia parecer que quanto maior a quantidade de combustível, maior a força produzida, mas não é bem assim. Em primeiro lugar, o combustível precisa de oxigênio para queimar; a menos que haja oxigênio suficiente na mistura, nem todo o combustível será queimado. Em segundo lugar, o pistão é na verdade movimentado pela pressão do ar; o combustível apenas fornece a energia necessária para aquecer o ar e aumentar sua pressão. Em uma situação ideal, a mistura deve conter a quantidade de oxigênio estritamente necessária para queimar todo o combustível presente. A razão entre a massa de ar e a massa de combustível nessas condições é chamada de *razão estequiométrica*. A razão estequiométrica é calculada no Exemplo 4.8 para o isooctano, o principal ingrediente da gasolina.

Exemplo 4.8 Razão Estequiométrica do Isooctano

Determine a razão estequiométrica do isooctano, C_8H_{18}, sabendo que o ar contém 23,2% em massa de oxigênio.

Solução Para resolver o problema, é preciso equilibrar a reação de combustão do isooctano,

$$C_8H_{18} + 12{,}5O_2 \rightarrow 8CO_2 + 9H_2O$$

As massas atômicas dos elementos envolvidos na reação são as seguintes:

Elemento:	H	C	O
Massa atômica (g/mol):	1	12	16

Estas informações são suficientes para resolver o problema.
Dados: A equação de combustão do isooctano e a porcentagem em massa de oxigênio no ar.
Objetivo: Determinar a razão entre a massa de ar e a massa de isooctano para que haja combustão completa.
Plano: Nosso plano tem 4 etapas.

1. Calcular a massa de 1 mol de isooctano.
2. Calcular a massa de oxigênio necessária para queimar um mol de isooctano.
3. Calcular a massa de ar que contém a quantidade necessária de oxigênio.
4. Dividir a massa de ar pela massa de isooctano.

Análise: Para começar, usamos as massas atômicas dadas para calcular a massa de 1 mol de isooctano:

$$\begin{aligned}\text{Massa de isooctano} &= 8(\text{massa de C}) + 18(\text{massa de H}) \\ &= 8(12) + 18(1) \\ &= 114\,\text{g}\end{aligned}$$

De acordo com a equação da reação, 12,5 mols de O_2 são necessários para queimar 1 mol de isooctano; assim,

$$\begin{aligned}\text{Massa de oxigênio queimado} &= (12{,}5)(2)(\text{massa de O}) \\ &= (12{,}5)(2)(16) \\ &= 400\,\text{g}\end{aligned}$$

Como o ar contém 23,2% de oxigênio em massa, temos:

$$\begin{aligned}\text{Massa de ar} &= \text{massa de oxigênio queimado}/0{,}232 \\ &= 1724{,}1\ \text{g}\end{aligned}$$

Finalmente, a razão estequiométrica é dada por

$$\begin{aligned}\text{Razão estequiométrica} &= \frac{\text{massa de ar}}{\text{massa de isooctano}} \\ &= \frac{1724{,}1}{114} \\ &= 15{,}12\end{aligned}$$

Assim, a razão estequiométrica do isooctano é 15,1. Na verdade, a gasolina é uma mistura de hidrocarbonetos, e a razão estequiométrica está mais próxima de 14,7.

4.8.3 Eficiência do Tempo de Compressão e a Razão de Compressão

Dos quatro tempos do ciclo de Otto, o tempo de compressão é o que

tem provavelmente a influência menos óbvia, porém mais importante, na eficiência geral de um motor. O principal parâmetro do tempo de compressão é a chamada *razão de compressão*, r_c, mostrada na Figura 4.20. A razão de compressão é a razão entre o valor máximo e o valor mínimo do volume interno do cilindro:

$$r_c = \frac{\text{volume do cilindro no ponto morto inferior}}{\text{volume do cilindro no ponto morto superior}}$$

Podemos compreender a importância da razão de compressão comparando a operação de um motor de combustão interna com a máquina térmica ideal de Carnot. Imagine, em primeiro lugar, uma máquina térmica ideal a pistão, como a da Figura 4.21. Para levantar o pistão, adicionamos lentamente uma certa quantidade de energia térmica Q_Q ao gás no interior do cilindro mantendo a pressão P constante, o que faz a temperatura subir para T_Q e o volume aumentar para V_Q. Para baixar o pistão, removemos uma quantidade de energia térmica Q_F, o que faz a temperatura cair para T_F e o volume diminuir para V_F.

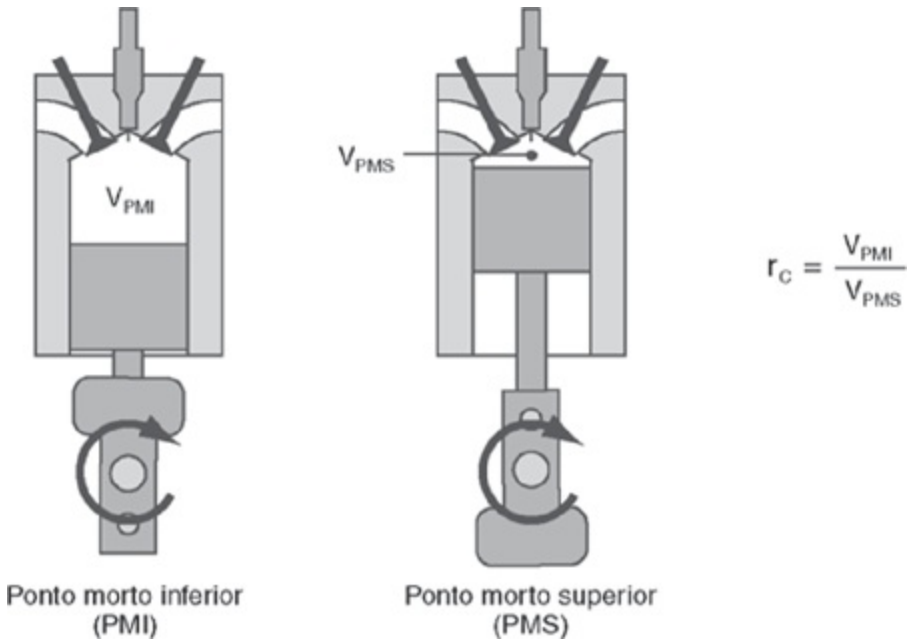


Figura 4.20 Razão de compressão.

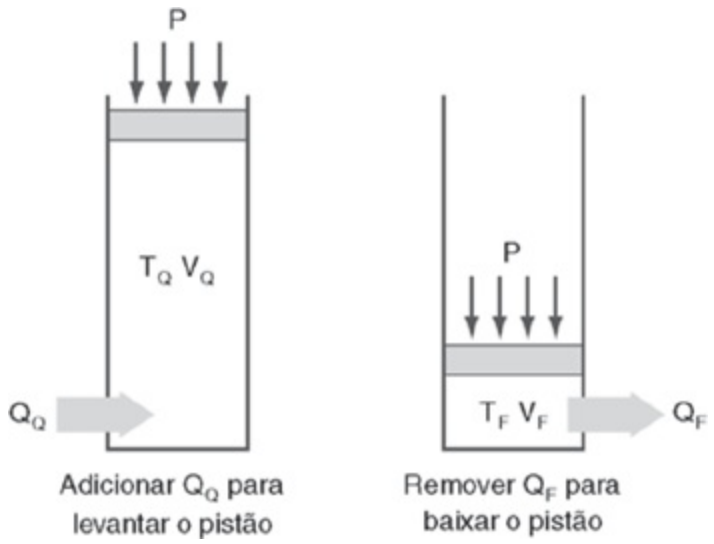


Figura 4.21 Um pistão e um cilindro como uma máquina térmica ideal.

A eficiência η desta máquina ideal é igual à razão entre o trabalho realizado e a energia consumida:

$$\eta = \frac{W}{Q_Q}$$

De acordo com a Lei de Conservação da Energia, o trabalho realizado pelo motor é igual à diferença entre o calor adicionado e o calor removido:

$$W = Q_Q - Q_F$$

e, portanto,

$$\eta = \frac{Q_Q - Q_F}{Q_Q} \qquad (4.9)$$

Em seguida, precisamos relacionar a quantidade de calor acrescentado ou removido à variação de temperatura do gás. A quantidade de calor necessária para produzir uma dada variação de temperatura varia de material para material. Assim, por exemplo, para fazer a temperatura de 1 kg de água aumentar de 1 kelvin são necessários 4186 joules, mas para fazer a temperatura de 1 kg de mercúrio aumentar de 1 kelvin são necessários apenas 0,140 joule. A

quantidade de calor por unidade de massa necessária para fazer a temperatura aumentar de um grau é chamada de *calor específico* e representada pela letra *C*; a unidade no SI é o joule por quilograma-kelvin (J/kg · K). Assim,

Calor × calor específico × massa × variação de temperatura

$$Q = Cm\Delta T \tag{4.10}$$

O calor específico varia com a temperatura e com o estado da substância; o calor específico do gelo, por exemplo, é aproximadamente duas vezes menor que o da água. No caso do ar, o calor específico a pressão constante C_p varia de 1,0 a 1,1 kJ/kg · K na faixa de temperatura de 0 a 500°C. Supondo que C_p é aproximadamente constante, uma combinação das equações (4.9) e (4.10) nos dá

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{C_p T_Q - C_p T_F}{C_p T_Q} \\ &= \frac{T_Q - T_F}{T_Q} \\ &= 1 - \frac{T_F}{T_Q}\end{aligned} \tag{4.11}$$

Observe que este resultado é equivalente à eficiência de Carnot: a eficiência é limitada pela diferença entre a temperatura máxima e a temperatura mínima atingida pelo ar no interior do cilindro. Podemos levar a análise um passo adiante e expressar o resultado em termos da razão de compressão r_c aplicando a Lei dos Gases Ideais. Como a pressão do gás é constante, temos:

$$\frac{T_F}{T_Q} = \frac{V_F}{V_Q} = \frac{1}{r_c}$$

Substituindo este resultado na Equação (4.11), obtemos a eficiência da máquina em termos da razão de compressão:

$$\eta = 1 - \frac{1}{r_c} \qquad (4.12)$$

De acordo com a Equação (4.12), no caso de uma máquina térmica ideal, quanto maior a razão de compressão r_c, maior a eficiência. Como, porém, a eficiência de uma máquina térmica ideal se compara com a de um motor de quatro tempos funcionando de acordo com o ciclo de Otto? Na máquina ideal, o combustível é queimado lentamente, a temperatura do gás aumenta devagar e a pressão no interior do cilindro permanece constante, enquanto em um motor de verdade a queima do combustível é quase instantânea. Como mostra a Figura 4.22, na máquina ideal, a pressão do gás e a força que ele exerce sobre o pistão permanecem constantes enquanto o pistão se desloca ao longo do cilindro. Assim, a quantidade de trabalho realizada pelo gás é a mesma, do início ao fim do movimento. Nos motores de verdade, porém, a pressão do gás aumenta rapidamente quando o combustível se inflama; portanto, a força exercida sobre o pistão é maior no início do movimento. Isso significa que o motor realiza mais trabalho no início do movimento que no final. Qualquer que seja a velocidade de queima do combustível, porém, o motor realiza o mesmo trabalho total para uma dada quantidade de calor. Isso significa que a eficiência ainda é maior para altas taxas de compressão, embora a fórmula usada para calculá-la seja mais complicada que a Equação (4.12) e dependa do calor específico do gás que existe no interior do cilindro após a combustão.

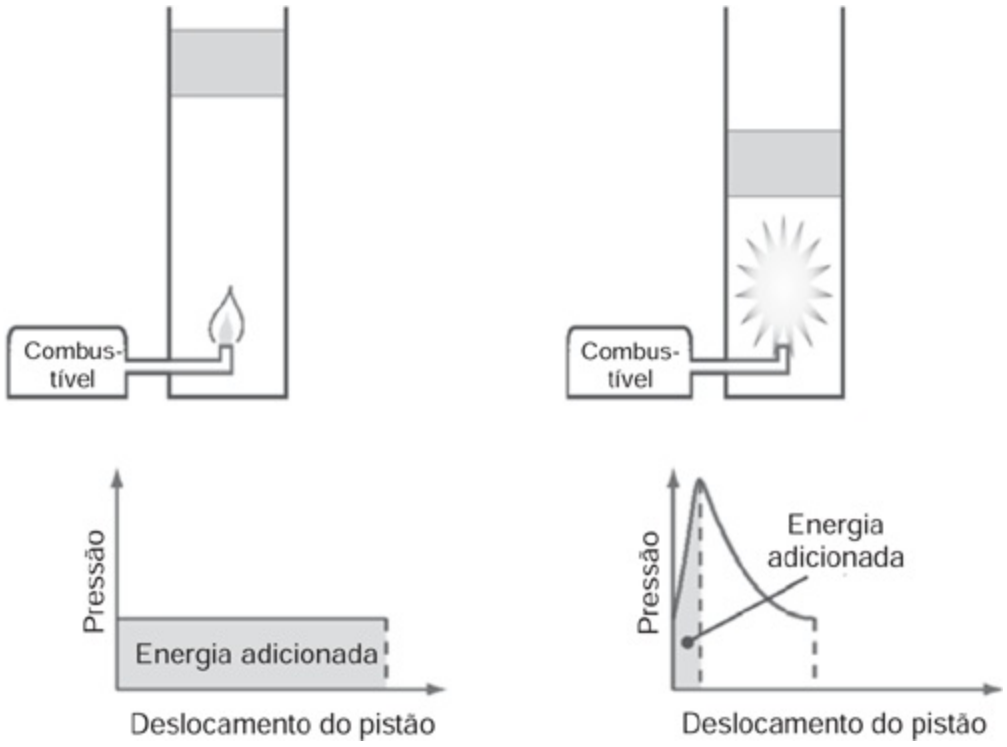


Figura 4.22 Na máquina térmica ideal, o calor é adicionado lentamente e o pistão se move a pressão constante, enquanto no motor de verdade o calor é adicionado bruscamente, provocando um pico de pressão, quando o combustível é inflamado.

4.9 EXEMPLO DE PROJETO: A BOMBA MANUAL

Nesta seção, vamos examinar o projeto de uma bomba manual, iniciado no Capítulo 2, como outro exemplo de problema que envolve os conceitos de êmbolo, cilindro, força, pressão, trabalho e eficiência. Como observamos no Capítulo 2, as crianças são frequentemente responsáveis pela coleta de água nas comunidades pobres, de modo que a bomba manual deve ser projetada para que uma criança possa operá-la. Assim, vamos formular o problema da seguinte forma:

> Projetar o sistema de alavanca de uma bomba manual para um poço profundo que possa ser operada por uma criança. Suponha que a água pode estar a até 50 m de profundidade e que o cilindro da bomba tem 50 mm de diâmetro.

Este exemplo é deliberadamente prolixo para demonstrar melhor a

estratégia de solução de problemas apresentada no Capítulo 3. Primeiro definimos o problema em termos mais precisos; em seguida, formulamos um plano para resolvê-lo; finalmente, executamos o plano.

4.9.1 Definição do Problema e Plano de Ataque

As três primeiras etapas de nossa estratégia para resolver problemas consistem em *definir* o problema, *explorar* possíveis abordagens e *planejar* um meio de resolvê-lo.

Definir A primeira etapa para resolver o problema é defini-lo mais claramente. Em geral, isso significa identificar os parâmetros conhecidos e desconhecidos, enunciar o problema em termos precisos e desenhar alguns diagramas simples.

Parâmetros Conhecidos e Desconhecidos Uma bomba é uma máquina que usa uma diferença de pressão entre a entrada e a saída para movimentar um fluido. Podemos pensar em uma bomba de êmbolo como algo como um motor de pistão funcionando ao contrário: quando o êmbolo é levantado, a pressão no interior do cilindro diminui, sugando água para o seu interior. Na Seção 2.4.2 e na Figura 2.47, descrevemos duas configurações diferentes para uma bomba manual. Na *bomba de sucção para poços rasos*, o cilindro é instalado acima do solo. Na *bomba para poços profundos*, o cilindro fica no fundo do poço, na extremidade do cano de água. As bombas de sucção são mais fáceis de instalar e de manter, mas só funcionam em poços com até aproximadamente 10 m de profundidade. Como neste problema a profundidade do poço pode chegar a 50 m, vamos precisar de uma bomba para poços profundos.

Para operar a bomba, uma criança precisa aplicar ao braço da bomba força suficiente para levantar o êmbolo. Como o êmbolo de uma bomba para poços profundos está situado abaixo de uma coluna

de água com até 50 m de altura, a força a que está sujeito pode ser relativamente elevada; portanto, o sistema de alavanca deve exercer um considerável efeito multiplicador. O que não sabemos de antemão, e precisamos determinar, são alguns detalhes importantes a respeito da bomba manual e o ambiente em que ela se encontra. Mais especificamente, devemos responder às seguintes perguntas:

- Qual é a força necessária para levantar o êmbolo?
- Qual é a força que uma criança é capaz de aplicar ao braço de uma bomba? Qual é o deslocamento máximo que uma criança é capaz de imprimir ao braço de uma bomba?
- Qual deve ser o efeito multiplicativo do sistema de alavanca para permitir que uma criança levante o pistão?
- Qual será a quantidade de água extraída a cada movimento completo do braço?

Desenhe um Diagrama e Defina as Variáveis A Figura 4.23 mostra as principais variáveis do problema da bomba, que também aparecem na Tabela 4.1. O braço da bomba é mostrado como uma alavanca articulada. L_1 e L_2 são variáveis de projeto que representam, respectivamente, o comprimento do braço maior e o comprimento do braço menor da alavanca. F é a força que uma criança é capaz de aplicar ao braço maior da alavanca e d_1 é o deslocamento máximo que a criança é capaz de imprimir ao braço, para cima e para baixo. Vamos considerar esses dois valores como variáveis do ambiente, já que a capacidade do operador pode ser considerada como parte do ambiente. A variável auxiliar d_2 é o deslocamento do braço menor da alavanca quando o braço maior é deslocado de uma distância d_1.

W é o peso total que o braço da bomba deve levantar, ou seja, a soma da forças necessárias para levantar a água e as peças da bomba. W é uma variável comportamental porque seu valor depende dos valores de outras variáveis. Uma delas é a profundidade do poço, h,

que é uma variável ambiental porque depende da localização do poço. O peso W também depende do raio do êmbolo, que é igual ao raio do cilindro, r_{cilindro}. Nesse caso, trata-se de variáveis de projeto, já que podemos escolher seus valores.

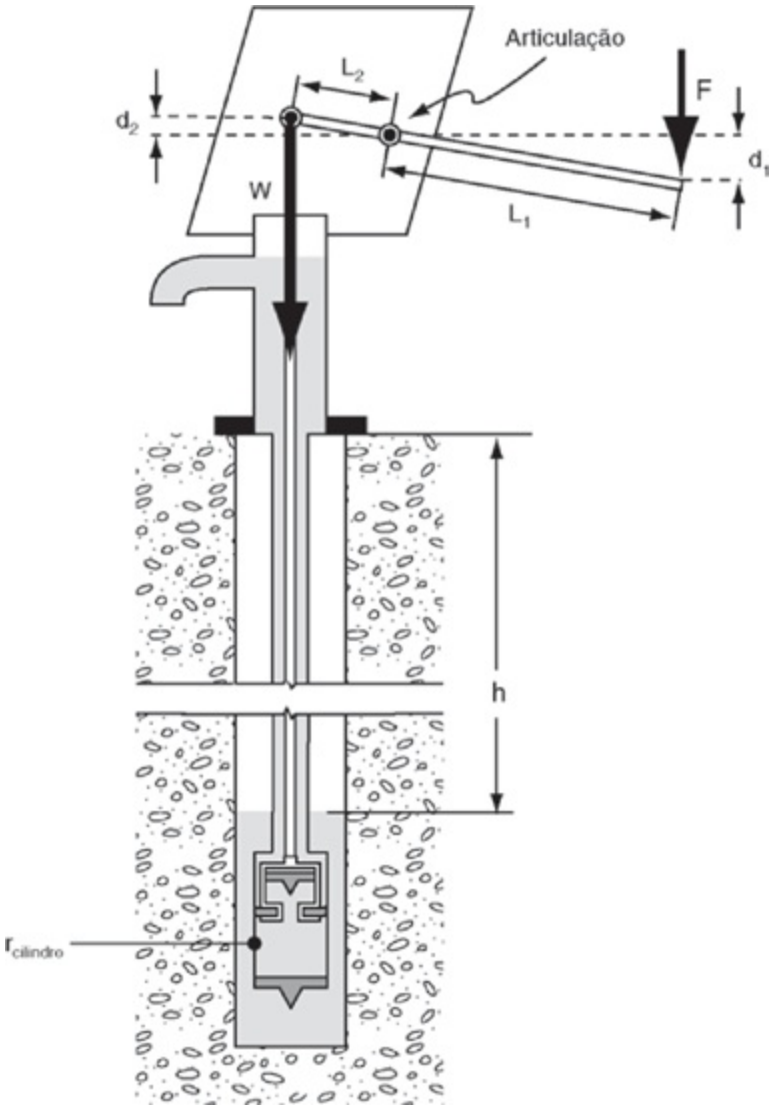


Figura 4.23 Esquema de uma bomba para poços profundos.

Formule o Problema em Termos Mais Precisos Uma vez definidas essas variáveis, o problema pode ser formulado como a seguir:

> Determine os comprimentos L_1 e L_2 do braço de uma bomba para poços profundos, supondo que a profundidade máxima h do poço é de 50 m e o

raio do cilindro r_{cilindro} é de 25 mm. Suponha que uma criança pode aplicar uma força F ao braço da bomba e deslocá-lo de uma distância d_1. Como parte da análise, estime o volume da água extraída a cada movimento do braço.

TABELA 4.1 Variáveis do projeto de uma bomba manual

Variável	Descrição	Tipo
W	Peso na extremidade do braço	Comportamental
F	Força que uma criança consegue aplicar ao braço	Ambiental
L_1	Distância de uma extremidade do braço à articulação (fulcro)	De projeto
L_2	Distância da outra extremidade do braço à articulação	De projeto
d_1	Deslocamento que uma criança consegue imprimir ao braço	Ambiental
d_2	Deslocamento da outra extremidade do braço	Comportamental
h	Distância do solo até a água (profundidade do poço)	Ambiental
r_{cilindro}	Raio do cilindro da bomba	Ambiental

Explorar A parte de “explorar” é a etapa de pré-planejamento na qual verificamos se o problema faz sentido, anotamos quais são as suposições que precisam ser feitas, identificamos conceitos importantes e possíveis abordagens, e avaliamos o nível de entendimento necessário para resolver o problema.

Suposições Em geral, fazemos suposições quando partes do problema não estão claras ou quando queremos simplificar a análise. Para resolver o problema da bomba manual, temos que fazer suposições dos dois tipos.

Capacidade do Operador Uma questão importante a ser

considerada no projeto da bomba é a seguinte: Uma criança será capaz de operá-la? Mais especificamente, identificamos duas variáveis ambientais, F e d_1, que são a força que uma criança é capaz de aplicar ao braço e o deslocamento que ela é capaz de imprimir ao braço. Não está claro, porém, qual é o valor que deve ser atribuído a essas variáveis. Naturalmente, a capacidade de operar a bomba varia de criança para criança, dependendo de fatores como idade, altura e peso. Vamos supor que uma criança seja capaz de aplicar pelo menos 50 N de força ao cabo da bomba e deslocá-lo de 1 m.

Cálculo da Força Necessária Vamos fazer uma segunda série de suposições para simplificar o cálculo da carga W que a bomba precisa levantar. Como já foi dito, esta carga inclui o peso da água e do equipamento. É claro que temos interesse em minimizar o peso do equipamento para que a maior parte da energia do operador seja usada para levantar a água e não as peças da bomba. Sem um conhecimento mais detalhado da bomba (que não podemos ter, já que ainda estamos nos primeiros estágios do projeto), é difícil estimar o peso do equipamento. Em vez disso, vamos supor que a força resultante da pressão que a água exerce sobre o êmbolo seja muito maior que o peso do equipamento, e basear nossa estimativa de W apenas na pressão da água. Mais tarde, vamos verificar de que forma essas suposições afetam o projeto geral da bomba.

Quais São os Conceitos Mais Importantes e as Abordagens Possíveis? O conceito mais importante para resolver este problema é construir modelos para um sistema e usá-los para chegar a uma decisão. Os modelos envolvem vários conceitos físicos, que são enumerados a seguir.

- Teremos que aplicar os conceitos de **massa**, **volume**, **massa específica** e **pressão** para calcular a força exercida sobre o pistão.

- Teremos que usar o conceito de **alavanca** para determinar as dimensões dos dois trechos do cabo.
- Para calcular o volume da água extraída a cada movimento do braço, teremos que calcular a **eficiência** da bomba, que envolve o conceito de **trabalho**.

Que Nível de Entendimento É Necessário? Como problema de projeto, o problema da bomba exige entendimento em todos os níveis. Embora os conceitos envolvidos não sejam, isoladamente, muito complexos, o problema é difícil porque envolve a conjugação de muitos conceitos e um alto nível de entendimento. Mais especificamente, os principais níveis de entendimento envolvidos são os seguintes:

- **aplicação** dos princípios físicos mencionados acima;
- **análise** da bomba, para dividi-la em partes;
- **síntese** de modelos e de um plano para utilizá-los;
- **avaliação** para interpretar os resultados dos modelos e escolher o projeto definitivo.

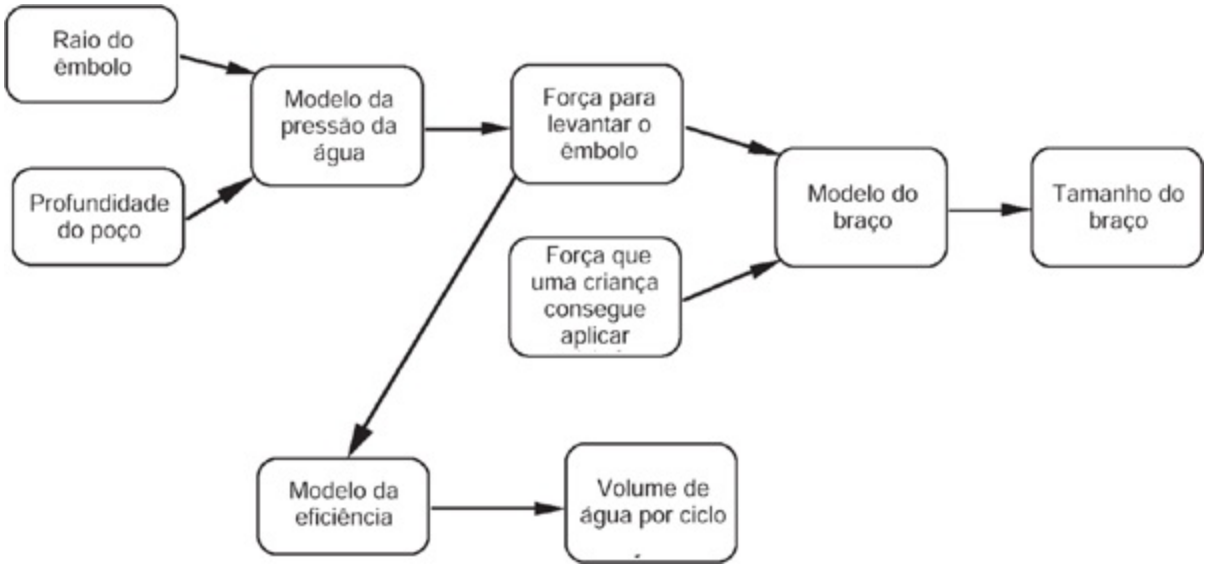


Figura 4.24 Mapa conceitual da primeira versão de um plano para projetar uma bomba manual.

Planejar Depois de examinar os aspectos principais do projeto de uma bomba manual, estamos prontos para formular um plano detalhado para executar o projeto.

A Figura 4.24 mostra a primeira versão de um plano para usar modelos para projetar a bomba. Em primeiro lugar, vamos criar um modelo para as forças que agem sobre o êmbolo com base na profundidade do poço e no raio do êmbolo. Em seguida, vamos criar um modelo para o braço e, a partir do peso da coluna de água e da força que uma criança consegue aplicar ao braço da bomba, vamos calcular as dimensões das duas partes do braço. Finalmente, vamos criar um modelo para a eficiência da bomba, e, a partir do peso da coluna de água, vamos calcular o volume da água extraída a cada movimento do cabo.

4.9.2 Modelagem das Forças que Agem sobre o Êmbolo

Nossa primeira tarefa é criar um modelo para a força *W* necessária para levantar o êmbolo em termos da profundidade do poço e do raio do êmbolo, ou do cilindro. A Figura 4.25 mostra as forças que agem sobre o êmbolo, e a Tabela 4.2 define as variáveis do modelo. Como se pode ver na figura, o cilindro de uma bomba para poços profundos está totalmente submerso, no fundo do poço, e o cano que liga o cilindro à superfície está cheio d’água.

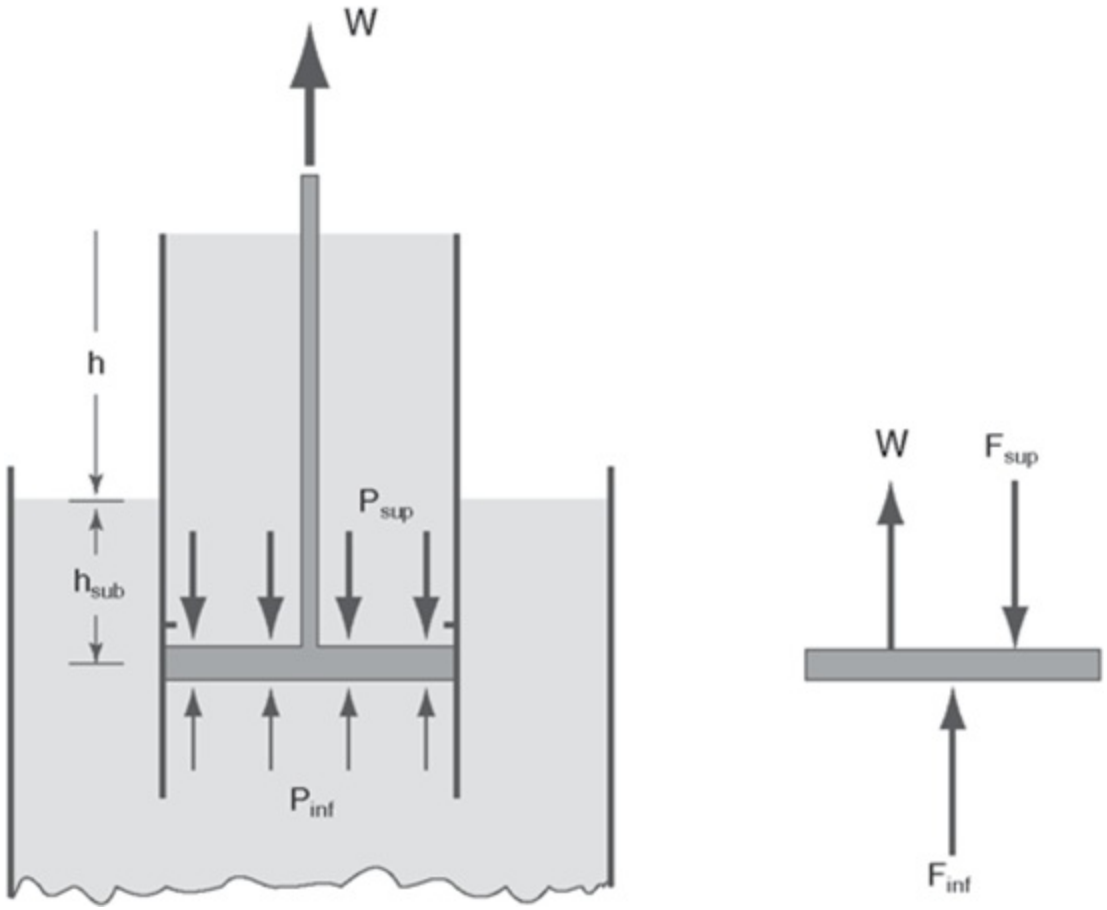


Figura 4.25 Forças que agem sobre o êmbolo.

TABELA 4.2 Variáveis do modelo das forças que agem sobre o pistão

Variável	Descrição
h	Distância entre o solo e a água
h_{sub}	Parte submersa do êmbolo
P_{sup}	Pressão da água na superfície superior do êmbolo
P_{inf}	Pressão da água na superfície inferior do êmbolo
F_{sup}	Força sobre a superfície superior do êmbolo (produzida por P_{sup})
F_{inf}	Força sobre a superfície inferior do êmbolo (produzida por P_{inf})
$r_{cilindro}$	Raio do cilindro
ρ	Massa específica da água
g	Aceleração da gravidade

Como vimos na Seção 4.4.1, a pressão a que é submetido um objeto imerso em um fluido é dada por

$$\text{Pressão} = (\text{massa específica do fluido}) \times g \times (\text{profundidade})$$

Assim, a pressão que age sobre o lado de cima do êmbolo é

$$P_{\text{sup}} = \rho g(h + h_{\text{sub}})$$

enquanto a pressão que age sobre o lado de baixo do êmbolo é

$$P_{\text{inf}} = \rho g(h_{\text{sub}})$$

As forças que agem sobre os dois lados do êmbolo são iguais às pressões multiplicadas pela área do êmbolo:

$$\begin{aligned} F_{\text{sup}} &= P_{\text{sup}}\,(\pi r^2_{\text{cilindro}}) \\ &= \rho g(h + h_{\text{sub}})(\pi r^2_{\text{cilindro}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\text{inf}} &= P_{\text{inf}}\,(\pi r^2_{\text{cilindro}}) \\ &= \rho g(h_{\text{sub}})(\pi r^2_{\text{cilindro}}) \end{aligned}$$

Finalmente, a força W necessária para levantar o êmbolo é igual à diferença das duas forças:

$$\begin{aligned} W &= F_{\text{sup}} - F_{\text{inf}} \\ &= \rho g[(h + h_{\text{sub}}) - h_{\text{sub}}](\pi r^2_{\text{cilindro}}) \\ &= \rho g h(\pi r^2_{\text{cilindro}}) \end{aligned}$$

Usando este modelo, podemos agora calcular a força W necessária para levantar o êmbolo, supondo que o diâmetro do cilindro é de 50 mm e a profundidade do poço é de 50 m.

$$\begin{aligned} W &= \rho g h(\pi r^2_{\text{cilindro}}) \\ &= 1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 50\,\text{m} \times 3{,}14 \times (0{,}025\,\text{m})^2 \\ &= 963\,\text{N} \end{aligned}$$

A força necessária para levantar o êmbolo é, portanto, 963 N. Vamos arredondar esse valor para 1000 N no projeto do cabo da bomba.

Antes de deixar o modelo da força que age sobre o êmbolo, é preciso fazer uma observação importante. Na Figura 4.25, mostramos o cano com o mesmo diâmetro que o cilindro da bomba, enquanto, na Figura 4.23, o cano era mais estreito que o cilindro. Qual é o efeito do diâmetro do cano na força que age sobre o êmbolo? Para responder a esta pergunta, considere os dois casos da Figura 4.26. No caso da esquerda, um cano de raio r está ligado a um cilindro de mesmo raio. Como sabemos, a pressão P aumenta com a profundidade, segundo a equação $P = \rho gh$. A força total sobre o êmbolo é dada pela pressão multiplicada pela área:

$$F_1 = (\rho gh)(\pi r^2)$$

Considere agora o caso da direita, no qual o raio do cano é r, mas o raio do cilindro (e, portanto, do êmbolo) é $2r$. A pressão sobre o pistão continua a ser $P = \rho gh$; afinal de contas, a pressão é causada pelo peso da coluna de água acima do êmbolo, que continua o mesmo. Acontece que a pressão tem esse mesmo valor P ao longo de *toda a superfície* do êmbolo, incluindo a parte que não está diretamente abaixo do cano! Se não fosse assim, se colocássemos um pequeno objeto, como uma bolinha de gude, sobre o êmbolo, a diferença de pressão o faria rolar na direção do centro do êmbolo ou das paredes do cilindro, o que jamais acontece. Como a área do êmbolo neste caso é maior que a área do êmbolo no caso anterior, a força que age sobre o êmbolo também é maior:

$$\begin{aligned} F_2 &= (\rho gh)(4\pi r^2) \\ &= 4F_1 \end{aligned}$$

Assim, a força que age sobre o êmbolo é determinada pelo comprimento do cano e pela área do êmbolo, mas *o raio do cano não faz diferença.*

O curioso neste resultado é que, enquanto a força que age sobre o

êmbolo no primeiro caso é igual ao peso da água, a força que age sobre o êmbolo no segundo caso é quatro vezes maior que o peso da água! Em outras palavras, ao multiplicarmos a área do êmbolo por um certo fator, multiplicamos a força que age sobre o êmbolo pelo mesmo fator, seja qual for a área do cano, supondo que o comprimento permaneça o mesmo. Se parece estranho que possamos mudar a força que age sobre o êmbolo mudando sua área e mantendo fixo o peso da água no cano, pense que isso é tão estranho quanto mudar a força que age sobre a extremidade do braço de uma alavanca mudando a posição do fulcro, ou mudar a força que age sobre a ponta de uma corda usando uma roldana. Na verdade, a ideia de mudar uma força mudando a área de um êmbolo está por trás de toda uma família de *máquinas hidráulicas*, um assunto ao qual voltaremos nos problemas do final do capítulo.

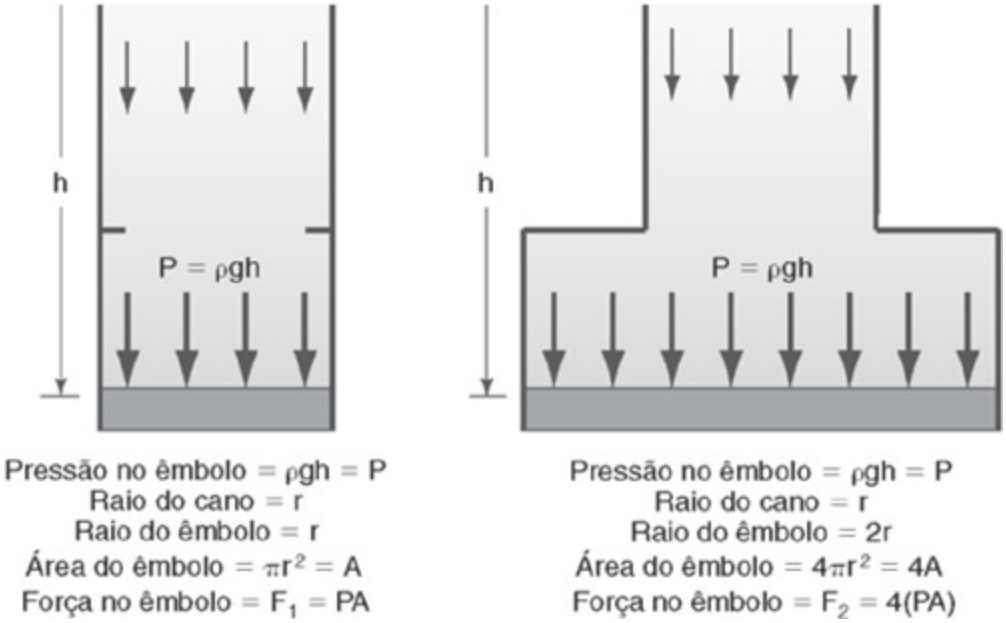


Figura 4.26 A pressão que a água do cano da bomba exerce sobre o êmbolo depende do comprimento do cano, mas não do raio. A pressão é uniforme ao longo da superfície do êmbolo. A força exercida sobre o êmbolo é proporcional à pressão e à área do êmbolo.

4.9.3 Modelagem do Braço da Bomba

Agora que estimamos o peso da coluna de água, vamos passar ao projeto do braço da bomba. Como de costume, primeiro vamos definir as variáveis e depois escrever as equações do modelo.

Definição das Variáveis A Figura 4.27 mostra um diagrama esquemático do braço da bomba que ilustra as variáveis do problema, definidas na Tabela 4.3. A esta altura, não existem variáveis "conhecidas", mas devemos supor que a carga da bomba pode chegar a 1000 N. A força que uma criança consegue aplicar ao braço e o deslocamento que ela é capaz de imprimir ao braço são variáveis ambientais cujos valores ainda não conhecemos. Essas variáveis serão consideradas mais tarde, depois que formularmos o modelo. As variáveis de projeto são as dimensões do braço dos dois lados do fulcro, L_1 e L_2. Definimos a *vantagem mecânica*, R, do braço como a razão dos dois comprimentos:

$$R = \frac{L_1}{L_2} \tag{4.13}$$

Criação do Modelo De acordo com a Equação (4.3), o braço da bomba estará em equilíbrio se

$$\text{Condição de equilíbrio do braço: } FL_1 = WL_2 \tag{4.14}$$

De acordo com esta relação, e usando a expressão da vantagem mecânica dada pela Equação (4.13), podemos expressar o peso W que o braço é capaz de levantar em função da vantagem mecânica R e da força aplicada F:

$$\begin{aligned} W &= W(R, F) = RF \\ R &= \frac{W}{F} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Um segundo aspecto do modelo do braço da bomba é a relação entre a distância d_1 percorrida pela extremidade do braço e a

distância d_2 percorrida pela coluna de água. Usando a semelhança dos triângulos da Figura 4.27, temos:

$$R = \frac{L_1}{L_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

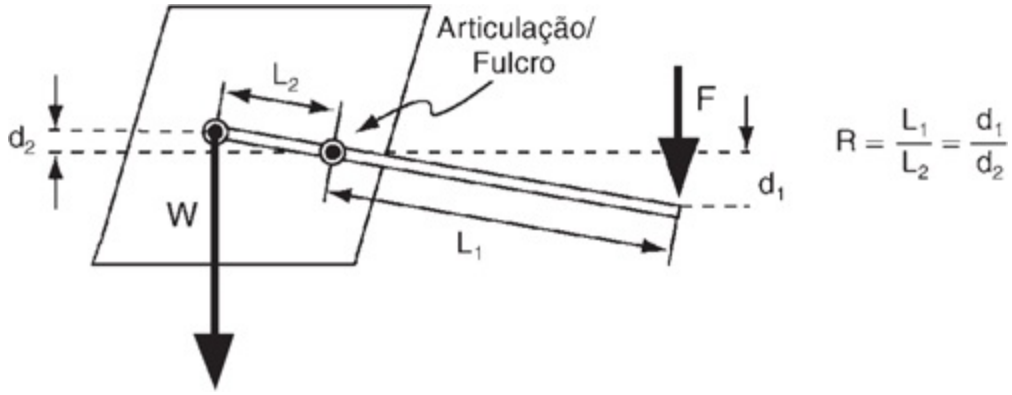


Figura 4.27 Variáveis do modelo do braço da bomba.

TABELA 4.3 Variáveis do modelo do braço da bomba

Variável	Descrição	Valor
W	Peso da carga	Até 1000 N (variável comportamental)
F	Força que uma criança consegue aplicar ao braço	Pelo menos 50 N (variável ambiental)
R	Vantagem mecânica	Desconhecido (variável de projeto)
L_1	Distância entre a extremidade do braço e a articulação (fulcro)	Desconhecido (variável de projeto)
L_2	Distância entre a outra extremidade do braço e a articulação	Desconhecido (variável de projeto)
d_1	Deslocamento que uma criança consegue imprimir ao braço	Pelo menos 1 m (variável ambiental)
d_2	Deslocamento da outra extremidade do braço	Desconhecido (variável comportamental)

Assim,

$$d_2 = \frac{d_1}{R} \tag{4.16}$$

Escolha das Dimensões do Braço Uma vez criados os modelos da coluna de água e do braço da bomba, podemos iniciar o projeto propriamente dito. Para isso, devemos determinar os valores de algumas variáveis que ainda são desconhecidos.

Começamos por definir o peso da carga. De acordo com o modelo da coluna de água em uma bomba para poços profundos, 1000 N é um valor razoável, já que assegura que a bomba será capaz de extrair água de uma profundidade de 50 m usando um cilindro com 25 mm de raio. Em seguida, consideramos a força que uma criança consegue aplicar ao braço da bomba, que estimamos como sendo da ordem de 50 N. Isso nos dá duas restrições para o projeto do braço:

$$\text{Restrição de peso: } = W \geq 1000 \text{ N}$$

$$\text{Restrição da força aplicada: } = F \geq 50 \text{ N}$$

Observe que as duas restrições estão expressas na forma de desigualdades do tipo “maior que ou igual a”. Isso significa que podemos usar projetos em que a bomba é capaz de levantar mais de 1000 N e projetos em que o operador pode exercer uma força maior que 50 N, mas esses valores mínimos têm que ser respeitados. Assim, de acordo com a Equação (4.15),

$$\begin{aligned} R &= \frac{W}{F} \\ &= \frac{1000}{50} \\ &= 20 \end{aligned}$$

Uma vez conhecido o valor da vantagem mecânica, $R = 20$, o passo final consiste em escolher valores para as dimensões do braço dos dois lados do fulcro, L_1 e L_2. A essa altura, a única restrição é que a razão L_1/L_2 deve ser igual a R. Para definir melhor o problema, precisamos fazer suposições adicionais ou estabelecer novas

restrições. Dois fatores que devem ser levados em conta na hora de escolher as dimensões são os seguintes:

- gostaríamos de maximizar a quantidade de água extraída do poço a cada movimento do braço;
- o braço deve ser compacto, na medida do possível.

Vamos supor que a haste da bomba está presa a uma das extremidades do braço por um mecanismo tal que a coluna de água sobe de uma distância d_2 quando a outra extremidade do braço é baixada de uma distância d_1. Embora possa parecer, à primeira vista, que é possível aumentar d_2 aumentando os comprimentos L_1 e L_2 do braço da bomba, isso não é necessariamente verdade. De acordo com a Equação (4.16), d_2 depende apenas de d_1 e R. Na verdade, como mostra a Figura 4.28, a menos que a parte mais curta do braço seja menor que a altura do fulcro, d_1 e d_2 são limitadas pela altura do fulcro e não pelo comprimento do braço. Assim, se o objetivo é que o braço seja compacto, não faz sentido escolher para L_1 um comprimento muito maior que a altura do fulcro. Supondo que o deslocamento máximo d_1 que uma criança consegue imprimir ao braço é 1 m, podemos escolher para L_1 um comprimento um pouco maior, 1,5 m, caso em que

$$L_2 = \frac{L_1}{R} = 7{,}5\,\text{cm}$$
$$d_2 = \frac{d_1}{R} = 5\,\text{cm}$$

A Tabela 4.4 mostra os valores das variáveis associadas ao braço da bomba.

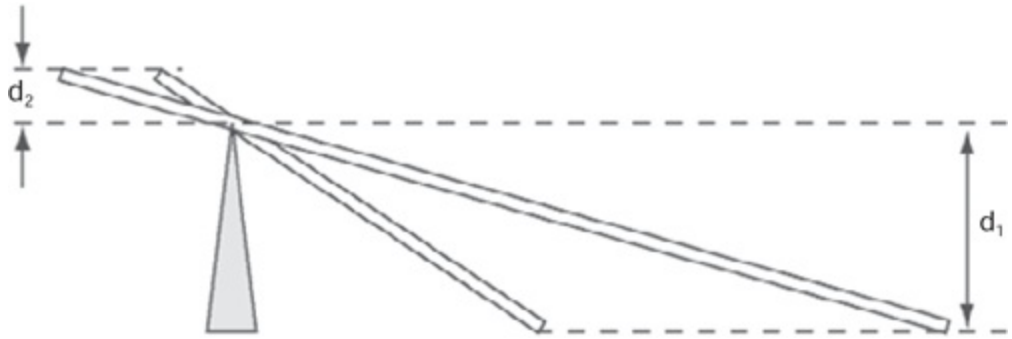


Figura 4.28 Diagrama para mostrar que a distância d_2 é limitada pela altura do fulcro e não depende do comprimento do braço. Os dois braços mostrados na figura, de comprimentos diferentes, têm a mesma vantagem mecânica *R*.

TABELA 4.4 Valores finais das variáveis associadas ao braço da bomba

Variável	Descrição	Valor
W	Peso da carga	Até 1000
F	Força que uma criança consegue aplicar ao braço	Pelo menos 50 N
R	Vantagem mecânica	20
L_1	Distância entre a extremidade do braço à articulação (fulcro)	1,5 m
L_2	Distância entre a outra extremidade do braço à articulação	7,5 m
d_1	Deslocamento que uma criança consegue imprimir ao braço	1 m
d_2	Deslocamento da outra extremidade do braço	5 cm

4.9.4 Modelagem da Eficiência da Bomba

Nossa última tarefa é criar um modelo para a eficiência de uma bomba manual. Como vimos anteriormente, a eficiência de uma bomba é uma medida da quantidade de água que a bomba é capaz de extrair em relação à energia gasta para fazê-la funcionar. Para fazer uma bomba funcionar, o operador realiza trabalho sobre a bomba, aplicando uma força para fazer o braço da bomba subir e descer. A

bomba, por sua vez, realiza trabalho sobre a água, fazendo-a subir a cada movimento do braço. Assim, podemos definir a eficiência de uma bomba manual, em termos matemáticos, como a razão entre o trabalho executado pela bomba para fazer a água subir e o trabalho executado por uma pessoa para operar a bomba:

$$\text{Eficiência} = \frac{\text{trabalho executado pela bomba sobre a água}}{\text{trabalho executado pelo operador sobre a bomba}}$$

Em uma bomba ideal, a eficiência seria igual a 1 e toda a energia gasta pelo operador seria usada para fazer a água subir. Na prática, porém, parte do trabalho do operador não resulta em trabalho útil. Assim, por exemplo, a cada movimento do braço para baixo, o operador precisa levantar, não só a coluna de água, mas também a haste e o êmbolo da bomba. Os atritos presentes no sistema, como o que existe entre os anéis de vedação do êmbolo e a parede do cilindro, também se somam ao trabalho que o operador deve realizar a cada ciclo. Finalmente, vazamentos no sistema reduzem a quantidade de água extraída.

Para calcular a eficiência de uma bomba, precisamos medir a quantidade de água extraída pela bomba e o trabalho executado pelo operador. Como vimos, se uma força constante de módulo F é aplicada ao longo de uma distância s, o trabalho executado é dado por

$$\text{Trabalho} = F \cdot s$$

Vamos considerar primeiro o trabalho que o operador executa sobre a bomba. Para levantar a haste da bomba, o operador empurra o braço para baixo com uma certa força, e o braço é deslocado de uma certa distância, como mostra a Figura 4.29. Quando o braço chega à extremidade inferior do seu movimento, o operador deixa o peso da água sobre o êmbolo fazer o braço voltar à posição inicial, sem realizar nenhum trabalho adicional. Assim, o trabalho executado pelo operador a cada ciclo é dado por

$$\text{Trabalho executado pelo operador sobre a bomba} = F_{\text{braço}} \cdot s_{\text{braço}} \quad (4.17)$$

Vamos agora considerar o trabalho executado pela bomba sobre a água. Durante cada ciclo, a bomba acrescenta o volume da água que está no cilindro à água do cano. Para isso, o êmbolo tem que vencer a pressão da água ao longo de toda a extensão do cilindro. Assim, o trabalho realizado pela bomba é dado por

$$\text{Trabalho executado pela bomba sobre a água} = W \cdot s_{\text{cilindro}} \quad (4.18)$$

onde W é a força exercida pela pressão da água sobre o êmbolo, e s_{cilindro} é o comprimento do cilindro. Suponha que a profundidade do poço seja h e que o raio do cilindro seja r. Nesse caso, como vimos na Seção 4.9.2, a força a que o êmbolo está submetido é dada por

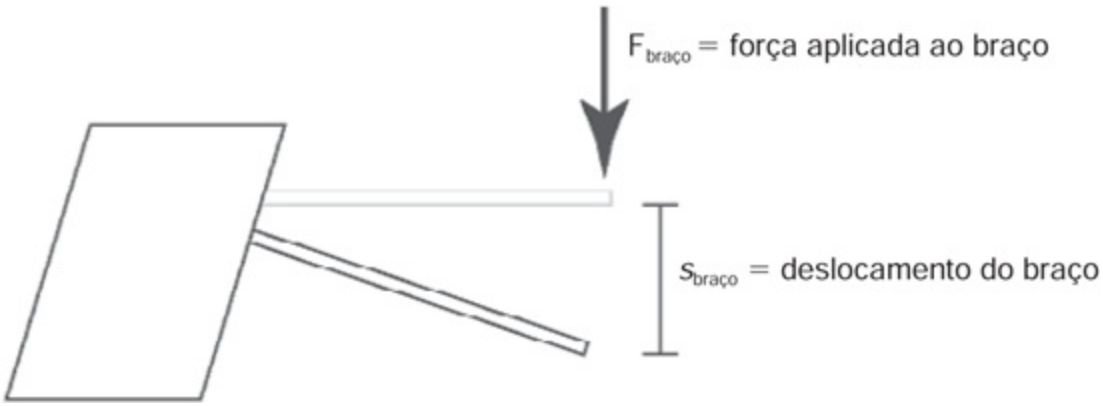


Figura 4.29 O trabalho realizado pelo operador sobre a bomba durante cada ciclo é dado por $F_{\text{braço}} \cdot s_{\text{braço}}$.

$$W = \rho g(\pi r^2 h) \quad (4.19)$$

Uma forma de determinar a distância s_{cilindro} é medir a quantidade de água extraída a cada ciclo. Como mostra a Figura 4.30, a quantidade de água extraída é igual à quantidade introduzida no cano da bomba quando o braço sobe, cujo volume é igual ao do cilindro da bomba:

$$V_{\text{extraído}} = \pi r^2 s_{\text{cilindro}}.$$

Assim,

$$s_{\text{coluna}} = \frac{V_{\text{extraído}}}{\pi r^2} \qquad (4.20)$$

Substituindo as Equações (4.19) e (4.20) na Equação (4.18), obtemos

$$\begin{aligned} &\text{Trabalho executado pela bomba sobre a água} \\ &= \rho g V_{\text{extraído}} h \\ &= W_{\text{extraído}} \cdot h \end{aligned} \qquad (4.21)$$

que é simplesmente o peso da água extraída multiplicado pela profundidade do poço. Observe que este resultado não depende do raio do cilindro. O Exemplo 4.9 ilustra o uso do modelo para determinar a eficiência de uma bomba cujos parâmetros são conhecidos.

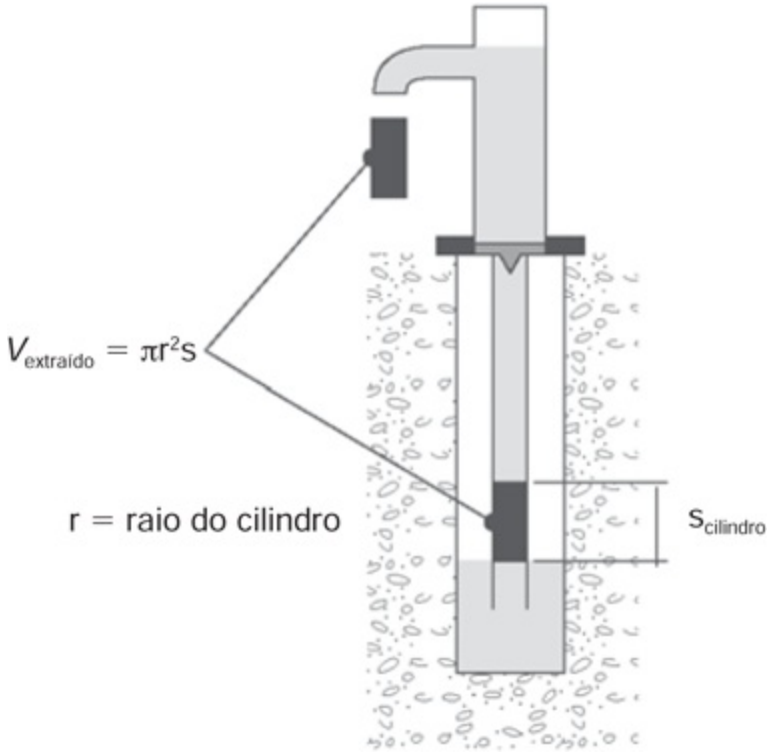


Figura 4.30 Determinação da quantidade de água extraída em função do volume do cilindro da bomba.

Exemplo 4.9 **Eficiência de uma Bomba Manual**

Uma bomba manual é usada para extrair água de um poço com 50 m de profundidade. Quando puxa o braço da bomba para baixo, uma criança aplica uma força de 50 N ao longo de uma distância de 1 m. Se 100 mL de água são extraídos a cada movimento do braço, qual é a eficiência da bomba?

Solução A eficiência da bomba é definida através da relação

$$\text{Eficiência} = \frac{\text{trabalho realizado pela bomba sobre a água}}{\text{trabalho realizado pelo operadar sobre a bomba}}$$

De acordo com a Equação (4.17),

$$\begin{aligned}\text{Trabalho realizado pelo operador sobre a bomba} &= F_{\text{braço}} \cdot s_{\text{braço}} \\ &= 60\ \text{N} \cdot 1\ \text{m} \\ &= 60\ \text{Joules}\end{aligned}$$

De acordo com a Equação (4.21),

Trabalho realizado pela bomba sobre a água $= \rho g V_{\text{extraído}} h$

$$\begin{aligned}&= \left(1\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(0{,}1\,\text{L})(50\,\text{m}) \\ &= 49\,\text{Joules}\end{aligned}$$

Assim, a eficiência é

$$\text{Eficiência} = \frac{49}{60} = 0{,}82$$

Trata-se de um valor muito bom para a eficiência de uma bomba de verdade.

PROBLEMAS

1. **Caçada na Internet**

   Desenhe um mapa conceitual que ligue (pelo menos) os conceitos da lista abaixo. Use ferramentas da Internet como Google e Wikipedia para se inspirar.

   - *vis viva*

- Thomas Young
- cálculo
- pirâmides
- tensão e deformação
- Robert Hooke
- sonda para Titã

2. Sagredo, Salviati e Simplício Discutem os Carros Híbridos

Usando o método de Galileu de apresentar vários pontos de vista, escreva uma discussão sucinta entre três pessoas que debatem os méritos dos carros híbridos. Um dos protagonistas é um cientista com uma opinião favorável, o segundo é um cientista com uma opinião desfavorável, e o terceiro é um leigo.

3. O Pêndulo Interrompido de Galileu

Explique o que aconteceria se o peso do pêndulo fosse liberado de uma altura maior que a do pino no pêndulo interrompido de Galileu.

4. Solução Alternativa do Problema da Colisão

Considere a colisão de dois corpos de mesma massa na qual um dos corpos está se movendo inicialmente para a direita com uma velocidade de 4 m/s e o outro está se movendo inicialmente para a direita com uma velocidade de 6 m/s. No Exemplo 4.3, determinamos a velocidade após a colisão usando os princípios de conservação do momento e velocidade relativa. Neste problema, determine as velocidades finais usando os princípios de conservação do momento e conservação da energia. Compare os resultados com os da solução original.

5. Colisões Totalmente Inelásticas

Já consideramos o caso de uma colisão totalmente *elástica*, em que dois corpos, após se chocarem, voltam a se separar e os

princípios de conservação do momento, conservação da energia cinética e preservação da velocidade relativa são respeitados. Neste problema, considere o caso de uma colisão totalmente inelástica, em que os dois corpos permanecem unidos após a colisão. Podemos pensar em uma colisão desse tipo como começando com dois corpos de massas m_1 e m_2 e velocidades iniciais v_1 e v_2 e terminando com um corpo único de massa $m_1 + m_2$ e velocidade final v_f.

(a) Se conhecemos as massas e velocidades dos corpos antes da colisão, de quantas equações ou leis precisamos para determinar a velocidade após a colisão? Compare a resposta com o caso de uma colisão totalmente elástica.

(b) Um corpo com 6 kg de massa e uma velocidade de 3 m/s para a direita sofre uma colisão totalmente inelástica com um corpo com 4 kg de massa e uma velocidade de 5 m/s para a direita. Depois da colisão, os corpos, agora unidos, passam a se mover para a esquerda com uma velocidade de 0,2 m/s.

i. A lei de conservação do momento é respeitada nesta colisão? Se a resposta for negativa, explique por quê.

ii. A lei de conservação da energia cinética é respeitada nesta colisão? Se a resposta for negativa, explique por quê.

6. Uma Colisão Elástica

Um corpo com 1.500 kg de massa e uma velocidade de 40 km/h se choca com um corpo estacionário com 1.800 kg de massa. Determine as velocidades dos dois corpos após a colisão, supondo que a colisão é elástica.

(a) Resolva o problema usando os princípios de velocidade relativa e de conservação do momento.

(b) Resolva o problema usando os princípios de conservação do momento e conservação da energia cinética, mas sem usar o

princípio de velocidade relativa.

7. Jogo de Dardos em um Elevador

Você está jogando dardos em um elevador que está subindo com velocidade constante. Você deve mirar no centro do alvo, em um ponto acima do centro ou em um ponto abaixo do centro? Justifique sua resposta.

8. A Bola Branca da Sinuca

Nas mesas de bilhar que não precisam de moedas para liberar as bolas, as bolas são todas do mesmo tamanho; mas nas mesas operadas por moedas, a bola branca é ligeiramente maior, para poder ser reconhecida e devolvida aos jogadores, enquanto as outras bolas ficam retidas ao serem encaçapadas.

Descreva a diferença que uma bola branca ligeiramente maior pode fazer na estratégia de jogo e nos ângulos de colisão em relação a uma bola normal (uma bola de bilhar tem 57 mm de diâmetro e pesa 156 g; uma bola branca especial tem 60 mm de diâmetro).

9. Artifícios no Projeto de Estações de Trem Urbanas

Um dos “artifícios” usados no projeto de estações de trem urbanas é construir as estações no alto de uma pequena elevação, para ajudar os trens a frear ao chegarem à estação. Supondo que um vagão de trem pesa 32.000 kg e viaja com uma velocidade máxima de 90 km/h, estime o efeito que uma elevação de 2 m terá para frear um trem de quatro vagões.

Estação do Docklands Light Railway, em Londres (esquerda), e do Sky Train, em Bangkok (direita). Cortesia de David Shallcross, da Universidade de Melbourne.

10. Tempo e Distância de Frenagem de um Freio a Disco

O sistema de freio a disco é constituído por um disco de metal preso à roda do carro e próximo de uma pastilha que faz pressão contra o disco para diminuir a velocidade de rotação da roda por atrito. Supondo que as pastilhas de freio aplicam exatamente a mesma pressão aos discos nos dois casos abaixo, em que caso o veículo levaria mais *tempo* e em que caso percorreria maior *distância* até parar?

- um caminhão de 1.800 kg a 90 km/h
- o mesmo caminhão a 60 km/h, com uma carga de 2.250 kg

11. Enchimento de uma Bola de Futebol

A pressão de uma certa bola de futebol é de 11 psi, menor que a pressão recomendada de 13 psi. A bola é bombeada rapidamente até ficar com a pressão correta. Se a bola estava inicialmente à temperatura ambiente de 20°C, e desprezando o efeito de aquecimento do pino, qual é o aumento da temperatura do ar no interior da bola?

12. Pressão em um Balão

Um balão é inflado com um gás ideal, à temperatura ambiente, até atingir pressão de 200 kPa.

(a) Qual será o novo volume do balão se a pressão for mantida constante e a temperatura for aumentada em 20%?

(b) Qual será a temperatura do gás no interior do balão se o volume for mantido constante e a pressão for aumentada em 15%?

(c) Qual será a temperatura do gás no interior do balão se a temperatura for mantida constante e o volume for reduzido em 10%?

13. Sustentando um Peso com um Êmbolo

Um objeto de 50 kg repousa sobre um êmbolo com 1 m de raio, sustentado por um colchão de ar em um cilindro.

(a) Qual é a força necessária para sustentar o objeto?

(b) Qual é a pressão do ar no interior do cilindro?

(c) Se um segundo objeto com 5 kg de massa for colocado sobre o êmbolo ao lado do primeiro e a temperatura permanecer a mesma, o que acontecerá com a altura do êmbolo?

14. Unidades de Medida

Determine as unidades das grandezas abaixo como combinações das unidades dadas. Observe que algumas unidades devem ser elevadas ao quadrado ou ao cubo para que o resultado fique correto.

(a) momento (m, kg, s)

(b) momento (N, s)

(c) força (m, kg, s)

(d) pressão (m, kg, s)

(e) pressão (N, m)

(f) momento (Pa, m, s)

15. Mais Unidades de Medida

Determine as unidades das grandezas abaixo como combinações das unidades dadas. Observe que algumas unidades devem ser elevadas ao quadrado ou ao cubo para que o resultado fique correto.

(a) energia (m, kg, s)
(b) energia (N, m)
(c) trabalho (m, kg, s)
(d) trabalho (N, m, s)

16. Energia Potencial Armazenada

Calcule a energia potencial armazenada nos sistemas a seguir.

(a) Uma coluna de água com 5 metros de altura (suponha que a água tem uma massa específica de 1.000 kg/m^3).
(b) Uma mola de constante de mola $k = 10$ kg/s^2 com um alongamento de 3 cm.
(c) 500 g de ar à temperatura e pressão ambientes, em um recipiente fechado, sofrem um aquecimento de 30 K. Suponha que a capacidade térmica do ar é $C_p = 1{,}012$ $J/(g \cdot K)$ e que a massa específica do ar à temperatura e pressão ambientes é de 1,165 kg/m^3.
(d) 500 g de ar à temperatura e pressão ambientes sofrem um aumento de pressão de 30 kPa em relação à pressão ambiente (100 kPa).

17. Usina Hidrelétrica

A saída da água de uma represa hidrelétrica está situada 50 m abaixo do nível do reservatório.

(a) Calcule a energia potencial por unidade de volume da água armazenada no reservatório da represa. Suponha que a massa específica da água é de 1.000 kg/m^3.

(b) Calcule a velocidade da água ao sair da represa.

(c) Calcule a potência fornecida pela água ao passar por uma turbina com uma vazão de 2 m^3/s.

18. Razão Ar-Combustível para o Etanol

A queima do etanol ocorre segundo a reação

$$C_2H_5OH + 3O_2 \rightarrow 2CO_2 + 3H_2O$$

(a) Determine a razão estequiométrica ar-combustível para o etanol.

(b) O etanol libera aproximadamente 27 MJ (megajoules) de energia para cada quilograma queimado, enquanto a gasolina libera aproximadamente 45 MJ/kg. Se um carro tem um consumo de combustível de 12 km/L quando funciona com gasolina, estime o consumo de combustível se o carro for abastecido com etanol.

(c) Suponha que, no tempo de admissão, um certo motor possa receber volumes iguais de misturas ar-combustível de gasolina (isooctano) ou etanol nas razões estequiométricas correspondentes. Qual dos dois combustíveis produz mais trabalho no tempo de expansão?

19. Combustão Lenta e Combustão Rápida em um Motor de Pistão

Considere duas possibilidades para a queima de combustível em um motor de pistão, a primeira em que uma dada quantidade de calor é adicionada lentamente a pressão constante, e a segunda em que o calor é adicionado rapidamente, como em uma explosão. Supondo um motor ideal sem atrito, responda às perguntas a seguir. (*Nota*: Embora este problema exija apenas alguns conceitos básicos deste capítulo, a julgar pela experiência que fiz com alguns colegas meus, acredito que se trata de um problema difícil!)

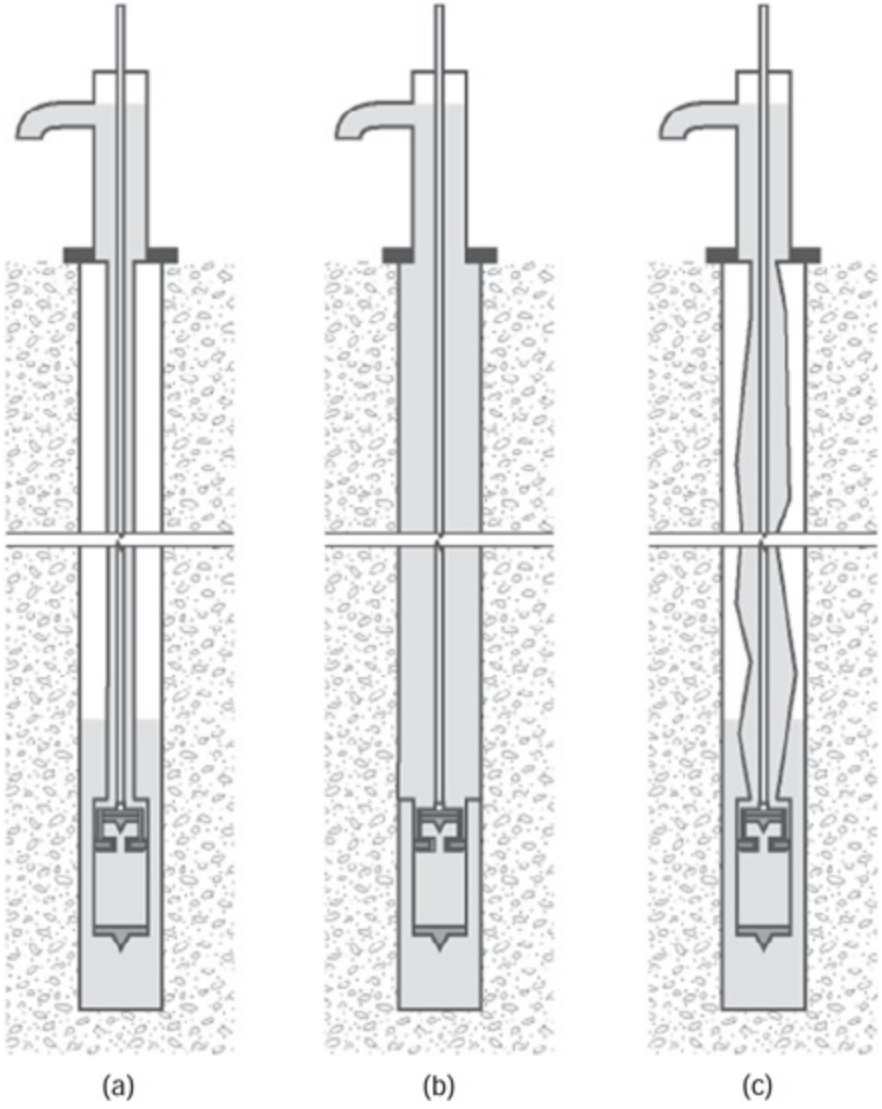
(a) Faça um gráfico aproximado da posição do pistão no cilindro em função do tempo para os dois casos.

(b) O pistão atinge a mesma altura máxima no cilindro nos dois casos? Justifique sua resposta.

(c) A pressão no cilindro ao atingir a altura máxima é a mesma nos dois casos? Justifique sua resposta.

20. Forças em Bombas

Em qual dos casos a seguir é necessário aplicar uma força maior à haste da bomba para extrair água do poço? Justifique sua resposta.



21. Pressão da Água

Uma coluna de água tem 10 m de altura e as duas extremidades estão expostas à atmosfera.

(a) Calcule a pressão na extremidade inferior da coluna de água.

(b) Calcule a velocidade com a qual a água sai da coluna. *Sugestão*: A energia cinética de uma pequena porção de água que sai da coluna deve ser igual à perda de energia cinética que uma porção de água do mesmo tamanho perde ao descer da extremidade superior para a extremidade inferior da coluna.

22. Máquinas Hidráulicas

O sistema da figura é formado por dois sistemas de êmbolo e cilindro cheios de óleo e ligados por um cano estreito. O êmbolo da esquerda tem 2 cm de diâmetro e o da direita tem 5 cm de diâmetro.

(a) Supondo que o óleo no interior do sistema é um *fluido incompressível*, ou seja, que seu volume não depende da pressão a que é submetido, qual é a distância percorrida pelo êmbolo maior quando o êmbolo menor é deslocado 1 cm para a direita? Explique quais foram as "leis da natureza" que você usou para chegar à resposta.

(b) Suponha que, para deslocar o êmbolo menor, você tenha aplicado uma força de 50 N. De acordo com os princípios de trabalho e energia, qual é o valor da força *F*?

(c) Qual é a pressão que age sobre cada um dos êmbolos na

situação do item anterior? O que é possível concluir, a partir deste resultado, a respeito da distribuição da pressão do óleo ao longo do sistema?

(d) Explique o que este problema tem a ver com o sistema de freios de um automóvel.

(e) Descreva outra aplicação de engenharia para os princípios ilustrados neste problema. Desenhe um mapa conceitual do sistema e escreva um parágrafo ou dois explicando a operação do sistema em termos dos princípios deste problema.

[1]O autor agradece ao Dr. Michael Fowler, Beams Professor of Physics da Universidade da Virgínia, pelo uso de notas do seu curso “Física 109: Galileu e Einstein” para escrever esta seção a respeito da física de Aristóteles.

[2]Foi Leibniz que criou a notação do cálculo que usamos atualmente, com um “S” estilizado (∫), do latim *summa*, para representar integração, e *d/dx* para representar derivação.

[3]Young é talvez mais conhecido pelos engenheiros modernos como o criador do *módulo de Young*, um parâmetro usado para medir a elasticidade dos sólidos. Young também aperfeiçoou a teoria ótica de Huygens e fez as primeiras traduções dos hieroglifos da Pedra de Roseta.

[4]Coriolis é mais conhecido por seus estudos de corpos em movimento de rotação; hoje usamos o chamado *efeito Coriolis* para explicar por que os furacões ou ciclones giram no sentido anti-horário no hemisfério norte e no sentido horário no hemisfério sul.

[5]Uma biografia bem documentada de Hooke, com uma discussão de seus experimentos, aparece em [Cha96].

[6]Citado em [Cha96].

[7]Como é discutido em http://www.sizes.com/units/horsepower_british.htm, existem várias versões para a história de como Watt chegou à definição de sua unidade de potência, o *horse*. Esta versão, baseada em notas do seu “Livro de Rascunho e Anotações, 1782 & 1783”, é provavelmente a correta.

[*]Ao contrário do que pode parecer à primeira vista, *horsepower* não é a mesma coisa que cavalo-vapor. 1 *horsepower* = 746 watts, enquanto 1 cavalo-vapor = 735,5 watts. (N. T.)

[8]J. B. Delambre, “Éloge de Lagrange,” *Memoires de l’Institut*, 1812, p. XIV.

CAPÍTULO 5

Análise de Dados e Modelos Empíricos

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- usar técnicas básicas matemáticas e gráficas para determinar até que ponto os dados experimentais estão de acordo com uma teoria;
- criar e utilizar um modelo empírico que ajuste uma equação a dados experimentais;
- usar conceitos elementares de probabilidade e estatística para analisar a imprecisão de dados experimentais;
- explicar o que é um estudo de engenharia e mostrar de que forma os "mapas" de um espaço de projeto podem ser usados para encontrar projetos aceitáveis.

5.1 INTRODUÇÃO

Como vimos no Capítulo 4, mesmo grandes sábios como Aristóteles e Descartes podem se enganar. Hoje, podemos afirmar com convicção que as leis de movimento de Aristóteles e Descartes estavam erradas. Podemos fazer isso porque os dados experimentais comprovam nossa afirmação. Afinal, propor uma teoria é apenas parte do processo de modelagem; a outra parte consiste em colher e analisar dados e

extrair conclusões. Mesmo no caso de uma teoria muito boa, porém, os dados colhidos no mundo real não correspondem exatamente aos valores previstos pela teoria, e a análise de dados pode ser considerada uma ciência à parte. Neste capítulo são apresentadas algumas das ferramentas matemáticas e gráficas que os cientistas e engenheiros usam para analisar dados quando estão criando e usando modelos.

Começamos o capítulo discutindo duas teorias separadas por trezentos anos – a Lei de Boyle dos gases e a Lei de Moore para a fabricação de circuitos integrados – e usamos essas teorias para demonstrar formas de testar se os dados experimentais estão de acordo com uma teoria. Em seguida, examinamos a questão da criação e uso de modelos empíricos envolvendo o uso de equações que se ajustam aos dados experimentais, mesmo que não haja uma teoria formal para justificá-las. Apresentamos também técnicas para quantificar a imprecisão de dados experimentais. Finalmente, apresentamos um método gráfico para visualizar diferentes opções de projeto.

5.2 TEORIA E DADOS

5.2.1 Validação da Lei de Boyle

Robert Boyle e Robert Hooke acreditavam que a pressão de um gás era inversamente proporcional ao volume a uma temperatura constante. Para convencer os outros cientistas de que a ideia estava correta, eles tinham que realizar o experimento e publicar os resultados. Nesta seção, vamos discutir o experimento que Boyle descreve no artigo *Novos Experimentos Físico-Mecânicos, Relativos à Mola do Ar e Seus Efeitos*, publicado em 1660 [Boy60][Wes05]. Em seguida, vamos examinar um modo mais moderno de analisar os mesmos dados, usando técnicas gráficas que ainda não tinham sido

inventadas quando Boyle publicou seus resultados.

Para testar a teoria, Boyle realizou um experimento usando um tubo em U como o da Figura 5.1. A perna mais comprida do tubo tinha quase 8 pés de comprimento e era aberta na extremidade, enquanto a perna mais curta tinha aproximadamente 1 pé de comprimento e era fechada na extremidade. No interior do tubo, Boyle havia colocado tiras de papel com marcas a cada 1/4 de polegada. Trabalhando em uma escada, Boyle despejou pela extremidade aberta do tubo comprido uma quantidade de mercúrio suficiente para encher a parte curva que ligava os dois tubos, aprisionando uma certa quantidade de ar na ponta do tubo curto. Em seguida, continuou a despejar mercúrio para que a pressão exercida pela coluna de mercúrio que se formava no tubo comprido comprimisse o ar aprisionado no tubo curto. Cada vez que o nível de mercúrio subia 1/4 de polegada no tubo curto, Boyle anotava o aumento de nível correspondente no tubo comprido, que estimava com precisão de 1/4 de divisão, ou 1/16 de polegada. Usou os resultados para construir uma tabela, parcialmente reproduzida na Tabela 5.1.

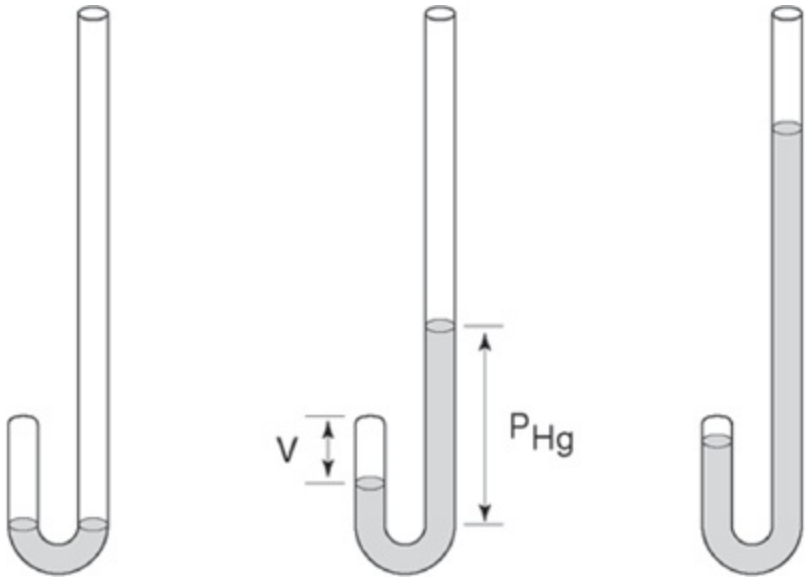


Figura 5.1 Para determinar a relação entre a pressão e o volume de um gás, Boyle despejou mercúrio em um tubo de vidro em U.

TABELA 5.1 Dados do experimento de Boyle, segundo [Boy60] e [Wes05]

A	B	C	D	E
V (polegadas de tubo)	P_{Hg} (polegadas de Hg)	P_{atm} (polegadas de Hg)	P, experimento $P_{Hg} + P_{atm}$ (polegadas de Hg)	P, teoria (polegadas de Hg)
12	0	$29\frac{1}{8}$	$29\frac{2}{16}$	$29\frac{2}{16}$
10	$6\frac{3}{16}$	$29\frac{1}{8}$	$35\frac{5}{16}$	35
8	$15\frac{1}{16}$	$29\frac{1}{8}$	$44\frac{3}{16}$	$43\frac{11}{16}$
6	$29\frac{11}{16}$	$29\frac{1}{8}$	$58\frac{3}{16}$	$58\frac{2}{8}$
5	$41\frac{9}{16}$	$29\frac{1}{8}$	$70\frac{11}{16}$	70
4	$58\frac{2}{16}$	$29\frac{1}{8}$	$87\frac{14}{16}$	$87\frac{3}{8}$
3	$88\frac{7}{16}$	$29\frac{1}{8}$	$117\frac{9}{16}$	$116\frac{4}{8}$

A coluna A da tabela de Boyle mostra a altura da coluna de ar no tubo curto. Como o diâmetro do tubo era constante, essa altura é proporcional ao volume de ar, que vamos chamar de V. A coluna B mostra a altura da coluna de mercúrio no tubo comprido. Isto corresponde à pressão exercida pelo peso do mercúrio, que vamos chamar de P_{Hg}. A pressão exercida sobre o ar retido no tubo curto é igual à soma da pressão exercida pelo mercúrio com a pressão atmosférica, P_{atm}. Usando um barômetro, Boyle determinou que a pressão atmosférica durante o seu experimento era equivalente a uma coluna de $29\frac{1}{8}$ polegadas de mercúrio, que aparece na coluna C da tabela. Assim, a pressão total P, que aparece na coluna D, em unidades de polegadas de mercúrio, é a soma das colunas B e C:

$$\begin{aligned} P &= h_{\text{Hg}} + P_{\text{atm}} \\ &= h_{\text{Hg}} + 29\frac{1}{8} \end{aligned}$$

Se V_i e P_i são os valores das colunas A e D na linha i da tabela, de acordo com a teoria de que o produto PV é constante, devemos obter:

$$P_1 V_1 = P_i V_i$$

Explicitando P_i nesta equação, obtemos a pressão teórica esperada

para um dado volume de ar, que Boyle colocou na coluna E:

$$P_i = \frac{P_1 V_1}{V_i}$$

Boyle pediu ao leitor para comparar os valores das colunas D e E e verificar com seus próprios olhos que sua teoria era capaz de prever com sucesso os resultados do experimento. Observando a tabela, vemos que a concordância realmente é bem razoável. Uma forma melhor de visualizar os resultados, porém, seria plotar os dados em um gráfico, uma técnica que ainda não era comum quando Boyle escreveu o artigo.[1] A Figura 5.2 mostra um gráfico de P em função de V construído a partir dos dados de Boyle. Observando a figura, podemos ver que existe uma excelente concordância entre os valores experimentais e teóricos de P.

Embora os valores experimentais de P estejam muito próximos da curva teórica de P em função de V, na ausência da curva teórica seria muito difícil dizer, apenas olhando para os pontos experimentais, se a variação de P com V tem a "forma" correta. Qual deve ser a forma correta? Segundo a teoria,

$$PV = k,$$

onde k é uma constante desconhecida. Se pensarmos no gráfico como uma função da forma $y = f(x)$, os dados experimentais da Figura 5.2 devem estar próximos de uma curva do tipo

$$P = f(V) = \frac{k}{V}$$

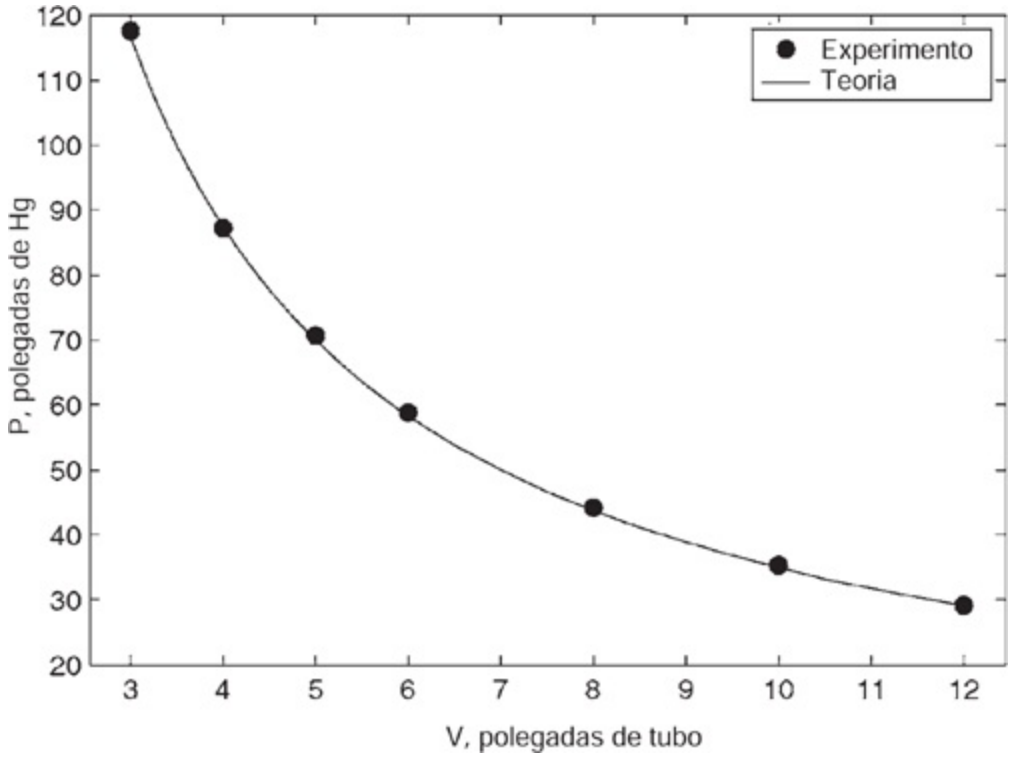


Figura 5.2 Gráfico da pressão do ar aprisionado em função do volume, de acordo com os dados experimentais de Boyle.

A função $f(x) = k/x$ não tem uma forma fácil de reconhecer. Por outro lado, podemos reconhecer com facilidade uma linha reta. Assim, se pudermos expressar os dados experimentais de uma forma tal que sejam plotados como uma linha reta se a teoria estiver correta, não teremos que fazer um gráfico teórico para ver se os dados experimentais estão de acordo com a teoria.

O gráfico de uma função é uma linha reta se puder ser expresso na forma

$$f(x) = mx + b$$

onde m é a inclinação da reta e b é a ordenada do ponto de interseção com o eixo y. No caso da lei de Boyle, é fácil transformar os dados; podemos simplesmente plotar $1/P$ em função de V em vez de P em função de V. Fazendo isso, obtemos

$$f(V) = \frac{1}{P}$$
$$= \frac{1}{k}V$$

onde a inclinação da reta que passa pelos dados é $1/k$. A Figura 5.3 mostra o gráfico obtido. Podemos calcular a inclinação da reta e a ordenada do ponto de interseção com o eixo y (que teoricamente deve ser zero) a partir de apenas dois pontos experimentais. Tomando os dois pontos extremos da reta como (x_1, y_1) e (x_2, y_2), a inclinação é dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{0{,}034 - 0{,}009}{12 - 3}$$
$$= 2{,}87 \times 10^{-3}$$

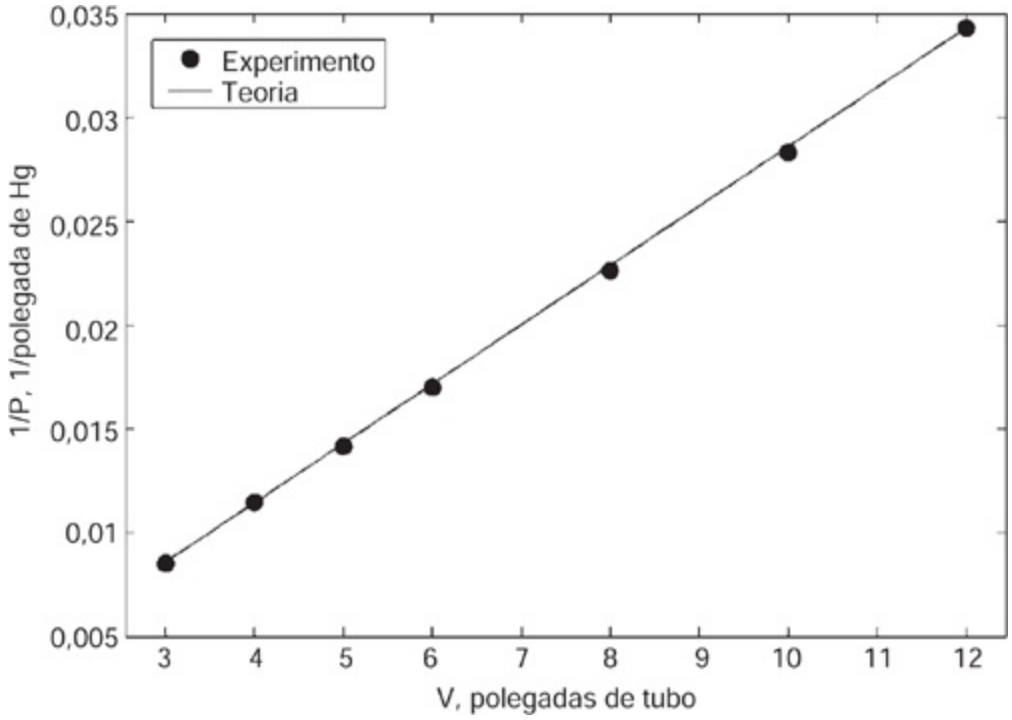


Figura 5.3 Plotando os dados de Boyle como $1/P$ em função de V, obtemos uma linha reta.

Como a inclinação da reta é $1/k$,

$$k = \frac{1}{m}$$
$$= 349$$

Podemos agora determinar o ponto de interseção a partir da inclinação e de um ponto experimental. Usando o ponto da extremidade esquerda, (x_1, y_1), obtemos

$$b = y_1 - mx_1$$
$$= 0{,}009 - (0{,}00287)(3)$$
$$= 0{,}00039$$

que está muito próximo de zero.

5.2.2 Comportamento Exponencial, Gráficos Logarítmicos e Lei de Moore

O experimento de Boyle de comprimir o ar em um tubo em U é um bom exemplo de "linearização" de dados experimentais para verificar se estão de acordo com a teoria. A teoria previa que a pressão seria inversamente proporcional ao volume. Plotamos o inverso da pressão em função do volume para transformar a função teórica em uma linha reta. Um recurso análogo pode ser usado para transformar outras relações comuns, como $f(x) = x^2$ e $f(x) = 1/x^2$, em funções lineares. Uma forma muito frequente de relação teórica na ciência e na engenharia é o caso em que uma grandeza varia *exponencialmente* em relação a outra. Para ilustrar este caso, vamos considerar a teoria proposta em 1965 por Gordon Moore, um dos fundadores da Intel. Segundo essa teoria, o número de componentes eletrônicos chamados *transistores* em circuitos integrados de última geração iria dobrar aproximadamente a cada dois anos. A Tabela 5.2 mostra o número de transistores em vários processadores Intel fabricados entre 1971 e 2004; a Figura 5.4 mostra um gráfico com os mesmos dados. Como se pode ver na figura, a variação é claramente não-linear. Além disso, como o número de transistores varia de pouco mais de dois mil até mais de meio bilhão, os pontos experimentais para os primeiros anos

estão muito próximos do eixo *x*. Em consequência, é praticamente impossível verificar visualmente se a teoria de Moore, conhecida como *Lei de Moore*, está de acordo com os dados experimentais.

TABELA 5.2 Número de transistores em processadores Intel

Ano	Nome do Produto	Nº de Transistores	$\log_2$ (Nº de Transistores)
1971	4004	2.300	11,2
1972		2.500	11,3
1974		4.500	12,1
1978	8086	29.000	14,8
1982		134.000	17,0
1985		275.000	18,1
1989		1.200.000	20,2
1993	Pentium	3.100.000	21,6
1997		7.500.000	22,8
1999		9.500.000	23,2
2000		42.000.000	25,3
2001	Itanium	25.000.000	24,6
2003		220.000.000	27,7
2004		592.000.000	29,1

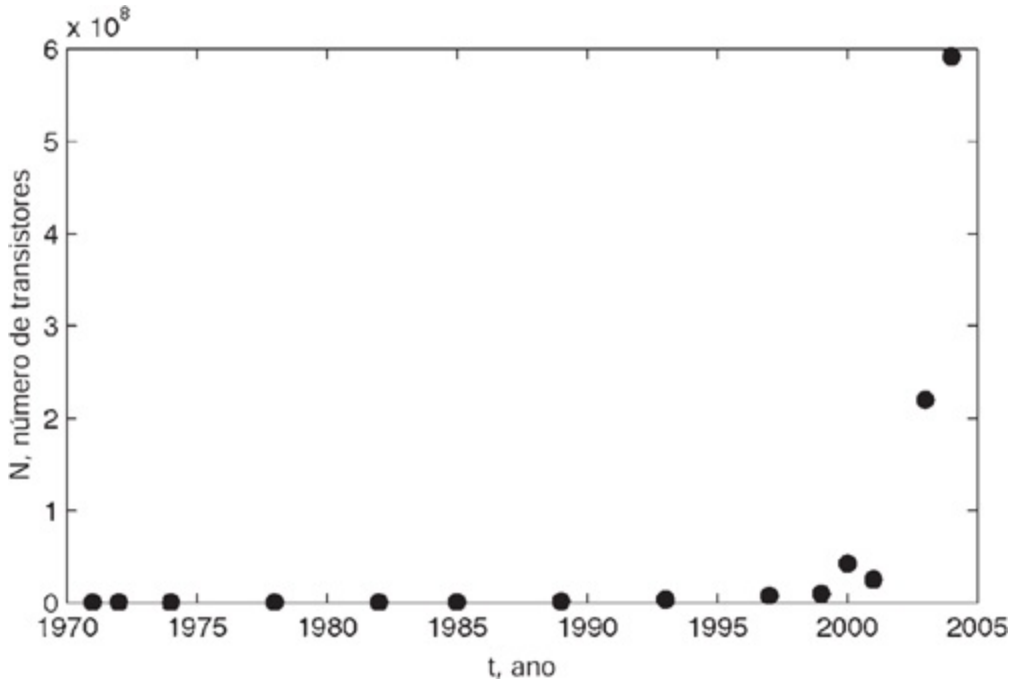


Figura 5.4 Como o número de transistores varia de ordens de grandeza, é difícil interpretar um gráfico do número de transistores em função do tempo.

Para testar a teoria de Moore, vamos supor que o número de transistores dobre de valor a intervalos regulares, mas não se sabe de antemão se isso acontece a cada dois anos. Matematicamente, esta hipótese pode ser expressa através da equação

$$N(t) = N_0 2^{t/k}, \qquad (5.1)$$

onde

- N é o número de transistores;
- N_0 é o número de transistores no primeiro ano;
- t é o tempo em anos;
- k é o intervalo de tempo necessário para que o número de transistores dobre de valor.

Esta função é claramente não-linear; como a variável independente t está no expoente, sabemos que $N(t)$ aumenta exponencialmente com t.

Para transformar a Equação (10.1) em uma equação linear,

tomamos os logaritmos de ambos os membros:

$$\begin{aligned} \log_2 N(t) &= \log_2(N_0 2^{t/k}) \\ &= \log_2 N_0 + \log_2(2^{t/k}) \\ &= \log_2 N_0 + \frac{1}{k}t \end{aligned} \qquad (5.2)$$

A Equação (5.2) *é* uma equação linear, com inclinação $1/k$ e ordenada do ponto de interseção $\log_2 N_0$. Se plotarmos o logaritmo do número de transistores em função do tempo e a teoria de Moore estiver correta, os pontos estarão sobre uma linha reta.

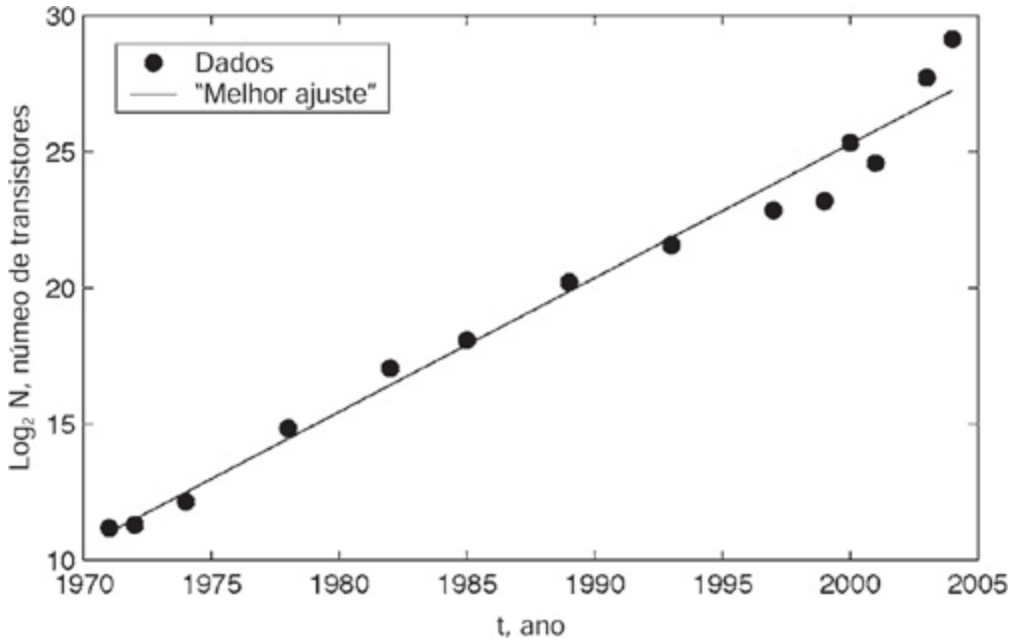


Figura 5.5 O gráfico do logaritmo base 2 do número de transistores nos processadores Intel em função do tempo se aproxima de uma linha reta.

Além disso, a inclinação da reta nos dará o tempo necessário para que o número de transistores dobre de valor. A última coluna da Tabela 5.2 mostra os valores de $\log_2 N$, e a Figura 5.5 mostra um gráfico dos resultados. É fácil ver que os resultados realmente se aproximam de uma linha reta. A reta da Figura 5.5 é o "melhor ajuste" aos dados experimentais; podemos fazer este ajuste, de forma aproximada, usando uma régua. O ajuste também pode ser feito, com maior rigor, usando uma técnica matemática conhecida como *regressão linear*, na

qual calculamos o coeficiente da reta para a qual a soma dos quadrados das diferenças entre os pontos experimentais e os pontos correspondentes da reta tem o menor valor possível.

A reta que melhor se ajusta aos pontos da Figura 5.5 passa pelos pontos experimentais correspondentes aos anos de 1971 e 2000. O coeficiente angular da reta, calculado a partir desses pontos, é dado por

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{25{,}3 - 11{,}2}{2000 - 1971} \\ &= 0{,}49 \end{aligned}$$

Como a inclinação da reta é igual a $1/k$, o intervalo para o qual o número de transistores dobra de valor é

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{m} \\ &= \frac{1}{0{,}49} \\ &= 2{,}04 \text{ anos} \end{aligned}$$

o que está bem próximo do valor estimado por Gordon Moore em 1965. Como Moore foi o diretor-executivo da Intel durante boa parte desse tempo, porém, muitos dizem que a Lei de Moore foi uma profecia autorrealizável!

Embora o gráfico do logaritmo do número de transistores em função do tempo permita verificar se o aumento do número de transistores com o tempo está de acordo com a previsão de Moore, não é possível ler o número de transistores diretamente do gráfico. Para plotar o logaritmo dos dados e ler diretamente o valor dos dados (e não o logaritmo desse valor), usamos um gráfico especial, chamado gráfico semilogarítmico ou semilog, como o que aparece na Figura 5.6. Nesse tipo de gráfico, a própria escala do eixo *y* é logarítmica, de modo que, se usarmos diretamente o valor da coordenada *y* e a

função $y = f(x)$ for do tipo exponencial, obteremos uma linha reta.

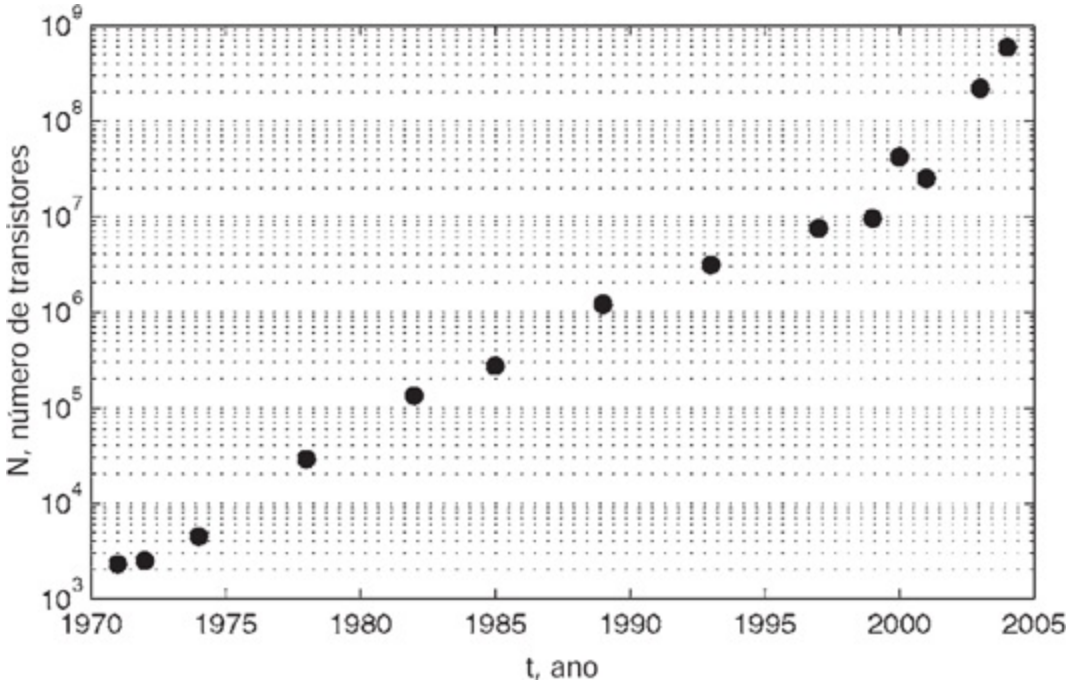


Figura 5.6 Gráfico semilog do número de transistores nos processadores Intel em função do tempo.

5.3 MODELOS EMPÍRICOS

5.3.1 Introdução

Em muitas situações, é difícil ou pouco prático prever o comportamento de um sistema com base em teorias científicas. Nesses casos, os engenheiros costumam usar *modelos empíricos* baseados em dados experimentais. Às vezes, os cientistas planejam e executam um experimento específico para colher dados com o objetivo de criar um modelo empírico. Em outras ocasiões, os dados são o resultado de análises de projetos mais antigos. A indústria aeroespacial, por exemplo, acumulou décadas de informações a respeito do desempenho de diferentes formas de asas em diferentes condições de voo, e usa esses dados para criar novos modelos.

Ao contrário dos modelos teóricos, os modelos empíricos não tentam explicar *por que* um sistema se comporta de uma certa forma, e sim prever, com a maior precisão possível, *como* vai se comportar em certas condições. Para ilustrar esses princípios, vamos examinar um modelo empírico de uma grande atiradeira para lançar uma bola de *softball* em um alvo escolhido. A Figura 5.7 mostra uma fotografia da atiradeira. Ela possui uma armação com uma base horizontal e suportes verticais, nos quais é montada uma tira de borracha de câmara de ar com uma bolsa para acomodar a bola. Neste exemplo, vamos supor que a tira de borracha é mantida em uma altura fixa, e o único parâmetro ajustável é o recuo horizontal, que estabelece a tensão da tira de borracha no instante do lançamento. Vamos ignorar também o efeito do vento. Assim, nosso modelo tem apenas duas variáveis, como mostra a tabela a seguir.

Figura 5.7 Atiradeira para lançar bolas de *softball*, usada no curso Introdução à Engenharia, da Universidade de Notre Dame.

Nome da Variável	Descrição	Tipo
	Recuo da tira de	

X	borracha	De projeto
D	Distância atingida pela boca	Comportamental

5.3.2 Execução de um Experimento

Uma vez definidas as variáveis, o passo seguinte consiste em criar um modelo empírico para a atiradeira e executar um experimento para determinar a relação entre as entradas e saídas do modelo. A ideia básica é mudar os valores das variáveis de entrada de forma controlada e observar as variações correspondentes das saídas. Cada execução do experimento com uma dada combinação de valores de entrada é chamada de *teste*. Quando um modelo tem muitas variáveis de entrada, podem ser necessários muitos testes para determinar os efeitos de cada variável sobre as saídas; a escolha das tentativas mais adequadas constitui um tópico importante dos cursos avançados de planejamento de experimentos. No nosso caso, porém, temos apenas uma variável de entrada, de modo que vamos simplesmente escolher uma série de valores para essa variável.

Por simples intuição, esperamos que a distância atingida pela bola seja uma função regular da distância de recuo X, mas não conhecemos a forma dessa função. É pouco provável que se trate de uma função linear, por causa da trigonometria envolvida na relação entre X e o ângulo de lançamento. Além disso, efeitos físicos podem influenciar a relação entre a tensão da tira de borracha, a velocidade de lançamento da bola e a trajetória da bola após o lançamento. Se soubéssemos ou suspeitássemos fortemente que a relação entre X e D é uma linha reta, poderíamos fazer apenas dois lançamentos com diferentes valores de X, obter dois valores de D e ligar esses dois pontos experimentais por uma reta para construir nosso modelo. Neste caso, temos motivos para suspeitar de que a relação entre X e D

não é linear, de modo que vamos executar um número maior de lançamentos. Como cada lançamento tem um custo, é desejável que o número de lançamentos seja relativamente pequeno. Supondo que nosso orçamento comporte a realização de seis tentativas, vamos usá-las para varrer, a intervalos iguais, toda a faixa de valores da variável de entrada, fazendo *X* variar de 0,25 a 1,50 m com incrementos de 0,25 m. A Tabela 5.3 mostra os resultados dos testes.

TABELA 5.3 Resultados de 6 experimentos de lançamento com diferentes recuos

Nº do Teste	X	Distância
1	0,25	1
2	0,50	4
3	0,75	10
4	1,00	18
5	1,25	27
6	1,50	36

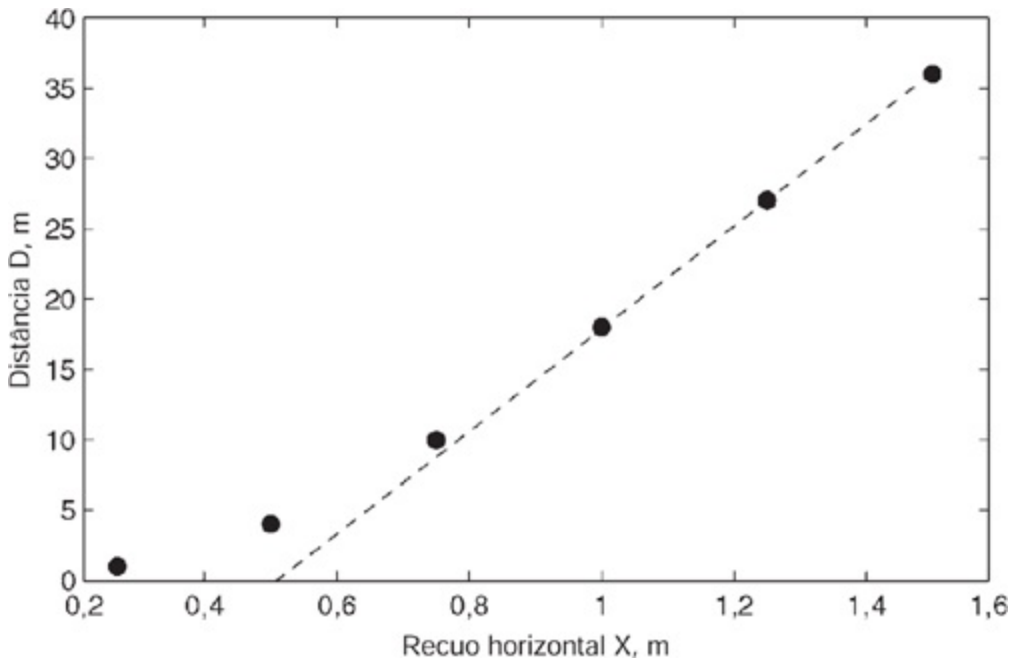


Figura 5.8 Gráfico do alcance *D* em função do recuo *X*, para os dados da Tabela 5.3. Observe que os pontos experimentais *não estão* sobre uma linha reta.

A Figura 5.8 mostra um gráfico dos dados da Tabela 5.3, com a variável de projeto X no eixo horizontal e a variável comportamental D no eixo vertical. Observe que os pontos experimentais *não estão* sobre uma linha reta; para pequenos recuos da tira de borracha, a inclinação da curva é menor que para grandes recuos. Para grandes recuos, porém, a curva tende para uma linha reta.

5.3.3 Interpolação e Ajuste de uma Reta aos Dados

Os dados da Tabela 5.3 e da Figura 5.8 cobrem uma faixa de valores do recuo X entre 0,25 m e 1,50 m, para os quais o alcance D da bola vai de 1 m a 36 m. Como plotamos apenas 6 pontos, porém, existe uma distância considerável entre os pontos experimentais. Para estimar o alcance D para um valor X do recuo que esteja entre dois valores testados, precisamos fazer uma *interpolação* dos resultados.

Método Gráfico Embora os pontos experimentais não estejam sobre uma linha reta, podemos usar uma linha reta como *aproximação* para o trecho da curva situado entre dois pontos experimentais; quanto mais próximos estiverem os pontos experimentais, melhor será a aproximação. A Figura 5.9 mostra um gráfico dos resultados dos testes com pontos vizinhos ligados por segmentos de reta. Um gráfico desse tipo é chamado de modelo *linear por partes*, já que é formado por segmentos de reta, embora o modelo como um todo não seja linear. No caso de um modelo linear por partes, é fácil fazer interpolações, como mostra a Figura 5.9. Se queremos estimar o alcance da bola para um recuo $X = 0{,}6$ m, simplesmente lemos o valor de D correspondente ao ponto $X = 0{,}6$ m do segmento de reta, que é, no caso, $D = 6{,}4$ m. Da mesma forma, poderíamos usar uma interpolação linear para determinar o valor de X necessário para lançar uma bola a uma distância $D = 6{,}4$ m.

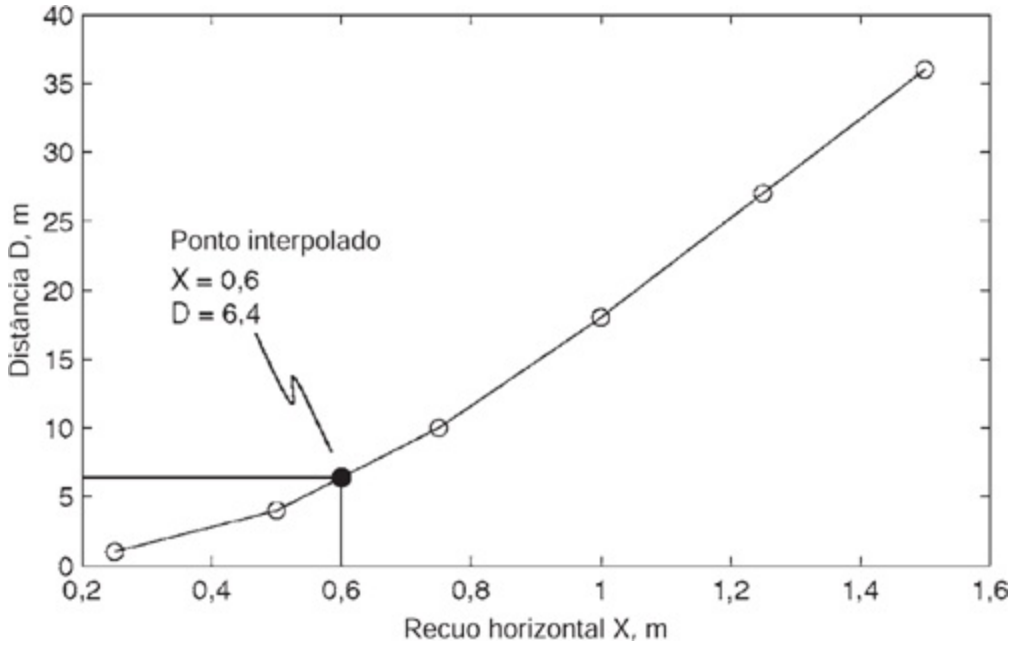


Figura 5.9 Uso de um gráfico linear por partes para fazer uma interpolação entre dois pontos experimentais.

Método Numérico Plotar os dados experimentais, como na Figura 5.9, é extremamente importante porque assim podemos *ver* como o comportamento do sistema depende das variáveis de projeto. Os modelos gráficos, porém, têm suas limitações. Uma delas é que a pessoa precisa observar um gráfico para avaliar o modelo. Além disso, a interpolação em um gráfico, embora conceitualmente simples, pode ser trabalhosa e demorada. Em muitos casos, é bem mais conveniente introduzir os valores das variáveis de entrada em uma fórmula e calcular os valores das variáveis comportamentais. Podemos fazer isso encontrando uma função $D = f(X)$ que se ajuste bem aos dados, como fizemos para a Lei de Boyle e para a Lei de Moore, com a diferença de que, nos modelos empíricos, não temos uma teoria para nos guiar. Dependendo da forma do comportamento do sistema, podemos experimentar diferentes tipos de funções, como funções polinomiais, funções senoidais, funções exponenciais etc. No exemplo que estamos discutindo, como mostra a Figura 5.10, uma linha reta passando pelo segundo ponto e pelo quinto ponto de teste da Tabela 5.3 constitui

um ajuste bem razoável aos dados experimentais, exceto para valores muito pequenos de X. Assim, vamos usar esses dois pontos, cujas coordenadas (X, D) são (0,5; 4) e (1,25; 27), para determinar a equação da linha reta que servirá como modelo numérico da atiradeira.

Como foi visto anteriormente, esses dois pontos podem ser usados para calcular os parâmetros da equação de uma reta na forma inclinação-interseção,

$$y = mx + b$$

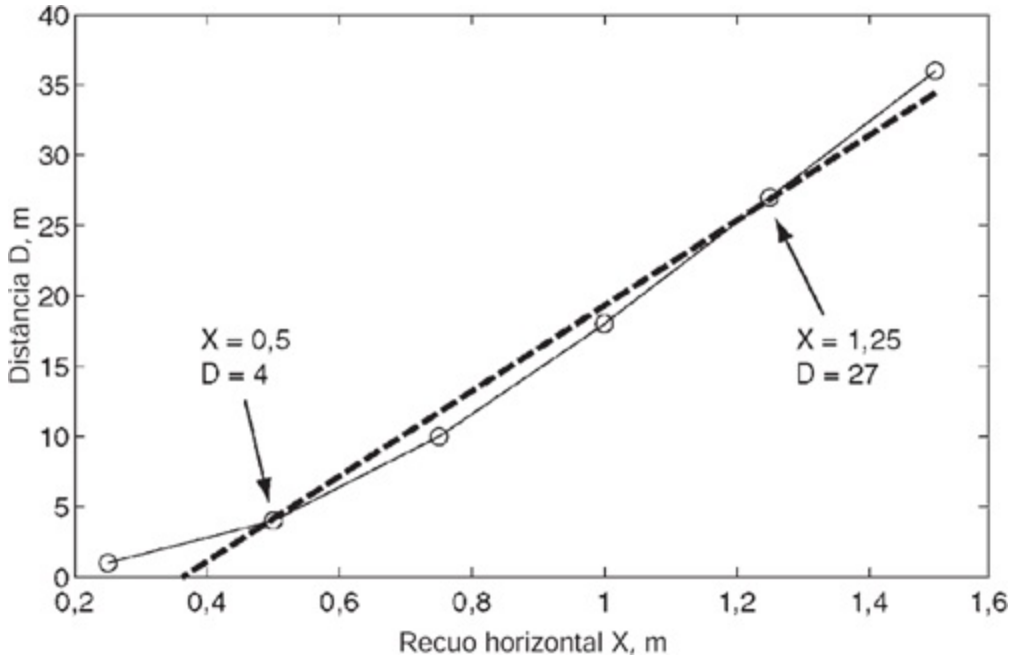


Figura 5.10 Uma reta passando pelo segundo e pelo penúltimo ponto experimental constitui um modelo bem razoável do sistema.

onde

$$\begin{aligned} m &= \frac{D_2 - D_1}{X_2 - X_1} \\ &= \frac{27 - 4}{1{,}25 - 0{,}5} \\ &= 30{,}67 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= D_1 - mX_1 \\ &= 4 - m(0{,}5) \\ &= -11{,}33 \end{aligned}$$

Assim, a equação da reta é

$$D = 30{,}67X - 11{,}33$$

A Tabela 5.4 mostra uma comparação entre as previsões do modelo teórico e os valores experimentais do alcance para os seis testes executados. Observe, em primeiro lugar, que o erro para os pontos 2 e 5 é zero; isso é natural, pois *fizemos* a reta passar por esses dois pontos. Para os pontos 3, 4 e 6, o valor absoluto do erro é menor que 2. Mais interessante, porém, é o fato de que, no caso do ponto 1, a previsão, além de estar distante da realidade – o que era esperado – é de um alcance *negativo*! Isso chama atenção para uma das principais deficiências dos modelos empíricos numéricos: o fato de que esses modelos lidam apenas com números, sem levar em conta o que é ou não fisicamente razoável. Por esse motivo, é importante examinar com cuidado os resultados fornecidos por modelos numéricos. O uso de um modelo gráfico em combinação com um modelo numérico ajuda a explicar esta anomalia. De um ponto de vista estritamente numérico, obter um resultado negativo no ponto 1 é o preço que temos que pagar por ajustar uma linha reta a dados que são decididamente não-lineares.

TABELA 5.4 Comparação entre os valores experimentais e os valores previstos usando o modelo numérico $D = 30{,}67X - 11{,}33$. Note que o modelo prevê um alcance negativo quando o recuo horizontal X é 0,25

Nº do Teste	X	Distância Medida	Distância Prevista	Erro
1	0,25	1	**−3,67**	**−4,67**
2	0,50	4	4,00	0,00
3	0,75	10	11,67	1,67
4	1,00	18	19,33	1,33
5	1,25	27	27,00	0,00
6	1,50	36	34,67	−1,33

5.4 USO DE MÉTODOS ESTATÍSTICOS PARA QUANTIFICAR A IMPRECISÃO

O modelo da seção anterior prevê que, se a borracha da atiradeira for puxada 1 m para trás, a bola de *softball* será arremessada a uma distância de 18 m. Até que ponto, porém, esta previsão é precisa e confiável? Para examinar mais de perto a questão, suponhamos que seja executado um segundo experimento com a atiradeira, no dia seguinte ao dos testes iniciais, e que após 20 lançamentos, todos com um recuo de 1 m, os resultados sejam os que aparecem na Tabela 5.5. Não só as bolas não caíram todas a 18 m, mas alcançaram várias distâncias entre 14,2 e 19,3 m. Isso significa que existe uma *imprecisão* no modelo da atiradeira. A imprecisão está presente na maioria dos problemas de engenharia, e uma qualidade importante do engenheiro é a capacidade de lidar com imprecisões. Nesta seção são apresentados alguns princípios básicos da quantificação da imprecisão usando *métodos estatísticos* e são discutidos alguns modos como os engenheiros usam métodos estatísticos para justificar decisões.

TABELA 5.5 Resultados de 20 lançamentos com um recuo de 1 m

Testes 1–5:	17,5	19,0	16,4	19,3	16,6
Testes 6–10:	16,0	17,4	16,7	18,1	17,5
Testes 11–15:	15,1	14,2	17,4	15,7	17,8
Testes 16–20:	19,3	18,5	15,7	17,9	17,0

5.4.1 Causas de Imprecisão

Como mostra a Figura 5.11, todas as fases do processo de criação e utilização de um modelo estão sujeitas a imprecisões. Começando pelo experimento inicial, uma causa de imprecisão é o *erro experimental*, seja na fixação dos valores das variáveis de entrada, seja na medida dos valores das variáveis de saída. No caso da atiradeira, por exemplo, em um dado teste, o valor medido do recuo da tira de

borracha ou da distância atingida pela bola pode não corresponder exatamente à realidade por causa de um simples erro humano. Mesmo que todas as medidas sejam feitas com extrema precisão, o modelo pode prever resultados errôneos se a *função de base* do modelo não se ajustar adequadamente aos dados. Se usarmos uma linha reta como base para modelar a atiradeira, será impossível escolher uma reta que se ajuste bem a todos os dados experimentais, já que a distância atingida não varia linearmente com o recuo. Finalmente, mesmo que as medidas sejam precisas e a função de base se ajuste perfeitamente aos dados, o modelo pode fazer previsões errôneas se deixar de levar em conta uma variável de entrada importante. Suponhamos, por exemplo, que as condições de vento no dia em que executamos o primeiro experimento fossem muito diferentes das condições do vento no dia em que executamos o segundo experimento. Como o modelo não leva em conta a velocidade do vento, é inevitável que o modelo funcione melhor nos dias em que as condições de vento estão mais próximas das que existiam no dia em que foram colhidos os dados usados para criar o modelo.

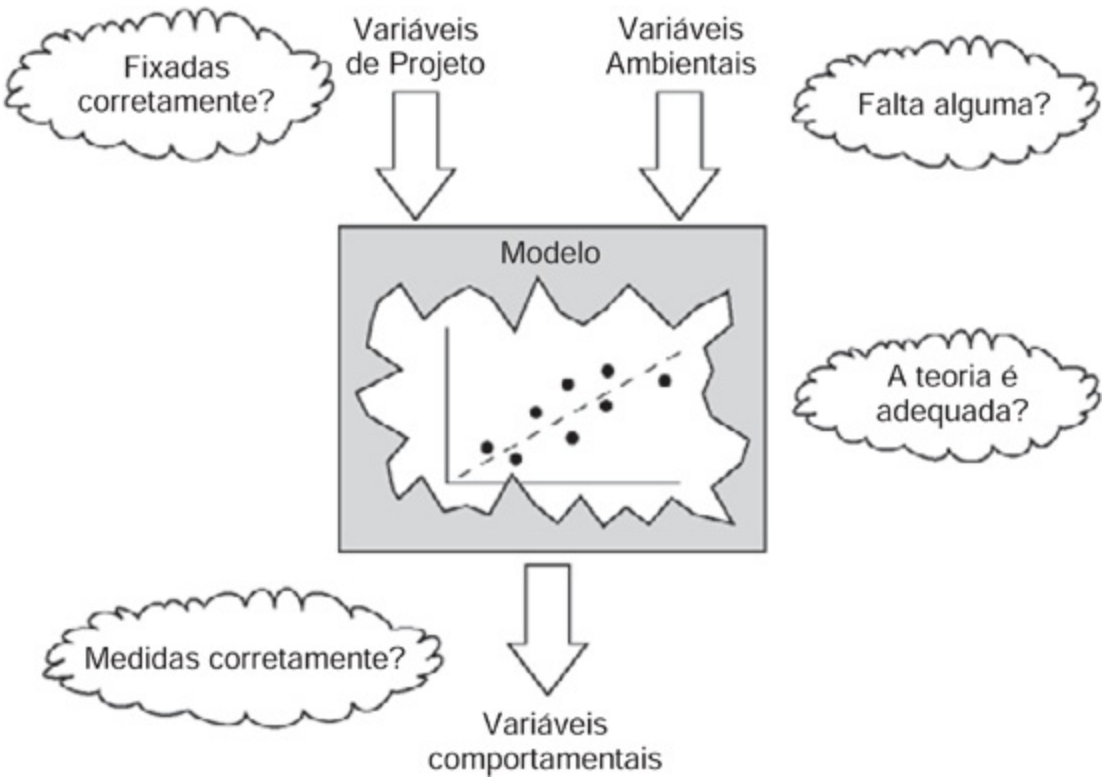


Figura 5.11 Causas da imprecisão de um modelo.

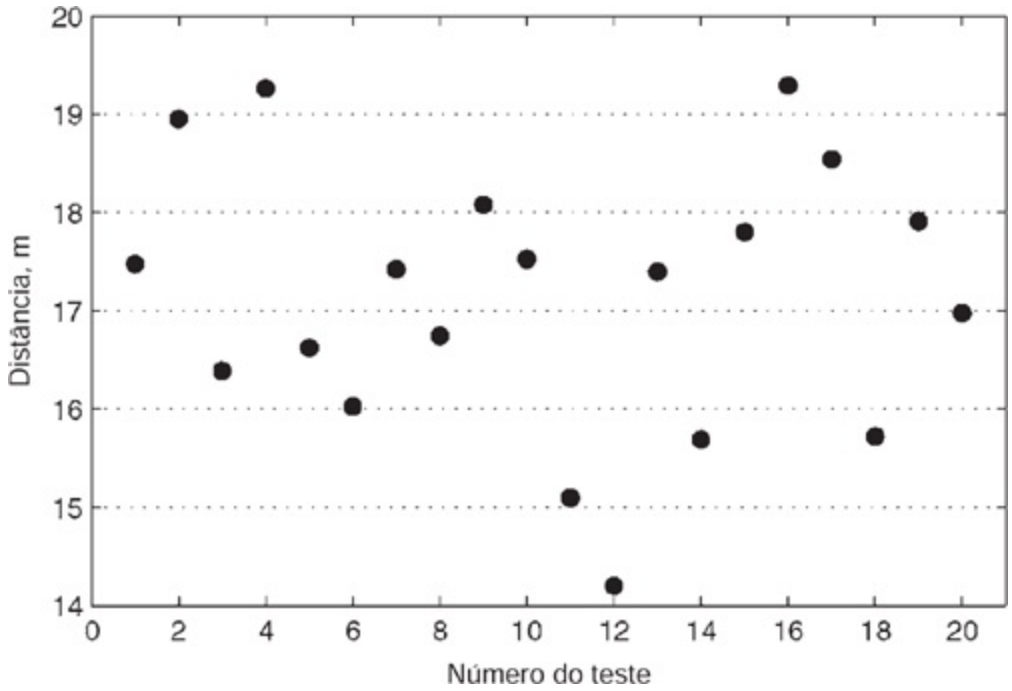


Figura 5.12 Resultados de 20 testes com um recuo de 1 m.

Todos os fatores mencionados acima podem afetar a precisão de

um modelo. Analisando os resultados experimentais, é possível encontrar indícios que revelem quais desses fatores podem estar envolvidos, e então usar esse conhecimento para reduzir a imprecisão ou pelo menos levá-la em conta nas previsões. Como primeiro passo, mostramos os resultados em um *gráfico de pontos* como o da Figura 5.12, no qual são simplesmente plotados os pontos experimentais para os 20 testes na ordem em que foram executados. Observando o gráfico, vemos que os resultados dos testes parecem estar homogeneamente distribuídos em um certo intervalo, mas que o ponto central da distribuição corresponde a uma distância menor que a distância prevista de 18 m.

5.4.2 Média e Desvio Padrão: Erros Sistemáticos e Erros Aleatórios

Enquanto um gráfico de pontos oferece uma visão geral dos dados, os métodos estatísticos fornecem valores numéricos que ajudam a relacionar os resultados experimentais ao modelo proposto. Os *parâmetros estatísticos* são definidos como números calculados a partir de um conjunto de dados, como o valor máximo, o valor mínimo e a média. Existem várias formas de definir a média de um conjunto de dados, mas a mais comum é a *média aritmética*, que é obtida somando todos os valores de uma variável e dividindo pelo número de valores. Mais formalmente, se existem n valores e x_i para i 1, 2, … n, são esses os valores, e a média aritmética $\bar{X}$ é definida através da equação

$$\text{Média: } \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (5.3)$$

De acordo com a Tabela 5.5 e a Figura 5.12, o valor médio da distância atingida é

$$\bar{d} = \frac{17{,}5 + 19{,}0 + 16{,}4 + \cdots + 17{,}0}{20}$$
$$= 17{,}16\ \text{m}$$

Assim, a distância média no segundo experimento com a atiradeira está mais próxima de 17 m do que de 18 m, a distância prevista. Isso sugere que, além de erros aleatórios que levam a uma variação dos resultados para mais ou para menos em relação à média, existe uma fonte de imprecisão que faz com que o modelo preveja distâncias maiores que as reais. Chamamos esse tipo de erro, sempre no mesmo sentido, de *erro sistemático* ou *viés* dos dados. Com um pequeno exercício de imaginação, podemos fazer uma lista de possíveis culpados desse erro sistemático:

- Pode ter havido um vento a favor mais forte no dia do primeiro experimento ou um vento contrário mais forte no dia do segundo.
- Pode ter havido uma diferença no modo como a distância atingida foi medida nos dois experimentos; talvez, por exemplo, a fita métrica não tenha sido bem esticada no segundo dia.
- Pode ter havido uma diferença no modo como o recuo foi medido nos dois experimentos; talvez, por exemplo, em um dos dias a medida tenha sido feita a partir da extremidade dianteira da bola, e no outro a partir da extremidade traseira.
- Pode ser que a reta de “melhor ajuste” leve a uma previsão exagerada da distância atingida com um recuo de 1 m.

Vamos examinar mais de perto uma das possibilidades, a de que tenha havido uma diferença no modo como o recuo foi medido. Se o recuo tivesse sido medido de modo diferente, de que forma isso afetaria a distância atingida? Para responder a essa pergunta, precisamos calcular a *sensibilidade* da distância atingida em relação ao afastamento no modelo de atiradeira que estamos usando. Quando usamos uma linha reta para modelar a atiradeira, calculamos a inclinação da reta usando a relação

$$m = \frac{\text{variação da distância}}{\text{variação do recuo}} = 30{,}67$$

Esta relação mostra que basta uma variação na distância de recuo de 1/30 m, ou seja, apenas alguns centímetros, para que a distância atingida pela bola varie de mais de 1 m. Assim, as diferenças no modo de medir o recuo são uma explicação plausível do erro sistemático, que merece ser investigada. Por outro lado, podemos ignorar as causas do erro sistemático e simplesmente recomendar aos usuários que utilizem uma distância de recuo ligeiramente maior que a prevista pelo modelo.

Como vimos, um viés do valor médio dos dados experimentais pode ser uma indicação de erro sistemático cuja correção reduzirá a imprecisão do modelo. Outro parâmetro estatístico importante é uma medida da variação aleatória dos resultados experimentais em relação à média. A Figura 5.13 mostra a média e os erros em relação à média no gráfico de pontos da Figura 5.12. Se d_i é a distância atingida no i-ésimo teste e d é a distância média, o erro do i-ésimo teste em relação à média é dado por

$$e_i = d_i - \bar{d}$$

Assim como calculamos o valor médio da distância atingida, podemos também calcular o valor médio do erro em relação à média. Se calculássemos o valor médio como a média aritmética dos erros, porém, os erros positivos e negativos tenderiam a se cancelar, e o valor médio de e_i seria sempre próximo de zero. Para medir a média dos *valores absolutos* dos erros, o que normalmente fazemos é calcular a soma dos *quadrados dos erros*, extrair a raiz quadrada e dividir o resultado pelo número n de dados. Este parâmetro estatístico é chamado de *desvio-padrão* do conjunto de dados.[2] Mais formalmente, para um conjunto de dados x_i, com $i = 1, 2, \ldots n$, o desvio-padrão é dado por

$$\text{Desvio-padrão: } \sigma = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad (5.4)$$

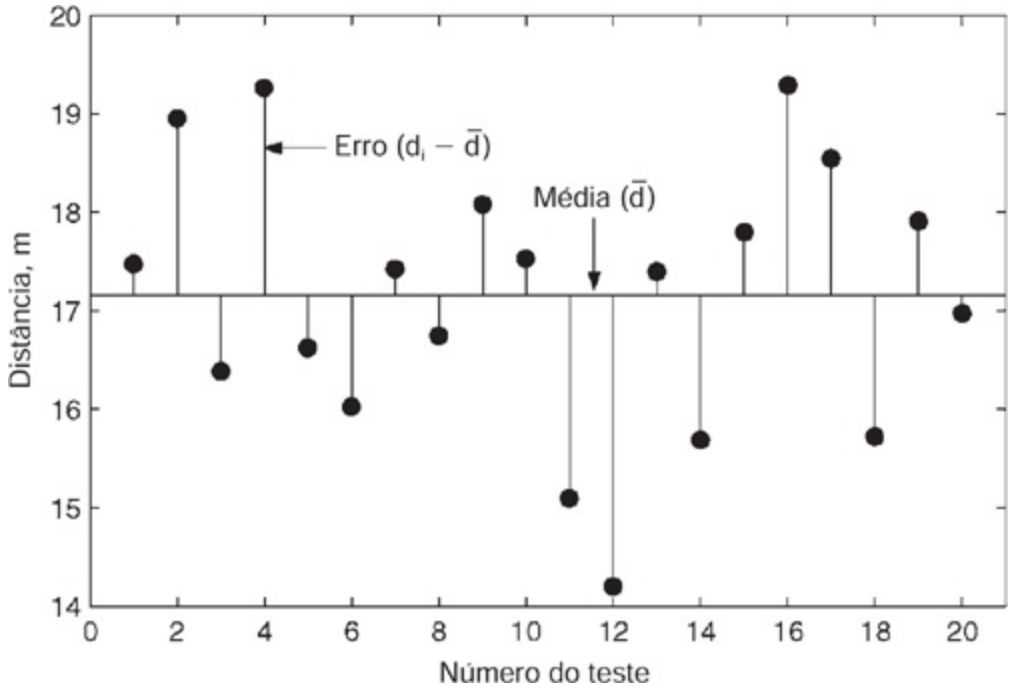


Figura 5.13 Média e erros em relação à média.

No caso do segundo experimento com a atiradeira, o desvio-padrão é

$$\sigma = \frac{\sqrt{(17{,}5 - 17{,}16)^2 + (19{,}0 - 17{,}16)^2 + \cdots + (17{,}0 - 17{,}16)^2}}{20}$$
$$= 1{,}35 \text{ m}$$

5.4.3 Como Estimar uma Probabilidade

Tomados em conjunto, a média e o desvio-padrão constituem uma forma compacta de descrever o resultado do experimento da atiradeira. Precisamos de mais informações, porém, para responder à seguinte pergunta:

> Se uma bola de *softball* for lançada com um recuo de 1 m, temos razões para esperar que alcance uma distância de 18 m com uma margem de erro de 1 m?

Para responder a esta pergunta, precisamos estimar a *probabilidade* de

que a bola atinja uma distância dentro da faixa especificada. Blaise Pascal e Pierre de Fermat discutiram pela primeira vez uma teoria matemática das probabilidades em uma série de cartas escritas em 1654. Dois anos depois, Christiaan Huygens escreveu o primeiro artigo a respeito da teoria das probabilidades, *Van Rekeningh in Spelen van Geluck* (Sobre Cálculos em Jogos de Azar), que foi traduzido e publicado em latim como parte de um livro-texto do seu antigo professor de matemática na Universidade de Leyden. O artigo de Huygens foi traduzido para o inglês em 1692 por John Arbuthnot, um médico, matemático e satirista inglês que era amigo íntimo de Jonathan Swift, autor de *Viagens de Gulliver*.[3] No prefácio do seu livro, intitulado *Sobre as Leis da Chance, ou um Método dos Cálculos dos Azares do Jogo, Claramente Demonstrados e Aplicados aos Jogos Atualmente Mais em Uso, que Podem Facilmente Ser Estendidos aos Casos de Chance Mais Intricados que se Possa Imaginar* [Arb92], Arbuthnot apresenta, em sua prosa tipicamente sardônica (e muitas vezes irreverente), a ligação entre probabilidade e imprecisão:

> Você encontrará aqui um Método de Cálculo dos Azares do Jogo muito claro e simples, que um homem pode entender sem conhecer as Quadraturas das Curvas, a Doutrina das Séries, as Leis da Centripetação dos Corpos, ou os Períodos de Júpiter; sim, até sem os Elementos de Euclides. Não há nada necessário para compreender o todo, exceto o Senso comum e a Aritmética prática; salvo por alguns Toques de Álgebra … nos quais o Leitor … pode fazer uso de uma forte Fé implícita.
>
> O Sucesso do homem comum em qualquer Empreitada é proporcional a sua Conduta & Fortuna. Fortuna (no Sentido da maioria das Pessoas) significa um Evento que depende do Acaso e está de acordo com os meus Desejos; e Infortúnio significa um evento contrário aos meus Desejos: um Evento que depende do Acaso significa um Evento cujas Causas Imediatas eu não conheço e, consequentemente, não posso prever nem produzir … É impossível para um Dado, com uma certa força e direção, não cair de um certo lado; só que eu não conheço a força e direção que os fazem cair nesse lado, e portanto chamo isso de Acaso, que nada mais é que a falta de Conhecimento; e só me resta apostar quando há o maior número de Chances e, portanto, maior probabilidade de ganhar;

O termo “probabilidade” faz parte do nosso cotidiano, mas, surpreendentemente, os matemáticos ainda não chegaram a um consenso a respeito do que realmente isso significa. A definição mais comum, baseada no trabalho de Pascal, Fermat e Huygens, é a *frequência relativa* de resultados possíveis. De acordo com esta visão, todo teste de uma previsão é como um jogo com dois resultados: ganhar ou perder. Assim, se uma pessoa aposta que uma moeda vai dar cara, que um dado vai dar seis ou que uma bola de *softball* lançada por uma atiradeira vai cair a menos de 1 m de um alvo, o evento em que a pessoa apostou pode ou não ocorrer. De acordo com a definição de frequência relativa, a probabilidade de um evento é a porcentagem de vezes que esse evento acontece em um grande número de testes. Assim, quando dizemos que a probabilidade de que uma moeda dê cara ao ser jogada uma vez é de 50%, isso significa que, se a moeda for jogada um grande número de vezes, dará cara em metade das jogadas.

É importante ter em mente que em um experimento real, com um número limitado de testes, o melhor que podemos fazer é estimar uma probabilidade. Assim, por exemplo, se jogamos uma moeda três vezes, a moeda pode dar cara em 0, 1, 2 ou 3 vezes dos testes. Assim, a partir deste experimento, nossa estimativa da probabilidade de que a moeda dê cara pode ser 0, 1/3, 2/3 ou 1, mas não, por exemplo, 1/2. A precisão da estimativa de uma probabilidade aumenta com o número de testes. Se jogamos uma moeda 1 milhão de vezes, não esperamos que dê cara exatamente 500 mil vezes, mas esperamos que a razão entre o número de caras e o número de jogadas esteja muito próximo de 0,5. De acordo com esta definição, dizemos que a probabilidade experimental estimada de um evento é dada por

$$\text{Probabilidade estimada} = \frac{\text{número de eventos favoráveis}}{\text{número total de eventos}}$$

O Exemplo 5.1 ilustra a estimativa de probabilidades de que a bola de *softball* lançada pela atiradeira atinja diferentes distâncias.

Exemplo 5.1 **Estimativa de Probabilidades para a Atiradeira**

A partir dos dados experimentais da Tabela 5.5 para o lançamento de uma bola de *softball* com recuo de 1 m, na direção de um alvo situado a 18 m de distância, estime a probabilidade de que a bola, (a) não chegue a atingir o alvo, (b) caia a menos de 1 m do alvo, (c) ultrapasse o alvo.

Solução

Dados: Os resultados experimentais de 20 testes.

Objetivo: Estimar a probabilidade de que (a) $d \leq 17$ m, (b) 17 m $< d <$ 19 m, e (c) $d \geq 19$ m.

Plano: Contar o número de lançamentos em que a bola caiu dentro dos três intervalos e dividir pelo número de testes, que é 20.

Análise: Os resultados são os seguintes:

$$d \leq 17: \quad 9 \text{ testes} \quad \Rightarrow P = \frac{9}{20} = 0{,}45$$

$$17 < d < 19: \quad 8 \text{ testes} \quad \Rightarrow P = \frac{8}{20} = 0{,}40$$

$$d \geq 19: \quad 3 \text{ testes} \quad \Rightarrow P = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

Note que a soma das três probabilidades é 1. Isso já era esperado, já que as distâncias consideradas cobrem todas as possibilidades, sem que haja superposição.

No seu livro *Jogos de Azar*, Huygens considera, em particular, a questão do ganho esperado com uma aposta. Ele afirma que, se existem p chances de ganhar (ou perder) uma soma a de dinheiro e q chances de ganhar (ou perder) uma soma b de dinheiro, e todas as chances têm pesos iguais, o ganho esperado com a aposta é dado por

$$\text{Ganho esperado} = \frac{pa + qb}{p + q} \qquad (5.5)$$

Huygens apresenta o seguinte exemplo numérico: se um jogador tem 3 chances de ganhar 13 unidades monetárias e 2 chances de ganhar 8, o ganho esperado é

$$\frac{(3 \times 13) + (2 \times 8)}{3 + 2} = 11$$

Curiosamente, Huygens escreveu *Jogos de Azar* enquanto estava trabalhando no problema de modelar colisões entre objetos. Além disso, como observaram os historiadores, existem muitos paralelos interessantes entre *Jogos de Azar* e *Movimento de Corpos em Colisão* [Hol84]. Em particular, a fórmula do ganho esperado, Equação (5.5), tem exatamente a mesma forma que a fórmula do centro de gravidade, Equação (4.4). Assim, é bem provável que Huygens tenha usado uma analogia com os pesos nos dois braços de uma alavanca quando analisava suas teorias de probabilidade. No Exemplo 5.2, consideramos uma aposta hipotética no desempenho da atiradeira e calculamos quem vai sair perdendo.

Exemplo 5.2 Uma Aposta Justa?

Suponha que alguém lhe proponha a seguinte aposta: se você lançar uma bola de *softball* e ela cair a menos de 1 m de um alvo situado a 18 m de distância, você receberá R$ 1,25; caso contrário, você terá que pagar R$ 1,00. Você deve aceitar a aposta?

Solução Podemos resolver este problema usando a fórmula de Huygens para o ganho esperado e os resultados do segundo experimento com a atiradeira para estimar as probabilidades de ganhar ou perder. Nos 20 testes realizados, a bola caiu 8 vezes a menos de 1 m de uma distância de 18 m e 12 vezes fora desse intervalo. Com esta estimativa, a solução é a seguinte:

Dados: 8 chances de ganhar R$ 1,25 e 12 chances de perder R$ 1,00.

Objetivo: Calcular o ganho esperado.

Plano: Usar a fórmula de Huygens, Equação (5.5).

Análise: Neste exemplo,

$$p = 8 \qquad a = 1{,}25 \qquad q = 12 \qquad b = -1{,}00$$

$$\begin{aligned} \text{Ganho esperado} &= \frac{pa + qb}{p + q} \\ &= \frac{(8 \times 1{,}25) + (12 \times -1{,}00)}{8 + 12} \\ &= -0{.}10 \end{aligned}$$

De acordo com a análise, você perderia 10 centavos, em média, se jogasse esse

jogo, de modo que talvez fosse melhor não arriscar. Por outro lado, como vimos anteriormente, parece haver um erro sistemático que está fazendo a bola atingir o solo 1 m antes do que o modelo prevê. Se você puxar a tira de borracha alguns centímetros a mais em cada lançamento, talvez consiga aumentar a distância de 1 m em relação aos valores da Tabela 5.5. Nesse caso, 10 lançamentos seriam bem-sucedidos e o ganho esperado mudaria para

$$\frac{(10 \times 1{,}25) + (10 \times -1{,}00)}{10 + 10} = 0{,}125$$

o que significa que você ganharia, em média, 12,5 centavos por jogada. Pensando melhor, talvez valha a pena tentar!

5.4.4 Frequência de Resultados e Histogramas

Na solução do Exemplo 5.1, o que fizemos, basicamente, foi colocar os resultados da Tabela 5.5, de acordo com a distância atingida, em três "escaninhos", lançamentos de menos de 17 m, entre 17 m e 19 m, e de mais de 19 m, e contar o número de lançamentos em cada escaninho. Podemos ter uma visão mais precisa da distribuição de resultados usando um número maior de escaninhos. A Tabela 5.6 mostra as contagens e respectivas probabilidades dos resultados dos 20 lançamentos usando escaninhos de 1 m de largura para intervalo de 14 m a 20 m.

TABELA 5.6 Contagens das distâncias atingidas divididas por intervalos

Nº do Escaninho	Intervalo	Nº de Eventos	Probabilidade
14	$14 \leq d < 15$	1	0,05
15	$15 \leq d < 16$	3	0,15
16	$16 \leq d < 17$	4	0,20
17	$17 \leq d < 18$	7	0,35
18	$18 \leq d < 19$	2	0,10
19	$19 \leq d < 20$	3	0,15
Total	$14 \leq d < 20$	20	1,00

Na Tabela 5.6, a variável i identifica o intervalo e a função $N(i)$ representa a contagem ou frequência dos testes cujo resultado está no escaninho i. A função P (i) representa a probabilidade de que o resultado de um teste esteja no escaninho i, que é igual a N (i) dividido pelo número de testes, 20, no caso. Como os resultados de todos os testes do experimento são considerados, a soma das contagens dos escaninhos deve ser igual ao número total de testes:

$$\sum_i N(i) = \text{Número de testes}$$

Da mesma forma, a soma das probabilidades deve ser igual a 1:

$$\sum_i P(i) = 1$$

A plotagem dos valores da Tabela 5.6 ajuda a visualizar certas características da distribuição de dados. Na Figura 5.14, as contagens e as probabilidades correspondentes foram representadas como barras verticais. Um gráfico desse tipo é chamado de *histograma*, do grego "histos", que significa mastro de navio. Como a área coberta por um histograma é a soma das áreas das barras, a área total de um histograma de contagens é igual ao número de testes e a área de um histograma de probabilidades é igual a 1. Assim, a probabilidade de que o valor de um dado esteja em um certo intervalo é igual à fração da área total do histograma determinada por esse intervalo. A Figura 5.15 mostra dois exemplos. No exemplo da esquerda, a probabilidade de que a distância seja menor que 17 m corresponde à área das três primeiras barras, que representa 40% da área do histograma. A mediana dos dados, o valor tal que a probabilidade de que a distância seja maior ou menor que esse valor seja 50%, está em algum ponto do interior da quarta barra.

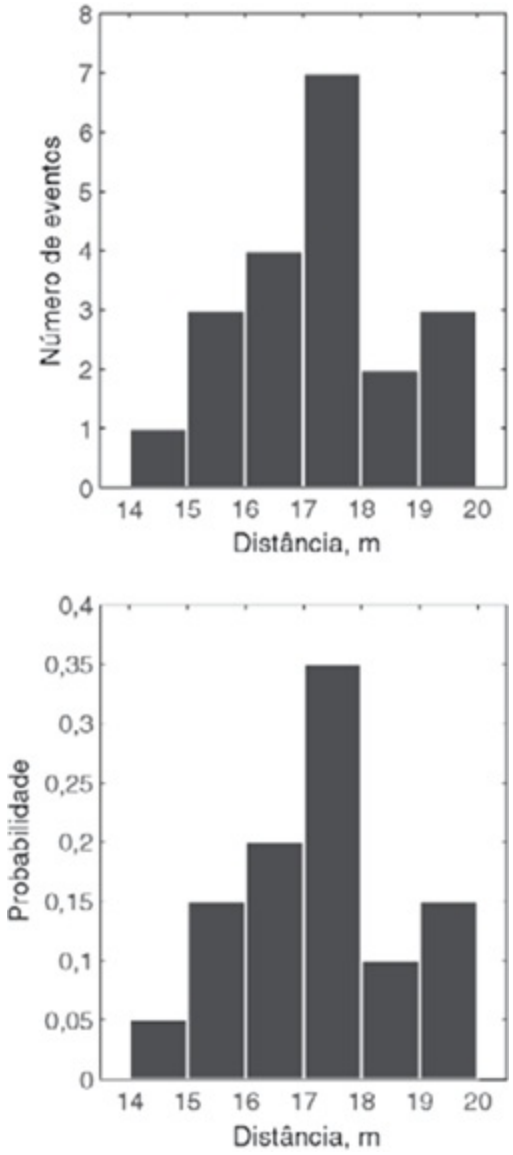


Figura 5.14 Histograma.

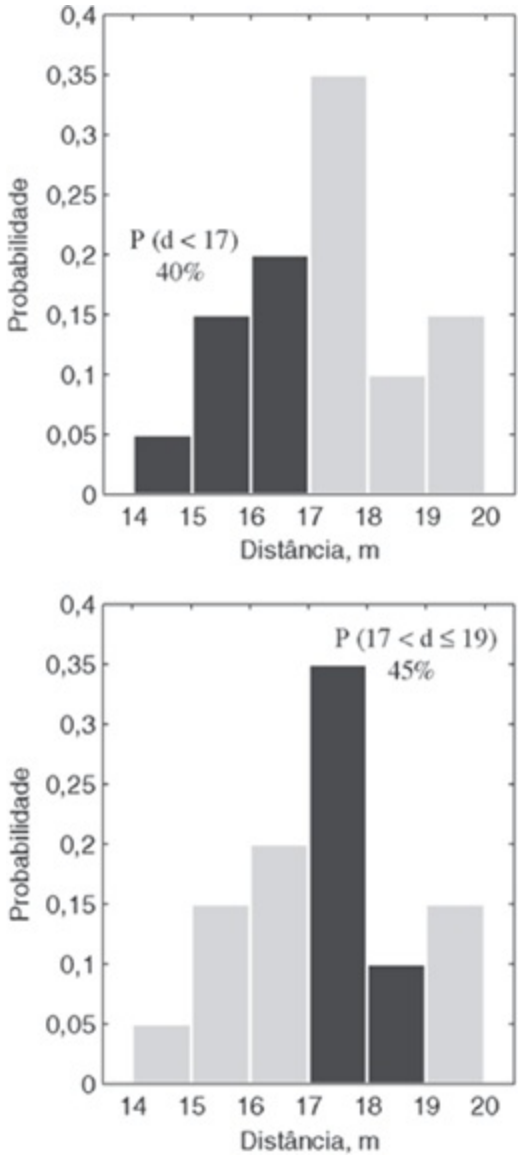


Figura 5.15 Histograma.

5.4.5 A Teoria da Curva em Forma de Sino

O histograma das distâncias atingidas pela bola de *softball* se parece com a *curva em forma de sino* da Figura 5.16, mais formalmente conhecida como *distribuição normal* ou *distribuição gaussiana*. Assim como a Lei de Boyle expressa um modelo teórico para a relação entre a pressão e o volume de um gás e a Lei de Moore expressa um modelo empírico para a variação, com o tempo, do número de transistores em um circuito integrado, a distribuição normal expressa um modelo

teórico para as probabilidades dos eventos em certos tipos de experimentos. O matemático francês Abraham de Moivre (1667-1754) propôs este modelo em 1734 e publicou-o na segunda edição do seu livro *Doutrina das Chances* (popular entre jogadores) em 1738 [Hal90]. Mais tarde, a teoria foi estudada e refinada pelo matemático e cientista alemão Karl Friedrich Gauss (1777-1855), em cuja homenagem a distribuição foi batizada.

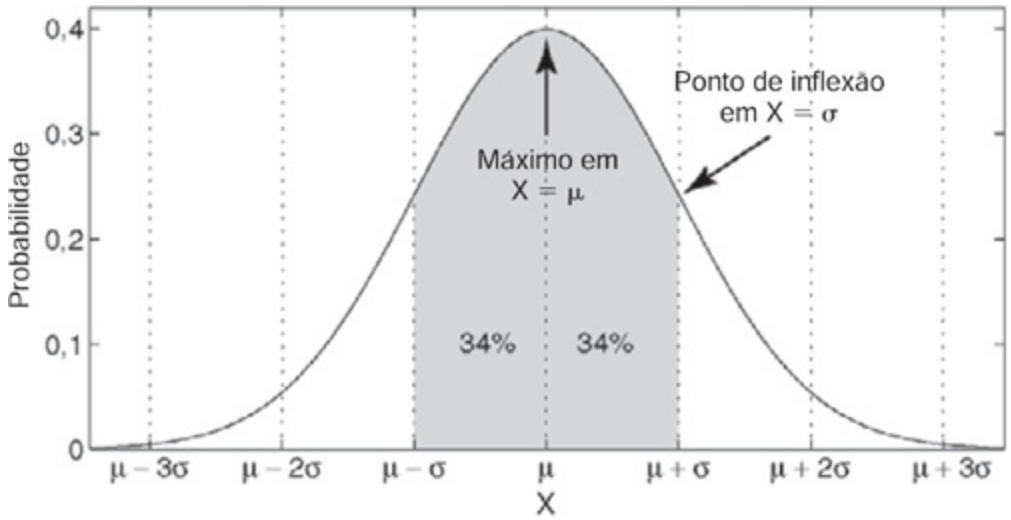


Figura 5.16 Distribuição normal.

A ideia básica da teoria de Moivre era considerar um experimento no qual jogamos uma moeda não-viciada um número muito grande de vezes (um milhão, digamos) e usar uma variável X para representar o número de vezes que a moeda dá cara. A distribuição normal ou curva em forma de sino é um gráfico da probabilidade de que X tenha um certo valor. A maior probabilidade é a de que a moeda dê cara metade das vezes, ou, em nosso exemplo, 500.000 vezes. Este é o valor médio da distribuição, μ. A probabilidade diminui para valores de X menores ou maiores que μ, a princípio gradualmente e depois de modo mais abrupto. Assim, existe uma probabilidade considerável de que o número de caras esteja no intervalo de 490.000 a 510.000, mas uma probabilidade extremamente pequena de que esteja próximo de 0 ou de um milhão. Essas probabilidades foram calculadas por

Abraham de Moivre usando a distribuição normal, que possui algumas propriedades interessantes, ilustradas na Figura 5.16. Em primeiro lugar, a curva é simétrica em relação à média μ, que também corresponde ao pico da curva. Além disso, os pontos de inflexão, ou seja, os pontos em que a curva muda de concavidade, estão a um desvio-padrão σ de distância acima e abaixo da média. Finalmente, sejam quais forem os valores da média e do desvio-padrão, a fração da área sob a curva entre a média e um desvio-padrão é de aproximadamente 34%; em outras palavras, a probabilidade de que X esteja entre $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ é de aproximadamente 68%.

Se um experimento se comporta de acordo com a teoria da distribuição normal, podemos usar as propriedades da curva em forma de sino para calcular as probabilidades. Observando os dados do experimento da atiradeira, temos a impressão de que eles apresentam uma forma semelhante, mas, para termos certeza de que obedecem de perto a uma distribuição normal, teríamos que fazer o mesmo que fizemos para a Lei de Boyle e para a Lei de Moore: comparar os valores experimentais com os valores teóricos. Além disso, do mesmo modo como pudemos estimar a constante de proporcionalidade da Lei de Boyle e o intervalo característico da Lei de Moore a partir da inclinação e do ponto de interseção de uma reta de ajuste, podemos estimar a média e o desvio-padrão de uma curva normal. Não vamos fazer isso aqui, mas este é um assunto estudado na maioria dos cursos de probabilidade e estatística.

5.5 ESTUDOS DE ENGENHARIA: ESCOLHA DE OPÇÕES DE PROJETO

O Sony Playstation 3 concentra uma quantidade incrível de recursos de computação em uma pequena embalagem. Tanto isso é verdade que os engenheiros estão descobrindo formas de executar simulações científicas neste console para videogames que são muito mais rápidas

que as que rodam em PCs convencionais. O responsável por esse desempenho é o Cell Broadband Engine, um microprocessador desenvolvido conjuntamente pela IBM, Sony e Toshiba. Segundo Peter Hofstee, o principal arquiteto do Cell, um dos maiores desafios para projetar o microprocessador foi encontrar soluções de compromisso para as variáveis de projeto e adaptar as especificações para assegurar que o produto fosse aceitável para os engenheiros que estavam desenvolvendo o Playstation e outros produtos que pudessem fazer uso do Cell. Assim, por exemplo, aumentar o número de transistores ou a velocidade do *clock* permitiria realizar mais cálculos por segundo, mas também aumentaria o consumo de potência, fazendo o Cell esquentar mais, o que, por sua vez, exigiria que o Playstation dispusesse de um sistema de resfriamento mais sofisticado.

Os problemas enfrentados pela equipe que projetou o Cell são comuns em muitos projetos de engenharia; nesta seção, vamos apresentar uma metodologia intitulada *estudo de engenharia* que permite visualizar os efeitos de mudanças nas variáveis de projeto para que os projetistas possam encontrar uma combinação aceitável. Para ilustrar o processo, vamos usar uma versão mais complexa do problema da atiradeira, na qual podemos ajustar a distância de recuo X e a altura Y onde está presa a tira de borracha, como mostra a Figura 5.17. Como X e Y são ajustáveis, existem muitas combinações possíveis de valores dessas variáveis para lançar uma bola a uma dada distância, usando, por exemplo, uma trajetória de baixo ângulo ou uma trajetória de alto ângulo. Para reduzir as opções, impomos a restrição adicional de que a energia de lançamento deve ser a menor possível. Em uma atiradeira, a energia de lançamento é acumulada na tira de borracha esticada e é transferida para a bola no momento em que esta é liberada. Assim, quanto menos a tira de borracha é esticada, menor a energia de lançamento.

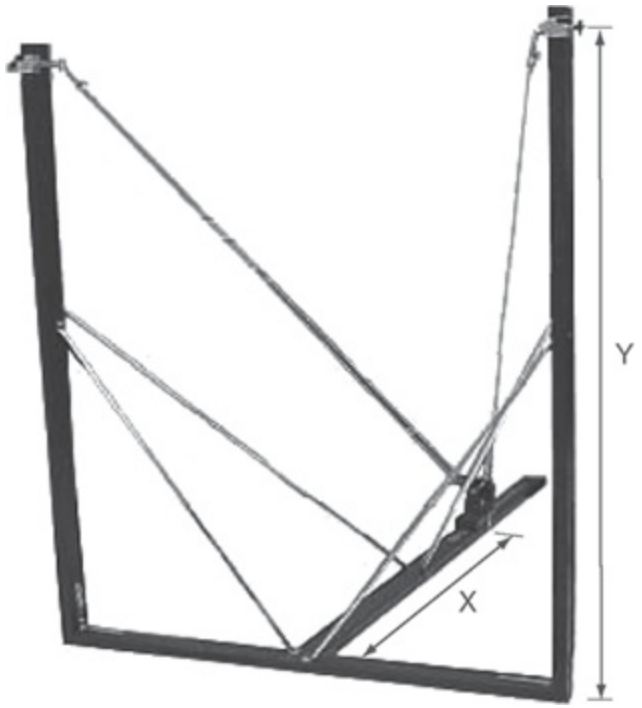


Figura 5.17 Uma atiradeira com dois parâmetros ajustáveis, *X* e *Y*.

O restante desta seção está organizado da seguinte forma: Primeiro, apresentamos uma visão geral da metodologia usada para realizar um estudo de engenharia. Em seguida, usando a estratégia do Capítulo 3, definimos claramente o problema da atiradeira e formulamos um plano para atacá-lo. A seguir, usamos um estudo de engenharia para identificar as combinações de parâmetros necessárias para lançar a bola a uma dada distância, sem nos preocuparmos com a energia. Finalmente, acrescentamos o requisito de que a energia deve ser mínima.

5.5.1 Metodologia: Criação e Uso de Mapas

Assim como os engenheiros civis usam mapas para decidir onde vão construir um edifício ou por onde vai passar uma estrada, nós também usamos mapas em estudos de engenharia para escolher um projeto aceitável. Em vez de longitude e latitude, os eixos desses mapas representam variáveis de modelos, e os pontos do mapa representam possíveis projetos. Os engenheiros chamam uma “região”

como essa, cujas dimensões são as variáveis de um projeto, de *espaço de projeto*.

Antes de falar dos mapas dos espaços de projeto, vamos dar uma olhada em um mapa topográfico e ver que tipo de informação é possível extrair desse tipo de mapa. A foto em cima da Figura 5.18 mostra uma pequena cadeia de montanhas. Nas montanhas, desenhamos uma série de *curvas de nível*, que ligam pontos de mesma altitude. O mapa do mesmo terreno embaixo da Figura 5.18 recebe o nome de *mapa topográfico* ou *mapa de contorno* e é como uma vista de cima do terreno, com as curvas de nível desenhadas. Nesse mapa, as curvas de nível foram traçadas a intervalos de 250 pés de altitude. Observando as curvas de nível em um mapa topográfico, é possível identificar várias características do terreno, como o ponto mais elevado (situado no quadrante B4) e as posições de todos os pontos com uma altitude maior que 3.000 pés (perto dos picos situados em B4 e E4). Podemos também determinar se o terreno é muito íngreme observando o espaçamento das curvas de nível: quanto mais próximas as curvas, mais íngreme é o terreno. Assim, por exemplo, a encosta mais íngreme do pico em C2 é a encosta sudeste, na qual as curvas estão mais próximas, enquanto a encosta mais suave é a encosta oeste.

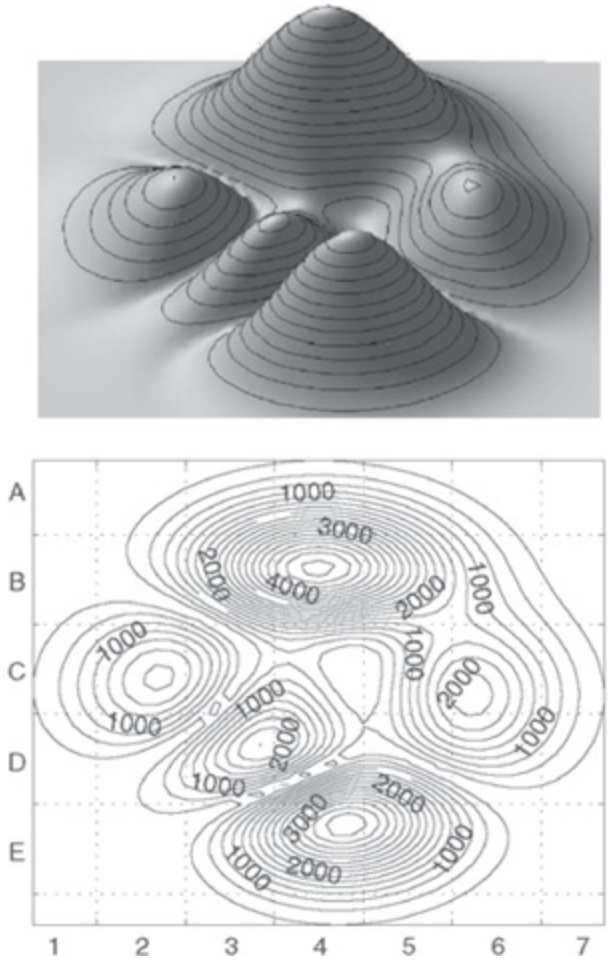


Figura 5.18 Em cima, foto de uma cadeia de montanhas com linhas de altitude constante. Embaixo, um mapa topográfico da mesma região mostrando as curvas de nível de altitude constante.

O primeiro passo para desenhar um mapa topográfico é fazer um levantamento do terreno e medir a altitude a intervalos regulares de longitude e latitude. Para desenhar o mapa de um espaço de projeto, o primeiro passo é fazer um levantamento do desempenho do produto para diferentes combinações das variáveis do projeto. No caso de modelos empíricos, esta fase de coleta de dados envolve frequentemente a realização de experimentos no produto real ou em um protótipo. No caso de modelos teóricos, a fase de coleta de dados envolve a realização de experimentos com os modelos. Esses experimentos são chamados de *varreduras de parâmetros* porque envolvem fazer variar parâmetros ou variáveis dos modelos ao longo

de uma faixa de valores. A Tabela 5.7 mostra uma varredura de parâmetro para o alongamento da tira de borracha da atiradeira, $S = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Na tabela, as linhas correspondem a valores de Y variando de 0 m a 2 m; as colunas correspondem a valores de X variando de 0 m a 2 m; e cada elemento é o valor calculado para S.

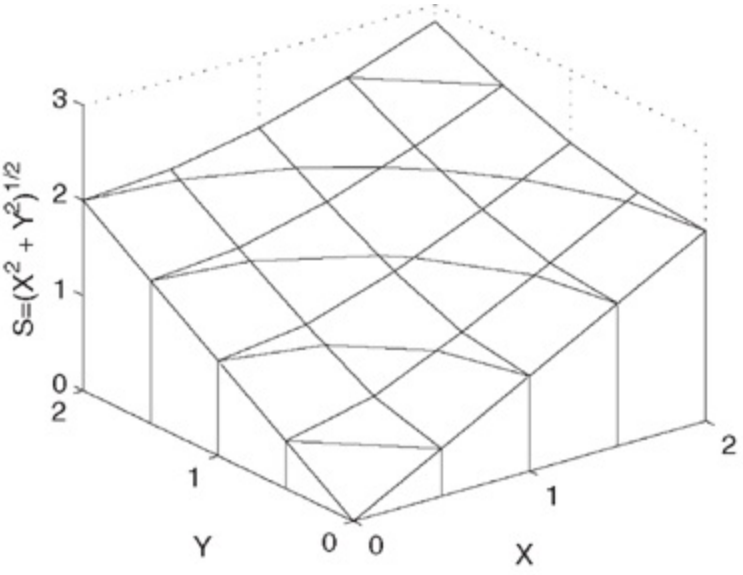
A partir desses dados, podemos desenhar um mapa do "terreno" no qual as altitudes são os valores do parâmetro de desempenho. A Figura 5.19 mostra, do lado esquerdo, um mapa dos dados da Tabela 5.7 no qual as "altitudes" são os valores de $\sqrt{X^2 + Y^2}$ para cada par de valores (X, Y). Mais tarde, nos exemplos, vamos fornecer mais detalhes a respeito dos mapas que representam espaços de projeto, mas, neste caso, a forma do terreno é parte de uma cavidade circular.

Assim como um mapa topográfico de uma região ajuda a identificar os pontos mais altos, os pontos mais baixos e a inclinação do terreno em função das coordenadas geográficas, o mapa de um espaço de projeto ajuda a visualizar os pontos de melhor e de pior desempenho e os pontos em que a variação do desempenho é mais abrupta ou mais gradual em função dos parâmetros do projeto. Da mesma forma como as curvas de nível em um mapa topográfico ligam pontos de mesma altitude, as curvas de nível em um mapa de projeto como o que aparece à direita na Figura 5.19 ligam pontos para os quais a combinação dos valores das variáveis de entrada leva ao mesmo valor da variável de saída. Assim, por exemplo, a Figura 5.20 mostra que existem muitas combinações de valores de X e Y para as quais a tira de borracha é submetida ao mesmo alongamento. Todas essas combinações correspondem a pontos da curva de nível $S = 2$ da Figura 5.19.

TABELA 5.7 Tabela com os resultados de uma varredura de parâmetro para o alongamento de uma tira de borracha em função dos deslocamentos X e Y

$\sqrt{X^2 + Y^2}$	X = 0	X = 0,50	X = 1,00	X = 1,50	X = 2,00
$Y = 0{,}00$	0	0,5000	1,0000	1,5000	2,0000

$Y = 0{,}50$	0,5000	0,7071	1,1180	1,5811	2,0616
$Y = 1{,}00$	1,0000	1,1180	1,4142	1,8028	2,2361
$Y = 1{,}50$	1,5000	1,5811	1,8028	2,1213	2,5000
$Y = 2{,}00$	2,0000	2,0616	2,2361	2,5000	2,8284



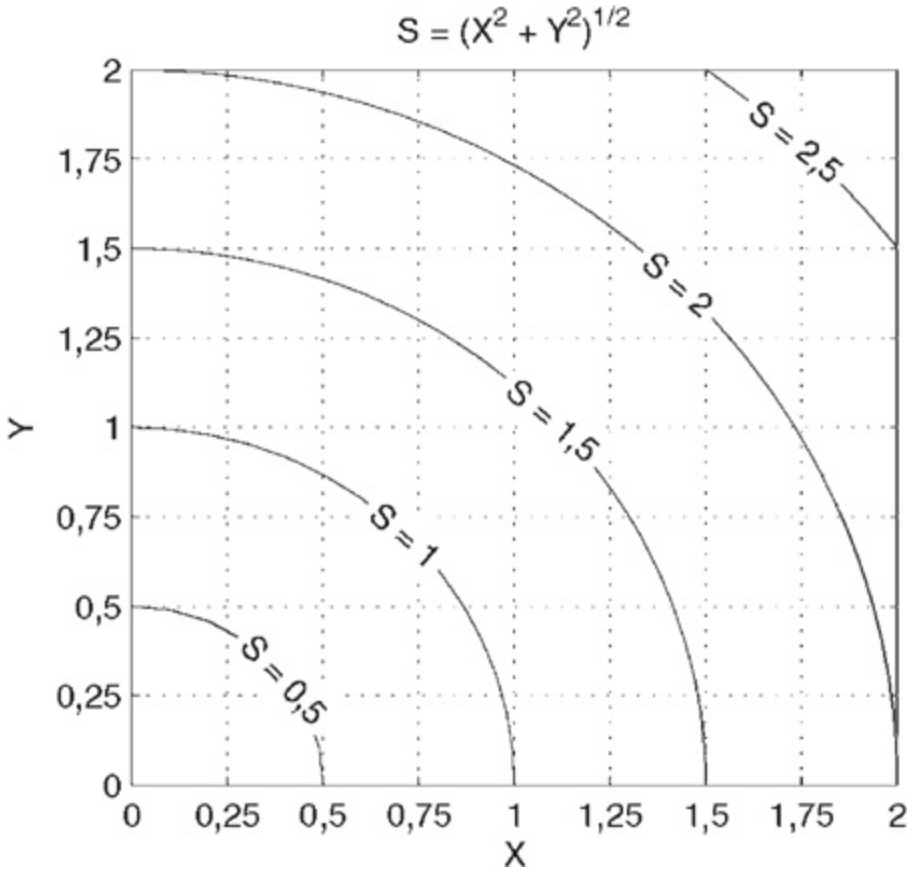


Figura 5.19 Gráficos de um espaço de projeto para o alongamento da tira de borracha de uma atiradeira, dado por $S = \sqrt{X^2 + Y^2}$. O mapa da esquerda mostra o "terreno"; o da direita é um *mapa de contorno* do "terreno", com curvas de nível.

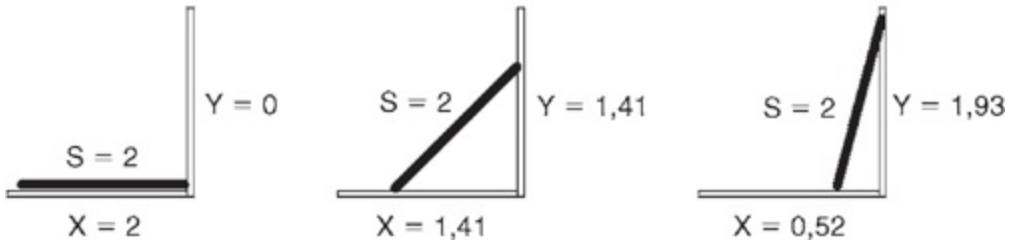


Figura 5.20 Três diferentes combinações de valores de X e Y que levam ao mesmo alongamento $S = 2$ da tira de borracha da atiradeira.

No Capítulo 2, mostramos um desenho esquemático de uma região aceitável, repetido na Figura 5.21, como um buraco no ambiente operacional, limitado por restrições; para ser considerado aceitável, um projeto deve caber no buraco. Da mesma forma, quando usamos

mapas para buscar um projeto aceitável, a região aceitável é uma área do mapa limitada por restrições, e um projeto aceitável é aquele que não ultrapassa os limites dessa região.

Figura 5.21 Desenho esquemático de uma região aceitável, segundo o Capítulo 2.

A título de ilustração, seria possível definir uma região aceitável em um mapa topográfico. Suponha, por exemplo, que um grupo de excursionistas estivesse procurando um local para acampar em uma montanha ao norte do vale situado em C4 na Figura 5.18, a uma altitude de pelo menos 3.000 pés. A Figura 5.22(a) mostra o conjunto de pontos que satisfazem esses requisitos.

Suponhamos agora que, como parte de um problema de lançamento, tenhamos que determinar o conjunto de valores de X e Y tais que Y seja maior ou igual a 1 m e o alongamento da tira de borracha seja pelo menos 2 m. A Figura 5.22(b) mostra a região aceitável, que está situada acima da reta $Y = 1$ e à direita da curva de nível $S = 2$. Qualquer ponto desta região satisfaz as restrições e, portanto, é uma solução aceitável.

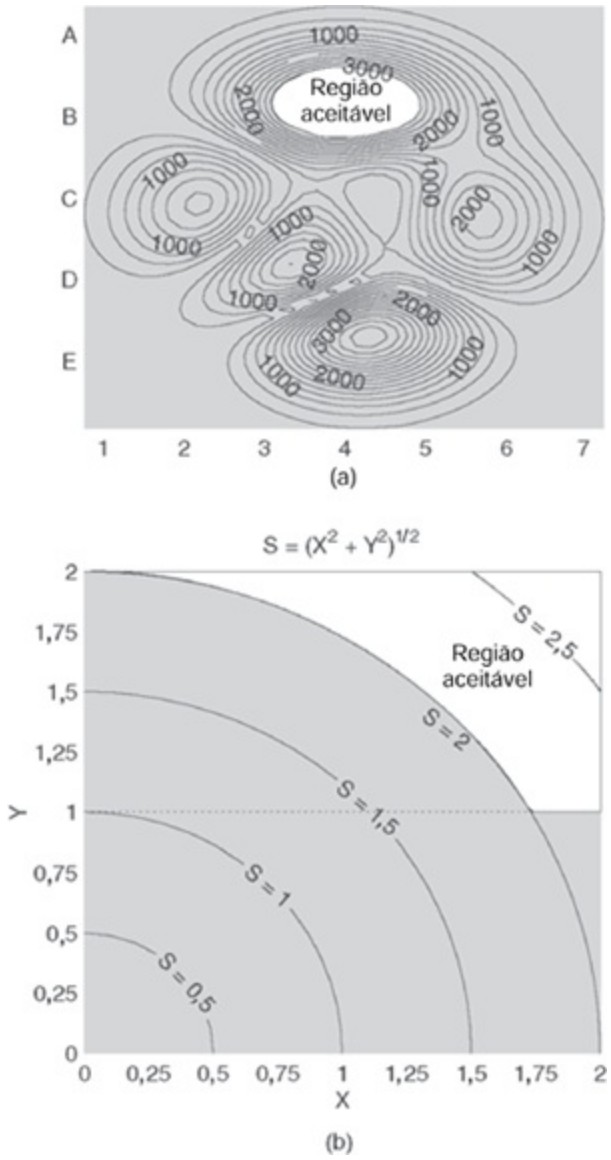


Figura 5.22 Regiões aceitáveis em um mapa topográfico (a) e um mapa de projeto de uma atiradeira (b). A região aceitável no mapa topográfico é o conjunto de pontos ao norte de C4 com uma altitude de 3.000 pés ou mais. A região aceitável no mapa de projeto é o conjunto de pontos para os quais $Y \geq 1$ e $S \geq 2$.

5.5.2 Definição do Problema e Plano de Ataque

O enunciado do nosso problema é o seguinte:

> Crie um modelo empírico para a atiradeira, executando no máximo nove testes, e use esse modelo para determinar parâmetros de lançamento que permitam atingir um alvo com uma precisão de mais ou menos 2 m, com a menor energia possível.

Como fizemos com o problema da bomba manual do Capítulo 4, vamos resolver o problema usando a estratégia apresentada no Capítulo 3. Nossa descrição será um tanto prolixa para ilustrar melhor o processo. Começamos por *definir* o problema, *explorar* as alternativas e *planejar* o ataque.

Definir A Figura 5.23 mostra um diagrama esquemático do problema e uma lista das variáveis. O modelo tem duas variáveis de projeto, que são os valores de X e Y, e duas variáveis comportamentais, que são a distância D atingida pela bola após o lançamento, e a energia E que é armazenada inicialmente na tira de borracha e depois usada para lançar a bola. Para simplificar o problema, não vamos incluir nenhuma variável ambiental no modelo, mas uma escolha lógica seria a velocidade do vento, que poderia ter uma influência significativa na distância atingida pela bola.

Explorar Lembremo-nos de que "explorar" é uma etapa de pré-planejamento, na qual procuramos responder às perguntas que se seguem.

O Problema Faz Sentido? Sabemos intuitivamente que existem vários pares de valores de X e Y que fazem a bola atingir a mesma distância, de modo que faz sentido escolher, entre esses pares de valores, aquele para o qual a energia, que está relacionada ao alongamento da tira de borracha, é a menor possível.

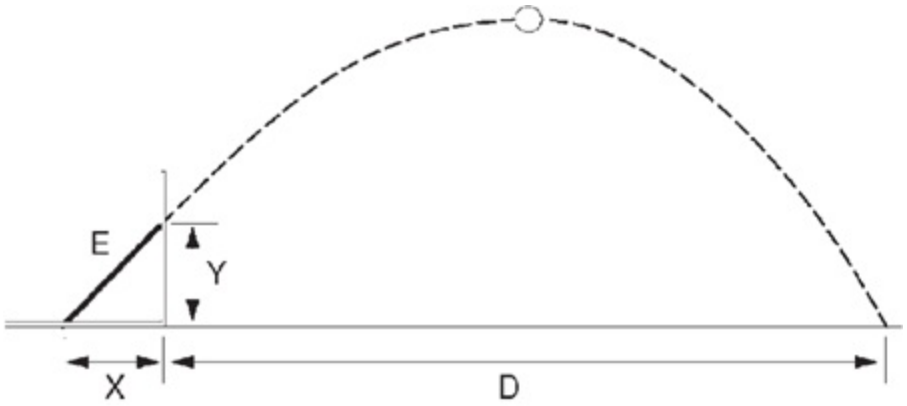
Suposições Deixar de incluir variáveis ambientais no modelo, como estamos fazendo, equivale a supor que essas variáveis não são importantes. Como já foi dito, o vento é um fator que pode ser importante, mas que foi deixado de fora para não complicar demais o problema.

Quais São os Conceitos Importantes e as Abordagens Possíveis? Para

resolver este problema, vamos usar um modelo empírico para a distância atingida em função de *X* e *Y*, com base em resultados experimentais, e um modelo teórico para a energia, com base no alongamento da tira de borracha.

Que Nível de Entendimento Está Sendo Testado? Entre as habilidades necessárias para resolver este problema estão as seguintes:

- aplicação de técnicas para criar um modelo empírico, como escolher pontos experimentais, plotar resultados e ajustar equações;
- análise do problema global para dividi-lo em partes;
- síntese de um plano para resolver o problema;
- avaliação para escolher os valores dos parâmetros de lançamento.



Categoria	Nome	Descrição
De projeto:	*X*	Ajuste horizontal
	Y	Ajuste vertical
Ambiental:	Nenhuma	Poderia ser a velocidade do vento
Comportamental:	*D*	Distância
	E	Energia

Figura 5.23 Variáveis usadas na análise do problema de lançamento.

Planejar Para resolver este problema, são necessários os seguintes passos:

1. Coletar dados a respeito da distância atingida em função dos dois parâmetros de lançamento, X e Y.
2. Fazer mapas da distância atingida em função dos parâmetros de lançamento usando gráficos bidimensionais, gráficos tridimensionais e mapas com curvas de nível.
3. Usar os mapas do item anterior para determinar os parâmetros de lançamento necessários para que a bola atinja uma certa distância, ignorando temporariamente a restrição de energia. Isso equivale a determinar a região aceitável nos mapas de distância.
4. Formular um modelo teórico simples para a energia em função dos parâmetros de lançamento, executar uma varredura de parâmetro e fazer mapas de energia.
5. Usar os mapas de distância e os mapas de energia para determinar parâmetros de lançamento que permitam atingir o alvo usando a menor energia possível.

5.5.3 Mapas do Espaço de Projeto

Nesta seção, começamos pela coleta de dados usando um experimento no qual é possível fazer variar tanto o valor de X como o valor de Y. Em seguida, examinamos várias abordagens para plotar os dados, como fazer um gráfico tridimensional e usar versões "achatadas" do gráfico, com apenas duas dimensões.

Coleta de Dados De acordo com o enunciado do problema, podemos fazer no máximo nove testes para criar um modelo para a distância atingida em função dos parâmetros de lançamento. Para cobrir de maneira uniforme toda a faixa de valores dos parâmetros, usamos três valores diferentes de X para cada um de três valores diferentes de Y. A Tabela 5.8 mostra os resultados dos nove testes.

Gráfico Tridimensional A Figura 5.24 mostra um gráfico tridimensional construído com os dados da Tabela 5.8. Os valores de *X* e *Y* foram plotados nos eixos *x* e *y*, respectivamente, e os valores de *D* foram plotados no eixo *z*. Enquanto no caso de uma única variável de entrada, os pontos experimentais definiam uma curva formada por segmentos de reta, neste caso eles definem uma *superfície* composta por *planos*. Observe que a altura da superfície aumenta quando aumentamos *X* ou *Y* e que o valor máximo da superfície corresponde ao ponto em que *X* e *Y* têm seus valores máximos.

Embora um gráfico tridimensional proporcione uma boa visão das tendências gerais no espaço de projeto, é difícil usá-lo para fazer previsões concretas. Quando havia apenas um parâmetro ajustável, para determinar a distância atingida para um dado valor de *X*, bastava fazer uma interpolação ao longo de um segmento de reta; agora, porém, teríamos que fazer uma interpolação no interior de um plano. Assim, em vez de usar gráficos tridimensionais diretamente, vamos "achatá-los" e transformá-los em duas famílias de gráficos bidimensionais, uma com uma vista lateral e outra com uma vista de cima.

TABELA 5.8 Resultados dos testes da atiradeira com dois parâmetros ajustáveis

N.º do Teste	x	y	Distância
1	0,5	1,00	4
2	1,0	1,00	18
3	1,5	1,00	36
4	0,5	1,25	10
5	1,0	1,25	26
6	1,5	1,25	45
7	0,5	1,50	16
8	1,0	1,50	34
9	1,5	1,50	52

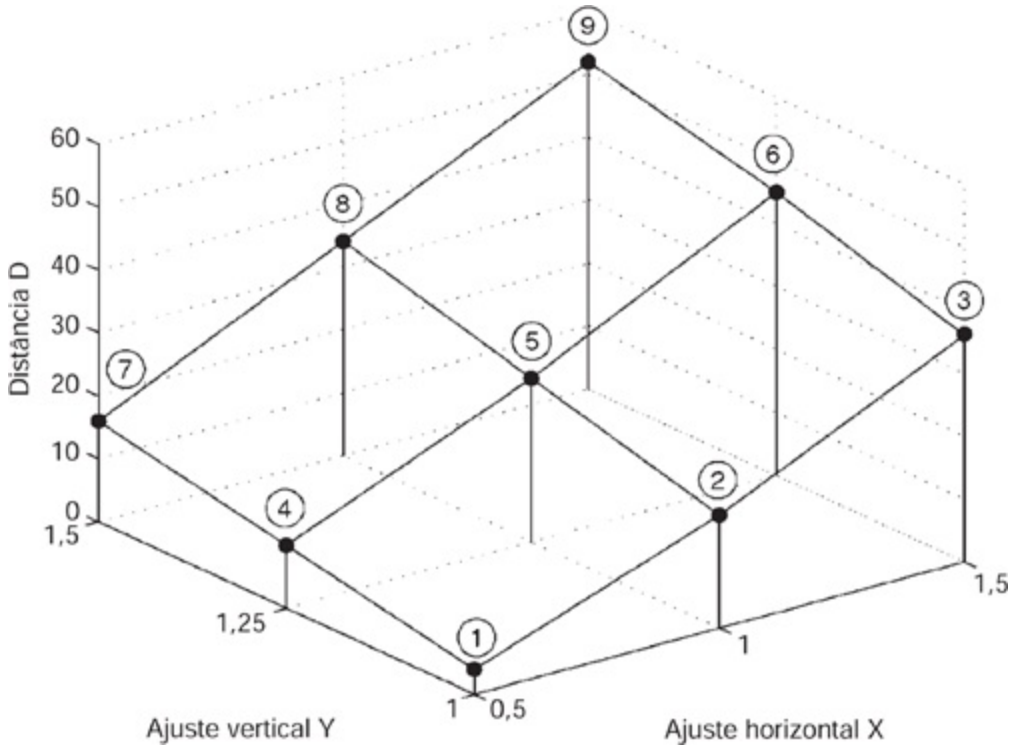


Figura 5.24 Gráfico tridimensional da distância atingida pela bola em função dos parâmetros X e Y. Os números dentro de círculos se referem aos testes da Tabela 5.8.

Vista Lateral Primeiro, vamos considerar uma vista lateral do gráfico tridimensional, olhando para o plano XD ao longo do eixo y. A Figura 5.25 mostra esta vista, que produz uma família de curvas de D em função de X com $Y = 1{,}00$, $Y = 1{,}25$ e $Y = 1{,}50$.

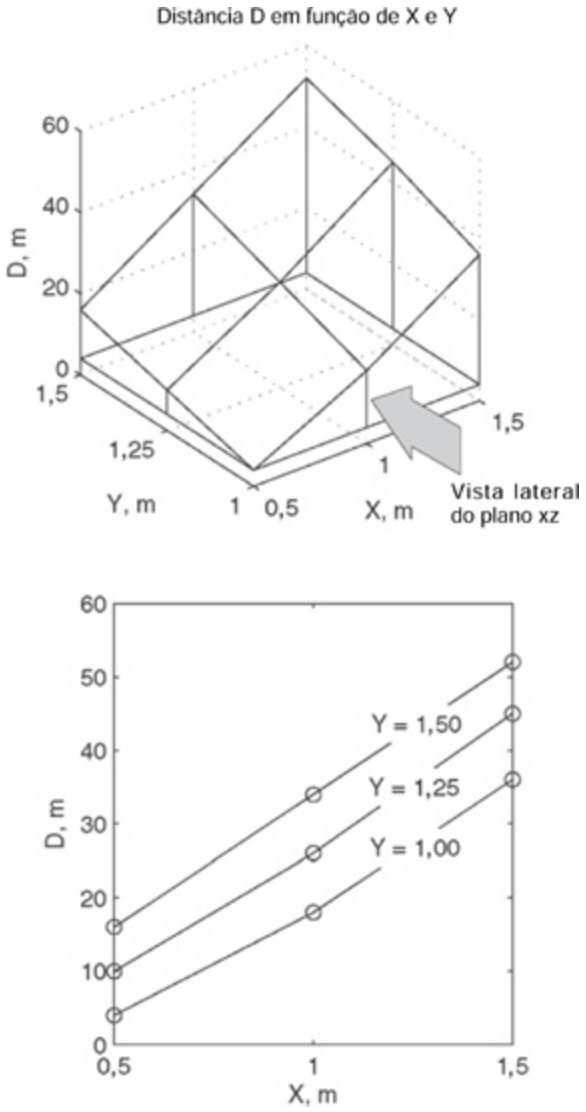


Figura 5.25 Esta vista lateral do gráfico tridimensional da figura anterior, olhando para o plano *xz* ao longo do eixo *y*, produz uma família de curvas de D em função de X com $Y = 1{,}00$, $Y = 1{,}25$ e $Y = 1{,}50$.

Para estimar o valor de D associado a valores intermediários de X e Y, precisamos agora fazer duas interpolações, uma para X e outra para Y, como mostra a Figura 5.26. Neste exemplo, estamos interessados em determinar o valor da distância D para $X = 0{,}8$ m e $Y = 1{,}4$ m. Como não existe uma curva para $Y = 1{,}4$, precisamos estimar a posição dessa curva. Fazemos isso através de uma interpolação linear entre as curvas de $Y = 1{,}25$ e $Y = 1{,}50$. Na figura, desenhamos uma pequena régua entre as duas curvas, mas, na

prática, o mesmo poderia ser feito com uma régua de verdade, bastando assinalar o ponto de interesse. Projetando este ponto para a esquerda até o eixo vertical, descobrimos que a distância atingida pela bola para esta combinação de valores de X e Y é de 24 m.

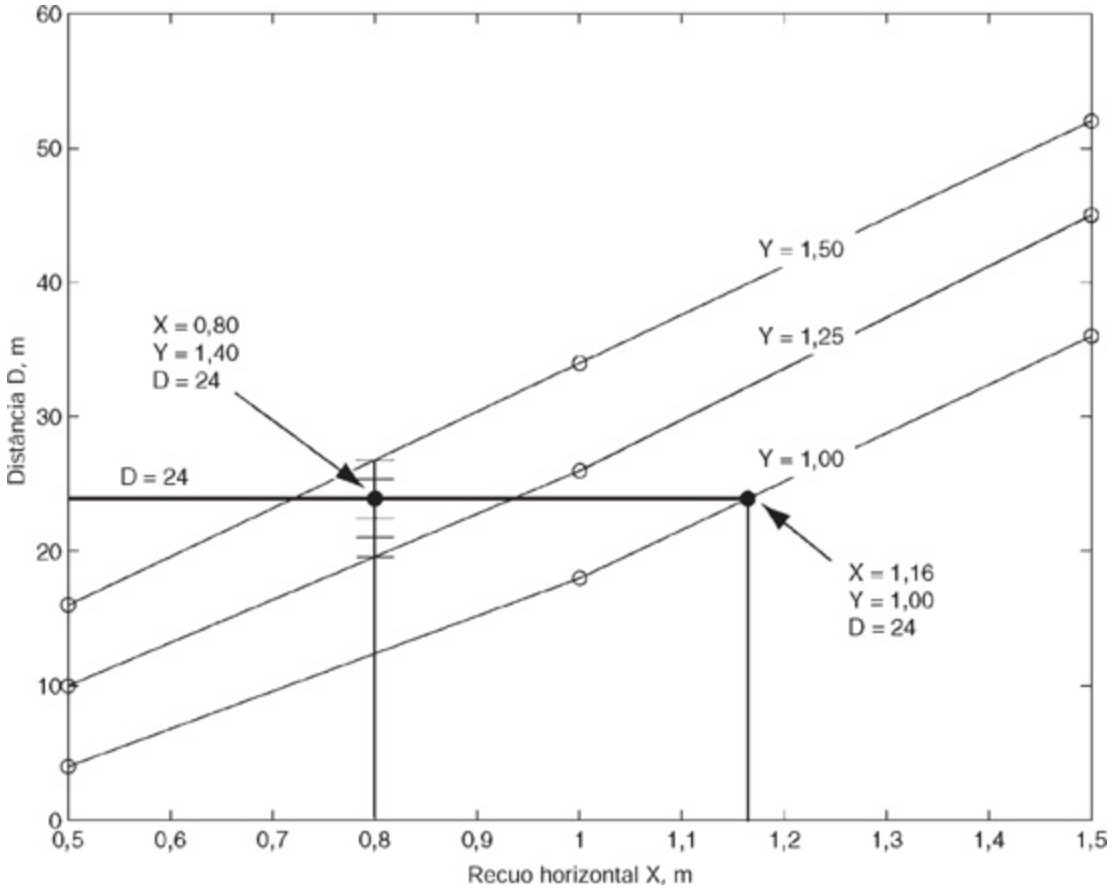


Figura 5.26 Interpolação usando uma vista lateral.

Um detalhe interessante é o fato de que qualquer ponto sobre a reta $D = 24$ representa uma combinação de valores de X e Y que faz com que a bola, ao ser lançada, atinja uma distância de 24 m. Assim, por exemplo, os parâmetros $X = 1{,}16$, $Y = 1{,}00$ também fazem com que a bola atinja um alvo situado a 24 m de distância. Em outras palavras, existem muitas soluções possíveis para o problema de encontrar os parâmetros adequados para lançar a bola a uma certa distância, enquanto no caso da atiradeira com apenas um parâmetro ajustável, há apenas uma resposta "correta" para o problema.

Mapa de Contorno A Figura 5.27 mostra um mapa de contorno da distância D em função de X e Y. Neste caso, as curvas de nível do mapa de contorno são curvas de D constante, ou seja, todos os pontos sobre uma das curvas representam combinações de valores de X e Y para os quais a bola é lançada à mesma distância. Isto mostra claramente que existe um número infinito de combinações de ajustes que podem ser usadas para lançar a bola a uma dada distância.

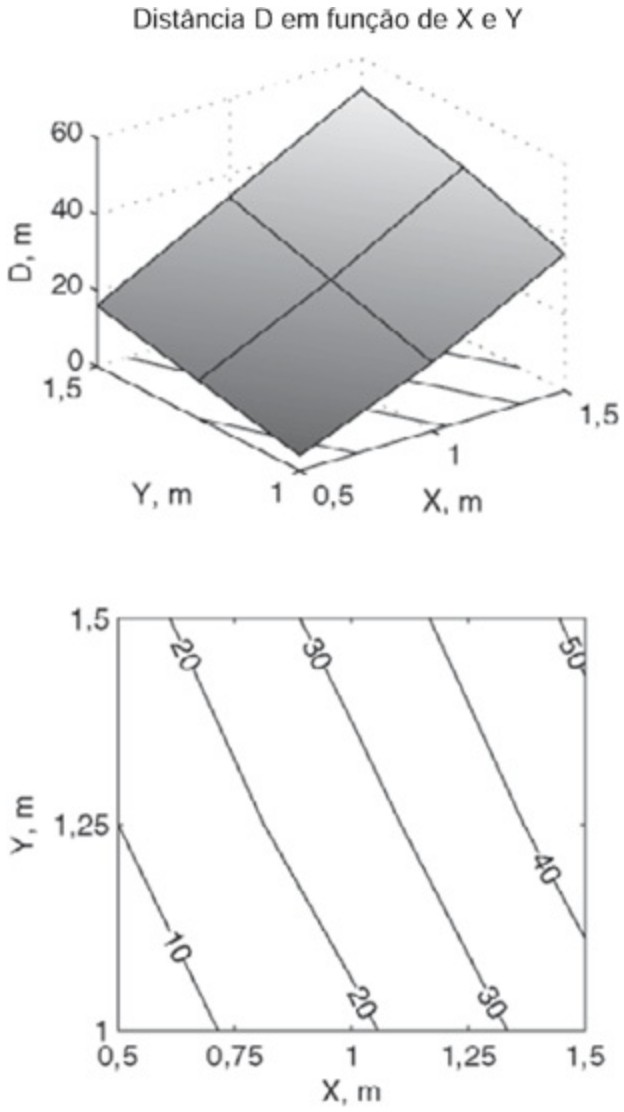


Figura 5.27 Mapa de contorno para a distância D em função de X e Y.

Se a distância desejada não consta do mapa, podemos acrescentar novas curvas de nível. Suponha, por exemplo, que estamos

interessados em descobrir quais são as combinações de ajustes para as quais a bola é lançada a uma distância de 24 m. A Figura 5.28 mostra a inclusão, no mapa, da curva de nível $D = 24$ entre as curvas $D = 20$ e $D = 30$. Os dois pontos marcados são os mesmos da Figura 5.26.

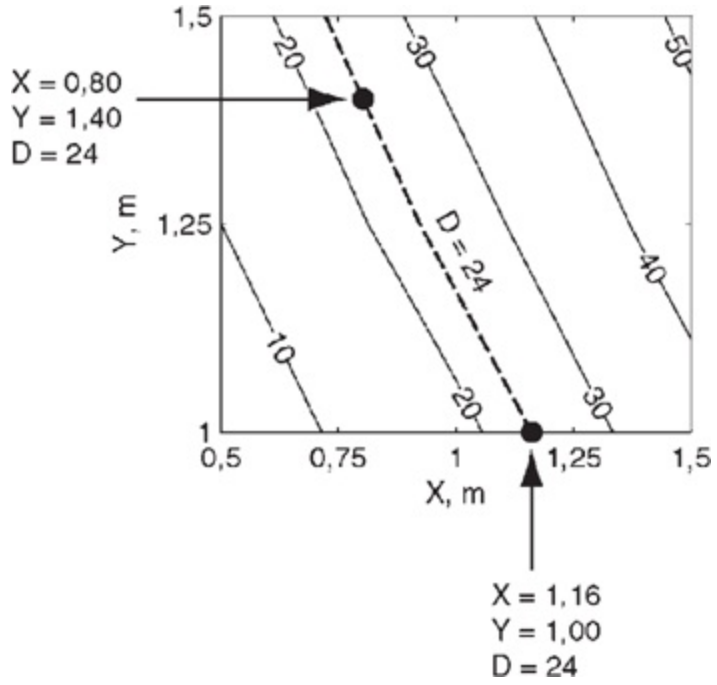


Figura 5.28 Interpolação usando um mapa de contorno. A curva de nível $D = 24$ é mostrada como uma linha tracejada. Os dois pontos marcados são os mesmos da Figura 5.26.

5.5.4 Determinação de Parâmetros para Atender a Restrições de Distância

Depois de obtidos os mapas da distância D em função dos parâmetros X e Y, o passo seguinte consiste em determinar os parâmetros necessários para atingir o alvo. Nesta seção, vamos mostrar como é possível plotar restrições da distância, nos mapas, em função dos parâmetros de lançamento, começando pelo exemplo mais simples de lançar uma bola além de uma certa distância para depois examinar o caso de lançar uma bola nas proximidades de um alvo.

Lançamento de uma Bola Além de uma Certa Distância Como primeiro exemplo, suponha que queremos determinar os valores de X e Y para que a bola seja lançada a pelo menos 40 m de distância. Matematicamente, podemos expressar essa restrição da seguinte forma:

Restrição 1: $D \geq 40$

Como o maior valor possível tanto de X como de Y é 1,5 m, os valores aceitáveis de X e Y estão sujeitos a restrições adicionais:

Restrição 2: $X \leq 1{,}5$

Restrição 3: $Y \leq 1{,}5$

Cada uma dessas restrições corresponde a um limite da região aceitável. A Figura 5.29 mostra essas restrições e a região aceitável resultante, desenhadas em um mapa de contorno de D em função de X e Y. O limite associado à primeira restrição é a curva de nível $D = 40$; qualquer ponto à direita dessa curva é aceitável em relação a essa restrição. A segunda restrição é satisfeita por qualquer ponto à esquerda da reta $X = 1{,}5$, que está na extremidade direita do mapa; a terceira restrição é satisfeita por qualquer ponto abaixo da reta $Y = 1{,}5$, que está na extremidade superior do mapa. A região aceitável resultante é a região triangular não sombreada na extremidade superior direita do mapa. Assim, qualquer combinação de X e Y nesta região faz com que a bola seja lançada a uma distância maior que 40 m.

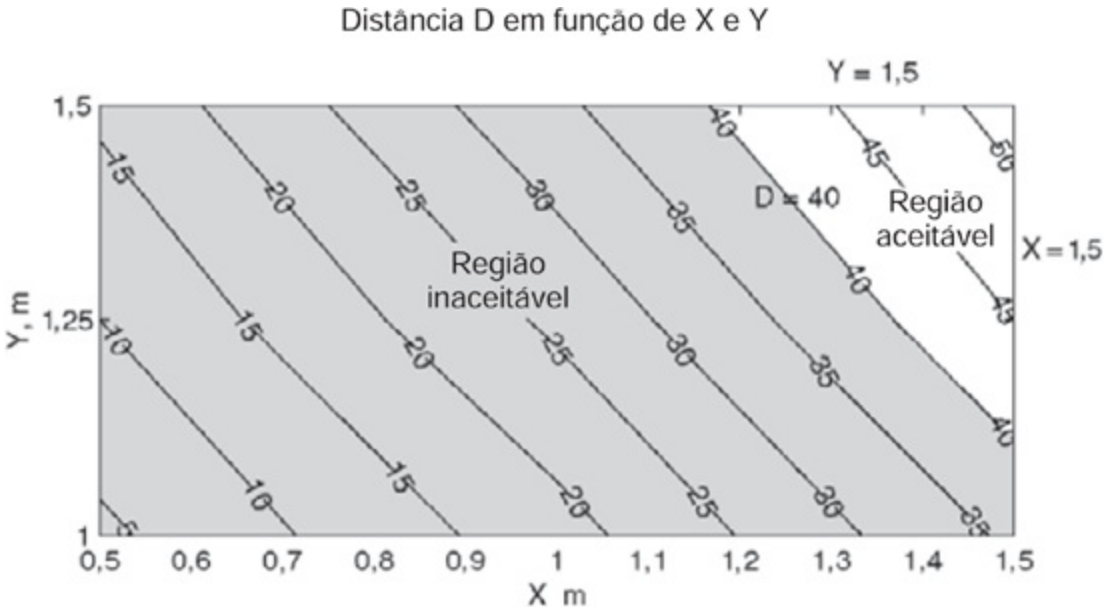


Figura 5.29 Região aceitável dos valores de X e Y para lançar a bola a mais de 40 m de distância.

Outra informação que pode ser obtida imediatamente na Figura 5.29 é que é impossível lançar a bola a mais de 40 m de distância escolhendo para Y o valor mínimo de 1 m. Se as escolhas para Y forem limitadas aos três valores usados no teste, 1 m, 1,25 m e 1,5 m, um lançamento de mais de 40 m só será possível com os últimos dois valores.

Lançamento da Bola nas Vizinhanças de um Alvo No exemplo seguinte, vamos considerar os valores de X e Y para que a bola seja lançada nas vizinhanças de um alvo. Suponha que queremos lançar a bola a menos de 2 m de um alvo situado a 20 m de distância. Podemos expressar este problema usando quatro restrições:

Restrição 1: $D \geq 18$
Restrição 2: $D \leq 22$
Restrição 3: $X \leq 1{,}5$
Restrição 4: $Y \leq 1{,}5$

A Figura 5.30 mostra a região aceitável no mapa de contorno. Neste caso, a região aceitável é uma faixa no entorno da curva de nível $D = 20$. Mais uma vez, existem muitas combinações de X e Y

que satisfazem as restrições. Vamos considerar três desses pontos, identificados como A, B e C na Figura 5.30, cujas coordenadas aparecem na Tabela 5.9.

Podemos também usar uma vista lateral para localizar os pontos aceitáveis para lançar a bola a uma distância dada. A Figura 5.31 ilustra o uso de uma vista lateral para determinar os valores de *X* e *Y* que permitem lançar uma bola a uma distância de 20 m. Os pontos A, B e C são os mesmos da Figura 5.30 e da Tabela 5.9.

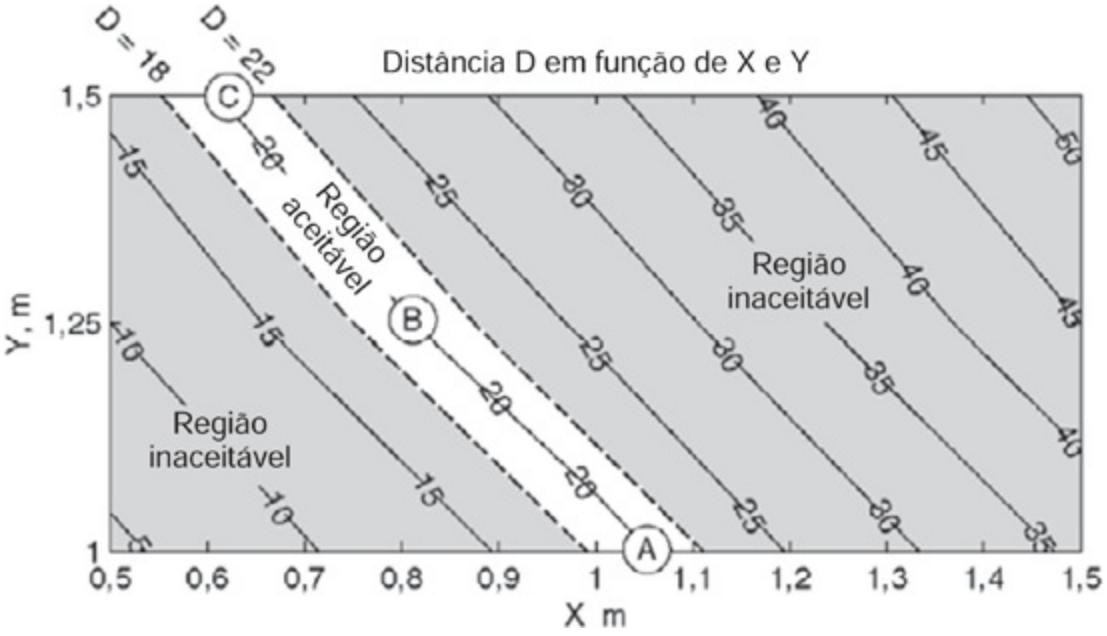


Figura 5.30 Região aceitável dos valores de *X* e *Y* para lançar a bola a menos de 2 m de um alvo situado a 20 m de distância. A, B e C são três pares aceitáveis de parâmetros, cujos valores aparecem na Tabela 5.9.

TABELA 5.9 Possíveis valores de *X* e *Y* para lançar uma bola de *softball* a 20 m de distância. Os pontos estão plotados na Figura 5.30

	X	***Y***
A	1,05	1,00
B	0,81	1,25
C	0,61	1,50

5.5.5 Determinação de Parâmetros para Atender à Restrição de Energia Mínima

Agora que identificamos a região aceitável de valores de X e Y que permitem lançar uma bola a uma distância dada, estamos prontos para selecionar, entre esses pontos, aqueles para os quais a energia é mínima. Nossa estratégia será fazer um mapa da energia em função dos parâmetros de lançamento, semelhante ao que foi preparado anteriormente para a distância em função dos parâmetros de lançamento. Uma vez de posse dos dois mapas, vamos determinar primeiro a região aceitável no mapa da distância e depois usar o mapa da energia para localizar os pontos dessa região nos quais a energia é mínima.

Modelo da Energia em Função dos Parâmetros de Lançamento Para criar um modelo teórico da energia em função dos parâmetros de lançamento, vamos supor que a tira de borracha se comporte como uma mola ideal, ou seja, que o alongamento varia linearmente com a força aplicada (Lei de Hooke), o que constitui uma aproximação razoável para a faixa de valores de alongamento que vamos considerar. No caso de uma mola ideal, a energia armazenada é proporcional ao *quadrado* do alongamento. Isso acontece porque a energia armazenada é igual ao trabalho necessário para alongar a mola, que, por sua vez, é proporcional à força utilizada e ao alongamento sofrido pela mola. Como, de acordo com a Lei de Hooke, a força é proporcional ao alongamento, o alongamento aparece duas vezes no cálculo do trabalho e, portanto, no cálculo da energia armazenada.

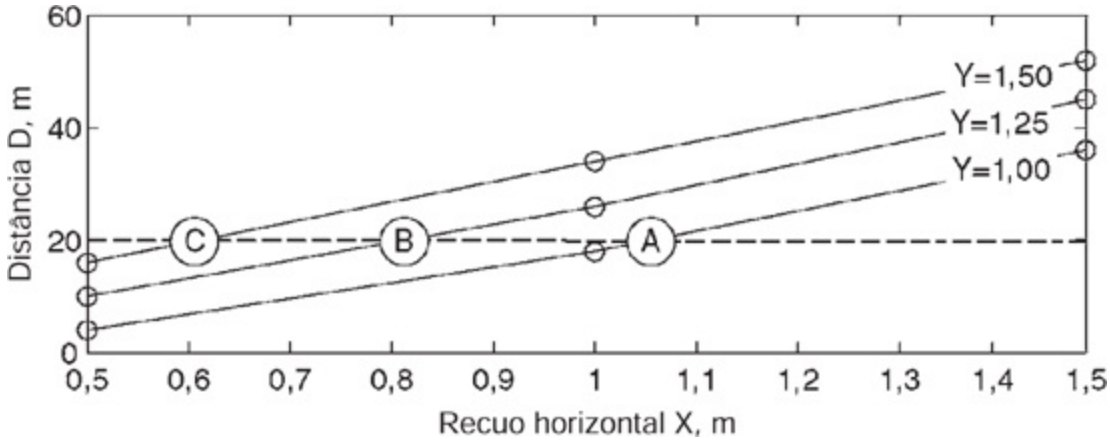


Figura 5.31 Vista lateral usada para identificar os valores de X e Y necessários para lançar uma bola a 20 m de distância. Os pontos A, B e C são os mesmos da Figura 5.30 e da Tabela 5.9.

Para determinar a energia, precisamos de outras informações além das que aparecem no enunciado do problema. Como estamos interessados apenas na energia relativa, podemos usar o valor do quadrado do alongamento como indicador. Desprezando a folga da tira de borracha, esse alongamento é dado pelo teorema de Pitágoras. Assim, vamos supor que a energia relativa é expressa através da equação

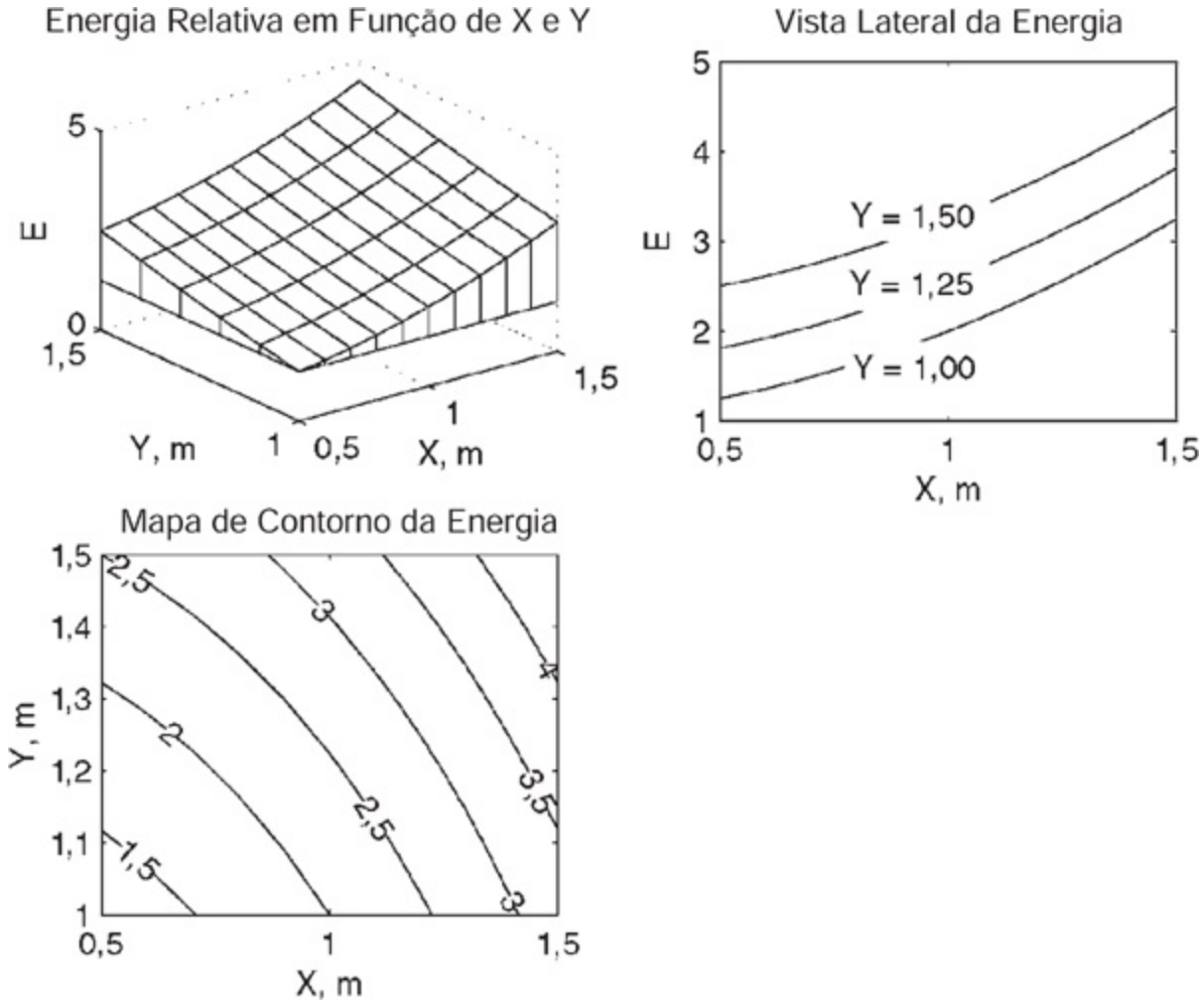


Figura 5.32 Mapas da energia relativa em função dos parâmetros X e Y.

$$E = X^2 + Y^2$$

A Figura 5.32 mostra um gráfico tridimensional, uma vista lateral e um mapa de contorno da energia em função de X e Y. A superfície tem forma côncava, e as curvas de Y constante e de energia constante têm uma curvatura mais pronunciada que nos mapas de distância. No mapa de contorno, a menor energia está no canto inferior esquerdo, e a maior está no canto superior direito.

Combinação dos Mapas de Distância e Energia De posse dos mapas de distância e energia em função dos parâmetros de lançamento X e Y, podemos finalmente atacar o problema de determinar os parâmetros

que satisfazem simultaneamente as restrições de distância e energia. Para isso, precisamos combinar a região aceitável em um mapa de distância com a região aceitável em um mapa de energia. A Figura 5.33 ilustra o processo no caso de serem usados dois mapas de contorno. Um mapa de contorno da distância em função de X e Y foi desenhado no alto da figura; mais abaixo, foi desenhado um mapa de contorno da energia em função de X e Y. Observe que os eixos X e Y dos dois mapas são iguais, de modo que os dois mapas se alinham perfeitamente. A região aceitável do mapa de distância foi sombreada no mapa de cima. Como os eixos dos mapas estão alinhados, podemos projetar essa região aceitável no mapa de energia. Depois que a região aceitável do mapa de distância é projetada no mapa de energia, podemos determinar o ponto de energia mínima localizando o ponto da região aceitável do mapa de distância que está sobre a curva de nível de energia de menor valor. No exemplo que estamos discutindo, esse ponto está no canto inferior esquerdo da região aceitável.

Para ilustrar com mais detalhes o processo de combinar os mapas de distância e energia, vamos usar o mesmo exemplo da Seção 5.5.4, onde determinamos as combinações de parâmetros de lançamento para atingir um alvo a 20 m de distância. Nesse exemplo, criamos duas versões dos mapas, o mapa de contorno da Figura 5.30 e a vista lateral da Figura 5.31, e definimos regiões aceitáveis nos dois mapas. Além disso, identificamos três pontos, A, B e C, no interior dessas regiões. A Tabela 5.10 mostra as coordenadas dos três pontos e os valores correspondentes da energia relativa $E = X^2 + Y^2$. De acordo com a tabela, o ponto A é o que está associado à menor energia.

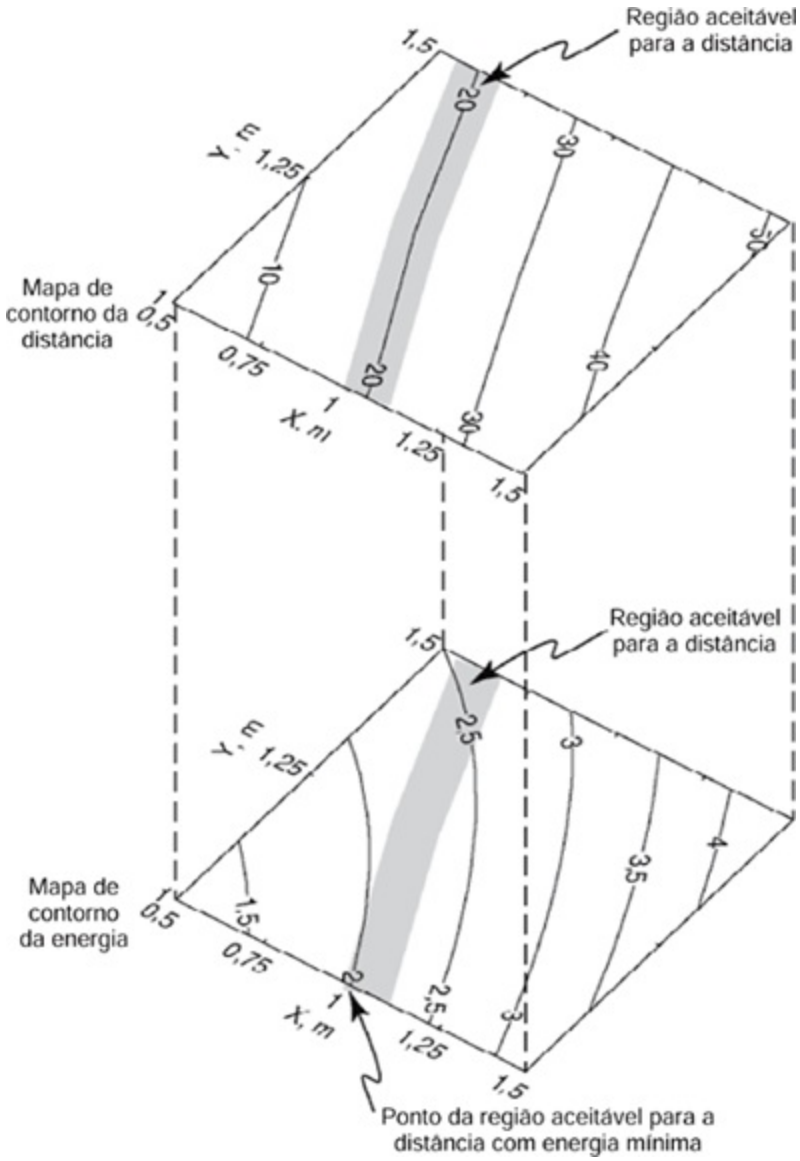


Figura 5.33 Combinação de uma região aceitável do mapa de distância sobre um mapa de energia.

Para superpor a região aceitável do mapa de distância à região aceitável do mapa de energia, podemos plotar os pontos A, B e C no mapa de energia. A Figura 5.34 mostra o resultado em um mapa de contorno e em uma vista lateral. A linha tracejada que liga os pontos A, B e C no mapa de contorno corresponde à curva de nível $D = 20$, que está no centro da região aceitável. O mapa de contorno, em particular, mostra claramente a variação de energia de um ponto para outro, com o ponto A muito próximo da curva de nível $E = 2$,

enquanto o ponto C está próximo da curva de nível $E = 2{,}5$.

Podemos nos perguntar se existem pontos ao longo desta linha com menor energia que o ponto A. Para responder a esta pergunta, percorremos a curva de nível correspondente a $D = 20$ para verificar qual é o ponto que está mais próximo da curva de nível correspondente a $E = 2$. Visualmente, o ponto mais próximo parece ser o ponto A, ou, pelo menos, um ponto muito próximo do ponto A.

TABELA 5.10 Energia relativa para três combinações de parâmetros que permitem lançar uma bola a 20 m de distância

	X	Y	$E = X^2 + Y^2$	
A	1,05	1,00	0,61	Menor energia
B	0,81	1,25	2,22	
C	0,61	1,50	2,62	

Uma Solução Geral para Energia Mínima Com base no exemplo anterior, podemos nos sentir tentados a concluir que o valor de Y para lançar uma bola a qualquer distância com energia mínima é 1 m. Para verificar se isso é verdade, podemos traçar outras curvas de nível de distância no mapa de contorno da energia e determinar o ponto em cada curva de nível de distância que corresponde à menor energia. A Figura 5.35 ilustra esse tipo de análise. Como fizemos para a curva de nível $D = 20$ na Figura 5.34, podemos examinar visualmente o mapa e determinar o ponto em cada curva de nível para o qual a energia é a menor possível. Examinando as curvas de nível $D = 30$ e $D = 40$, observamos que os pontos de energia mínima, indicados por círculos escuros na figura, *não* correspondem a $Y = 1$. Fazendo passar uma linha por esses pontos, obtemos os parâmetros X e Y correspondentes à energia mínima para atingir um alvo a qualquer distância, *dentro dos limites da atiradeira*. No caso de algumas distâncias, não podemos usar o valor mínimo da energia definido por essa reta porque os limites dos parâmetros da atiradeira

seriam excedidos. Assim, por exemplo, para atingir um alvo a 50 m de distância usando o mínimo de energia, seria necessário usar um recuo X maior que 1,5 m, ou seja, maior que a base da atiradeira. Nesse caso, o menor valor possível de energia é conseguido fazendo $X = 1{,}5$, como está indicado na figura por um círculo claro. Da mesma forma, o ponto de energia mínima para atingir um alvo a 10 m exigiria um valor de Y abaixo do menor valor para o qual a atiradeira pode ser ajustada, que é $Y = 1$ m.

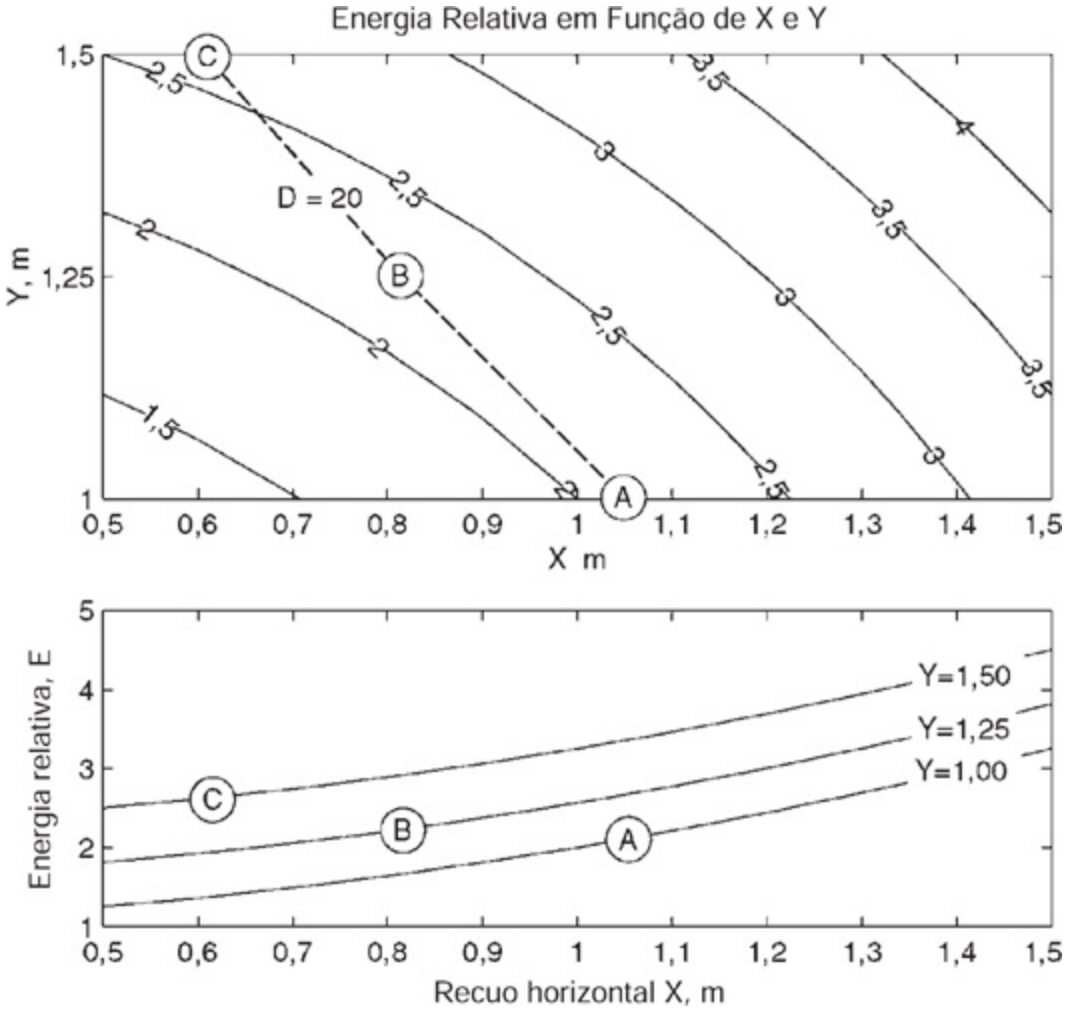


Figura 5.34 Mapa de contorno e vista lateral para a energia em função de X e Y, mostrando três pontos para os quais $D = 20$.

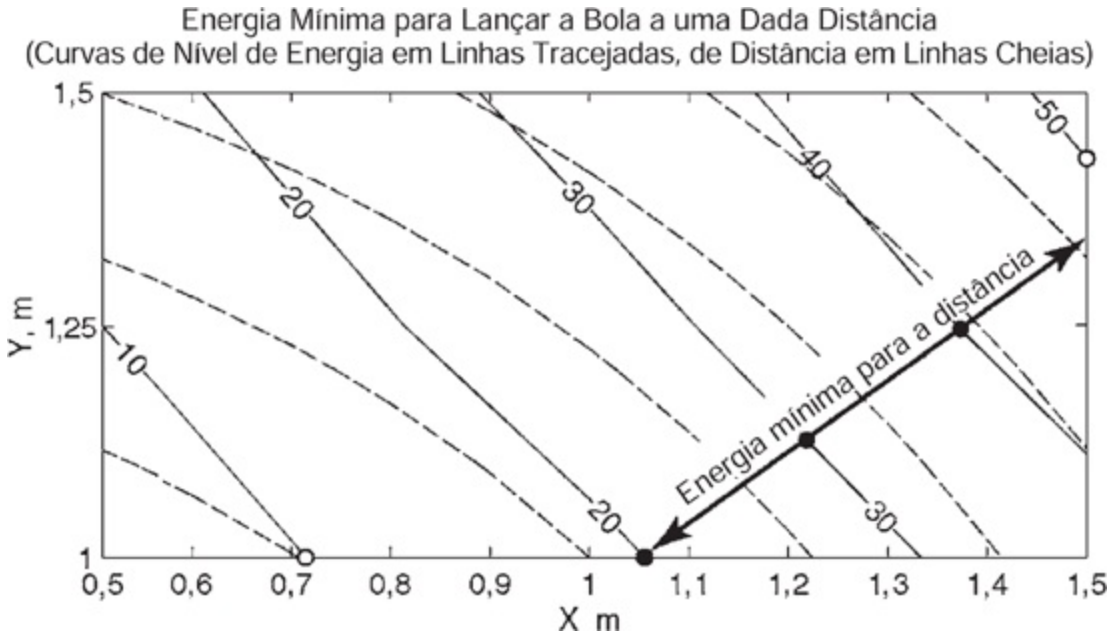


Figura 5.35 Determinação dos parâmetros para lançar uma bola a qualquer distância com energia mínima.

Observando a linha de energia mínima da Figura 5.35, vemos que ela corresponde aos pontos em que *X* é aproximadamente igual a *Y*, ou seja, em que o ângulo de lançamento é de aproximadamente 45 graus. A Figura 5.36 ajuda a explicar por quê. Suponha que seja executada uma série de testes nos quais o ângulo de lançamento é aumentado gradualmente de um ângulo pequeno até quase a vertical, mantendo constante o alongamento da tira de borracha e, portanto, a energia. A distância atingida pela bola aumenta com o aumento do ângulo de lançamento até um certo ponto, e depois começa a diminuir. Acontece que o ângulo correspondente à distância máxima é ligeiramente menor que 45 graus; na verdade, seria exatamente 45 graus se não fosse o *arrasto* (resistência do ar), que, é claro, está sempre presente. Você pode confirmar este fato fazendo variar o ângulo do jato de uma mangueira de jardim; o jato atinge a distância máxima quando o ângulo é de aproximadamente 45 graus. Assim, para lançar uma bola a qualquer distância com o mínimo de energia, o ângulo de lançamento deve ser de aproximadamente 45 graus.

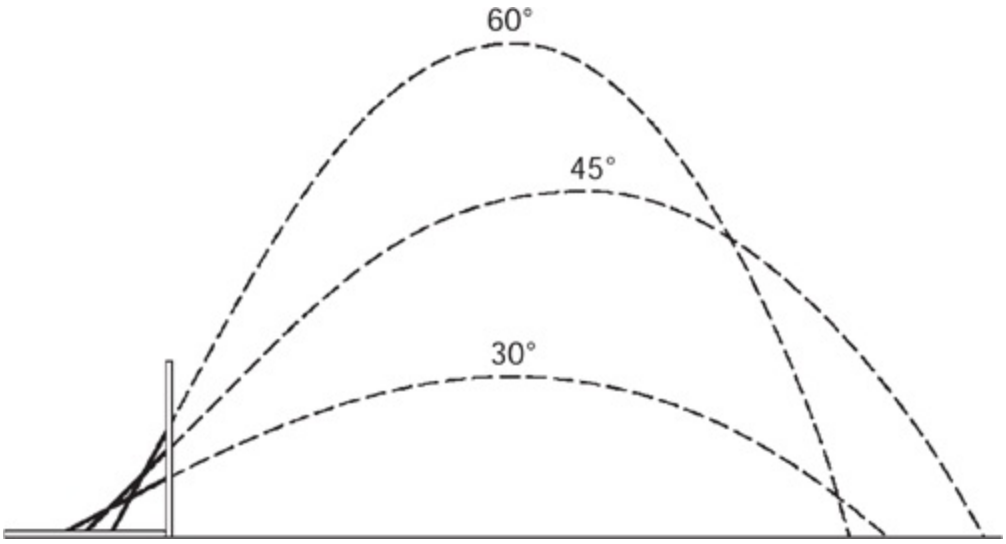
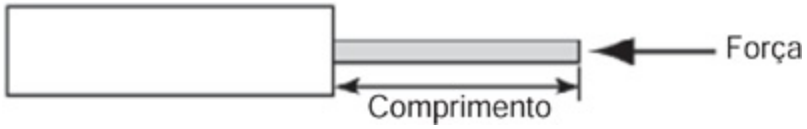


Figura 5.36 Trajetórias de uma bola de *softball* lançada com ângulos diferentes, mas com a mesma energia (mesmo alongamento da tira de borracha). A distância atingida é máxima quando o ângulo de lançamento é de aproximadamente 45 graus.

PROBLEMAS

1. **Ajuste da Teoria aos Dados para uma Mola Desconhecida**
   O sistema da figura, que se comporta como uma mola, é formado por uma haste e um cilindro que contém um mecanismo desconhecido. A tabela mostra valores experimentais do comprimento exposto da haste para vários valores da força aplicada.



   (a) Qual é a teoria que descreve melhor a relação entre os dois parâmetros?
   - o comprimento é inversamente proporcional à força
   - o comprimento é inversamente proporcional à raiz quadrada da força

- o comprimento é inversamente proporcional ao quadrado da força

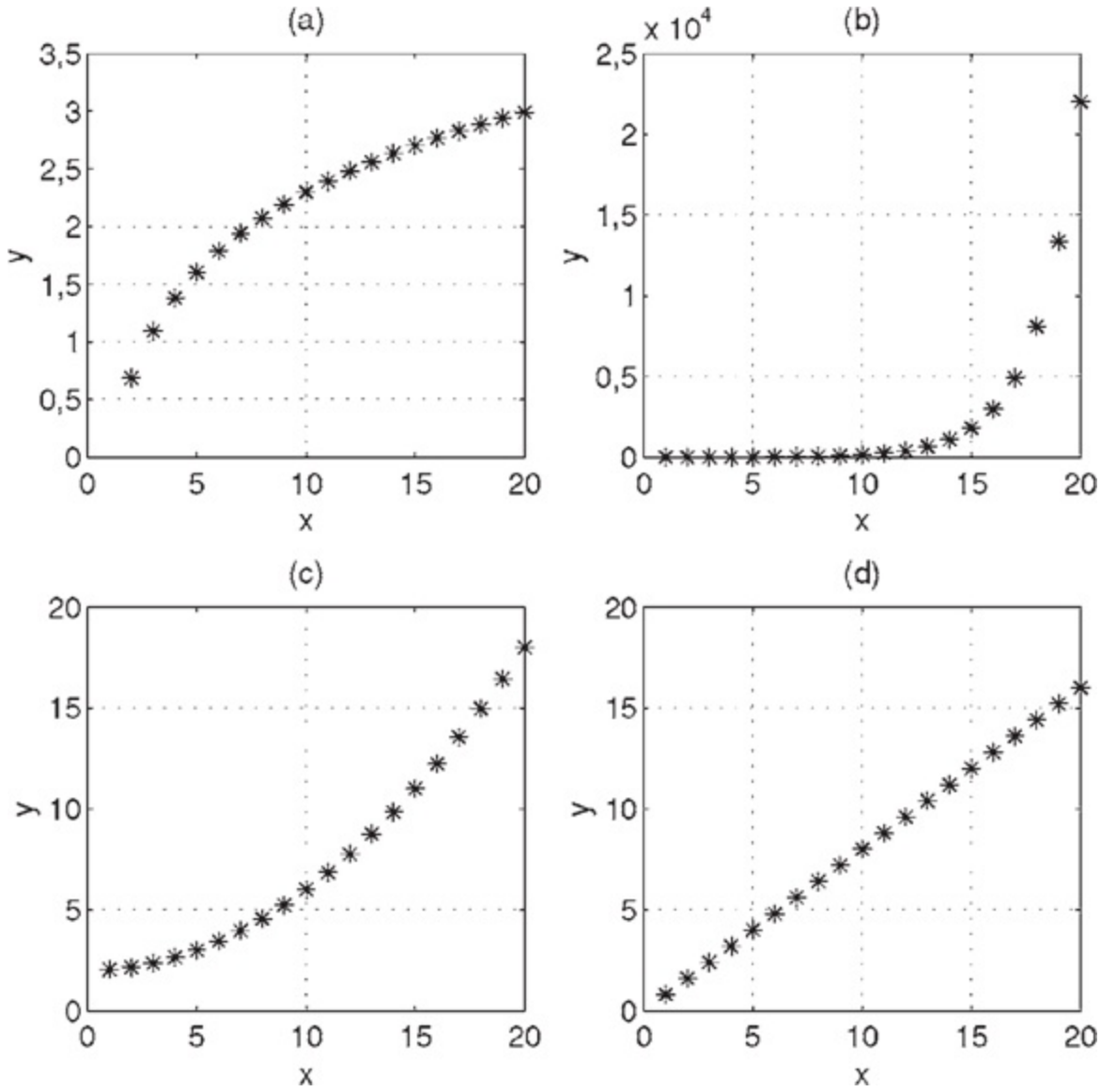
Para responder à pergunta, use um método gráfico para transformar os dados e procure a reta que melhor se ajusta aos pontos experimentais.

Comprimento (cm):	0,0	1,0	2,0	3,0
Força (N):	2,36	0,72	0,27	0,14

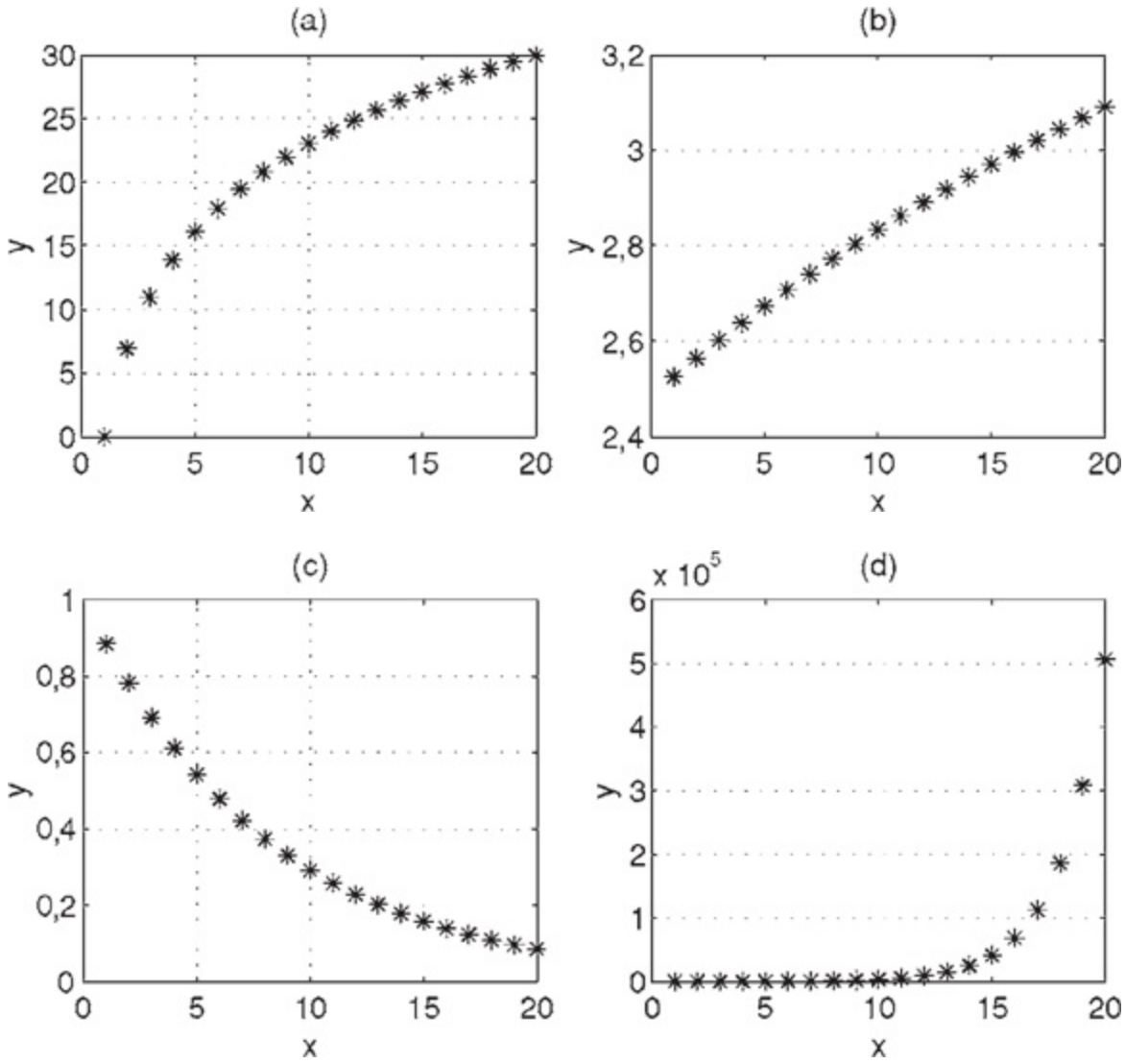
(b) Escreva uma equação para o valor da força em função do comprimento com base no resultado do item (a).

2. Ajuste de um Modelo aos Dados Experimentais

Associe cada gráfico ao modelo matemático da forma $y = f(x)$ que melhor se ajusta aos dados. A função $f(x)$ pode ser logarítmica, exponencial, linear ou quadrática.



3. Ajuste de uma Função a Pontos Experimentais



Associe as funções aos gráficos:

(a) $y = \ln(12 + x/2)$

(b) $23e^{0,5x}$

(c) $e^{-0,123x}$

(d) $10 \ln(X)$

4. Modelagem do Arrasto em um Túnel de Vento

O arrasto D em um modelo em escala de um foguete é medido para vários valores da velocidade v em um túnel de vento. Os resultados de quatro experimentos são os seguintes:

Nº do Experimento, j:	1	2	3	4
Velocidade, v_j (m/s):	20	25	30	40
Arrasto, D_j (N):	2,5	3,9	5,6	10,1

(a) Calcule a velocidade média.

(b) Calcule o desvio-padrão da velocidade.

(c) Plote D em função de V.

(d) Plote o logaritmo de D em função do logaritmo de V.

(e) Um colega afirma que o modelo matemático do arrasto em função da velocidade é

$$D = kV^c,$$

onde k e c são constantes. Depois de examinar os gráficos, você tende a concordar com o colega?

(f) Determine a equação da reta que passa pelos pontos extremos do gráfico do item (d).

5. Precisão de uma Medida

Uma régua de um metro é dividida em centímetros e cada centímetro é dividido em milímetros. Estime o grau de precisão com o qual um observador humano é capaz de medir o comprimento de um pedaço de barbante de aproximadamente meio metro de comprimento. A resposta deve estar na forma de $\pm$ um valor numérico, com as unidades.

6. Erro de Modelagem

Suponha que o seguinte modelo teórico especifica a posição x em função do tempo t para um objeto de massa m que se move sob o efeito de uma força contrária F com velocidade inicial v_0 a partir de uma posição inicial x_0:

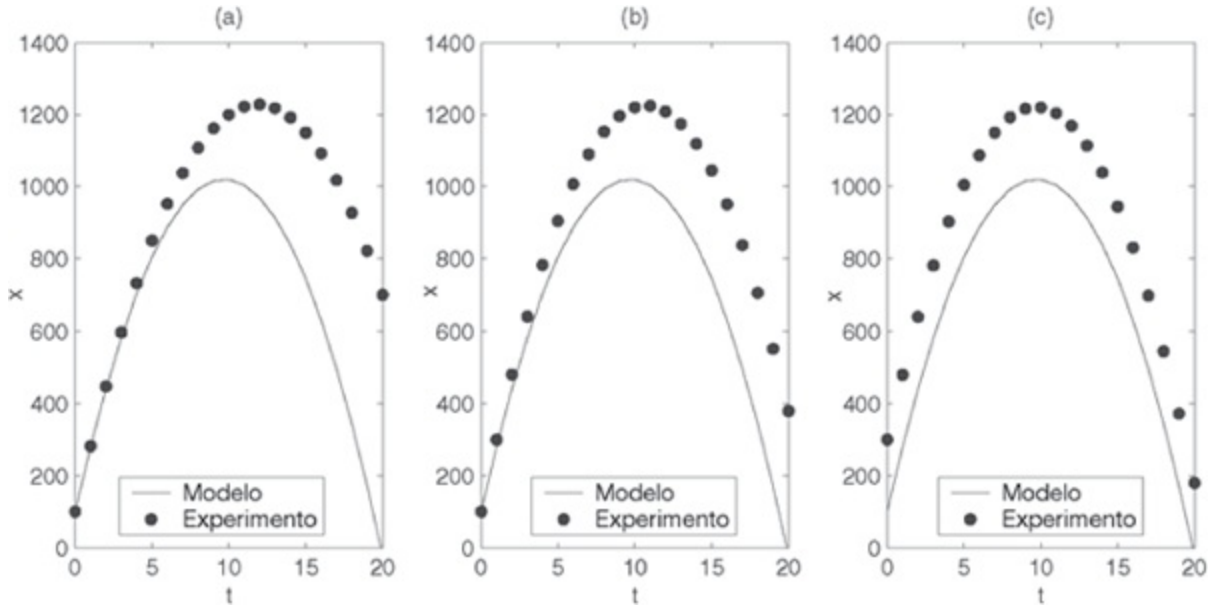
$$x(t) = \frac{F}{2m}t^2 + v_0 t + x_0.$$

Os três gráficos a seguir, (a), (b) e (c), mostram os valores

medidos de x em função de t em três experimentos diferentes, comparados com o valor de x previsto pelo modelo. Qual dos três gráficos corresponde a que tipo de erro de modelagem?

- a posição inicial x_0 do objeto foi registrada incorretamente;
- a força F aplicada ao objeto foi menor que o valor usado no modelo;
- a velocidade inicial v_0 do objeto foi menor que o valor usado no modelo.

Justifique suas respostas.



7. Causas de Erro ao Criar Modelos Empíricos

Cite possíveis causas de erro ao criar modelos empíricos nas seguintes situações:

(a) distância que um carro percorre depois que os freios são acionados em função da velocidade inicial;

(b) distância que uma bola de golfe atinge em função do tipo de taco utilizado;

(c) tempo que a água em uma chaleira leva para ferver em função da quantidade de água na chaleira.

8. Medida de um Erro Experimental

A leitura de valores medidos sempre está sujeita a erros. Se o erro envolvido em uma certa medida é constante, independentemente do valor medido, é preferível planejar um experimento para que os valores medidos sejam grandes ou pequenos (supondo que todos os outros fatores permaneçam constantes)? Suponha, por exemplo, que um cilindro graduado de 1.000 mL, usado para medir líquidos, tenha um erro de medida de ± 0,05 mL. É preferível planejar um experimento que use 50 mL de água ou 500 mL de água? Justifique sua resposta.

9. Estimativa de um Valor Médio

Na Seção 5.4.2, o valor médio da distância atingida pela bola foi calculado usando-se os dados da Tabela 5.5. Você agora vai calcular a média usando um método mais rápido (este método é especialmente útil no caso de números muito grandes e razoavelmente próximos):

- faça uma estimativa da média (use um valor inteiro, para facilitar)
- calcule a diferença entre cada distância e a média estimada (o sinal é importante)
- some essas diferenças e calcule a média
- some este valor à média estimada para obter a média correta

10. Cálculo da Média e do Desvio-Padrão

Calcule a média e o desvio-padrão do seguinte conjunto de valores experimentais:

N.º do Teste:	1	2	3	4	5	6
Valor:	15,2	14,9	15,0	14,2	15,4	15,1

11. Utilidade do Desvio-Padrão

No final da Seção 5.4.2, o desvio-padrão foi definido como a raiz quadrada da soma dos quadrados dos erros, com a explicação de que, se os erros fossem simplesmente somados, os erros positivos cancelariam os negativos e o resultado seria 0. Se este fosse o único problema, porém, por que não calcularmos a soma dos valores absolutos dos erros? Qual é a vantagem de calcular os quadrados dos erros?

12. Variações da Velocidade de um Processador de Vídeo

Suponha que uma empresa de dispositivos semicondutores lançou um novo tipo de processador de vídeo que pode melhorar a qualidade das imagens geradas por vários aparelhos, desde consoles de jogos até telefones celulares. O dispositivo foi projetado para processar imagens com extrema rapidez, mas, por causa de variações no processo de fabricação, nem todos os dispositivos fabricados têm a mesma velocidade. A tabela a seguir mostra o tempo em nanossegundos que 20 dispositivos escolhidos ao acaso levam para processar uma imagem-padrão:

Amostras 1–5:	33,9	36,4	24,5	30,4	29,7
Amostras 6–10:	22,5	31,8	25,2	37,6	26,4
Amostras 11–15:	33,2	31,6	25,9	19,7	30,2
Amostras 16–20:	25,5	33,6	33,1	38,9	33,5

(a) Qual é o tempo médio que o dispositivo leva para processar a imagem-padrão?

(b) Qual é o desvio-padrão?

(c) Desenhe um histograma das velocidades dos dispositivos

testados, com escaninhos de 1 ns de largura.

(d) Suponha que a empresa pode vender dispositivos que processam a imagem-padrão em 25 ns, ou menos, por R$ 30,00; dispositivos que processam a imagem-padrão em 30 ns, ou menos, por R$ 20,00; e dispositivos que processam a imagem-padrão em 40 ns, ou menos, por R$ 15,00. Qual é o preço médio de venda de um dispositivo, com base na distribuição de velocidades da amostra usada nos testes?

13. Avaliação da Qualidade de Ajuste de um Modelo Empírico

Ao comparar diferentes modelos, é interessante dispor de um parâmetro que descreva a qualidade de ajuste do modelo aos dados experimentais. Esse parâmetro pode ser obtido a partir dos erros, ou seja, das diferenças entre os valores previstos pelo modelo e os valores medidos experimentalmente. Neste problema, vamos estimar a qualidade de ajuste do modelo numérico da atiradeira obtido na Seção 5.3.3.

(a) Três formas diferentes de calcular o parâmetro de qualidade de ajuste a partir dos erros são as seguintes:

- calcular a média dos erros (erro médio);
- calcular a média dos quadrados dos erros;
- calcular a raiz quadrada da média dos quadrados dos erros (erro médio quadrático ou erro *RMS*[4]).

Calcule os valores dos três parâmetros para os dados da Tabela 5.4. Explique por que, dos três parâmetros, o erro RMS é o mais usado para avaliar a qualidade de ajuste dos modelos empíricos.

(b) Suponha que um de seus colegas tenha sugerido um modelo numérico alternativo para a atiradeira, no qual a distância atingida é dada pela equação

$$D = 28{,}80X - 9{,}20$$

Usando o erro RMS como medida, que modelo se ajusta melhor aos dados: o que foi usado para gerar a Tabela 5.4 ou o modelo proposto por seu colega?

14. Tolerância a Erros

Os engenheiros usam frequentemente o termo "tolerância a erros" ao projetarem sistemas. Explique este conceito, do ponto de vista probabilístico.

15. Probabilidades de Moedas e Dados

Calcule as probabilidades dos seguintes eventos:

(a) Obter duas caras seguidas ao jogar uma moeda.
(b) Jogar dois dados e obter pelo menos um 4.
(c) Jogar dois dados e obter dois números diferentes.

16. Ganho Esperado em um Jogo de Dados

Um amigo propõe um jogo no qual vocês jogam dois dados. Se a soma dos dados é sete ou onze, ele paga a você R$ 3,00; se a soma não é sete nem onze, você paga a ele R$ 1,00. O jogo é favorável a você ou a seu amigo?

17. Probabilidade e Estatística no Cotidiano

Dê pelo menos três exemplos nos quais probabilidades e estatísticas são usadas para tomar decisões na vida cotidiana. Descreva a situação em termos de resultados "favoráveis" e "desfavoráveis" e a natureza dos dados estatísticos que foram colhidos. Eis algumas sugestões:

- esportes
- saúde
- finanças

18. Palpites em um Exame

Suponha que você está fazendo um exame de múltipla escolha com 50 questões, cada uma com quatro opções (A B C D). Uma resposta correta vale 2 pontos, uma pergunta não respondida vale 0 ponto, e uma resposta errada vale menos 1 ponto. Formule uma estratégia para determinar se você deve ou não responder a uma pergunta com base no grau de certeza que você tem a respeito da resposta correta ou do número de opções que você é capaz de eliminar, de modo a maximizar sua nota no exame.

19. Estimativa do Tamanho de uma População

Uma ecologista quer estimar a população de rãs em um lago. Um dia, ela captura um pequeno número de rãs e as devolve ao lago depois de marcá-las. Alguns dias depois, volta ao lago e captura um número maior de rãs. Como a ecologista consegue estimar a população total de rãs examinando as rãs capturadas na segunda visita? Use números concretos para ilustrar sua explicação.

20. Probabilidades Cumulativas para a Atiradeira

Na Seção 5.4.4 são mostrados os dados relativos a 20 testes da atiradeira, mais especificamente na Tabela 5.6, onde aparecem as contagens e probabilidades para as distâncias de 14 a 19 metros, e na Figura 5.14, na qual os mesmos dados aparecem na forma de histogramas. Use essas informações para gerar contagens e histogramas cumulativos, ou seja, nos quais as distâncias não sejam classificadas por intervalos do tipo $d_n \leq d \leq d_{n+1}$ e sim por desigualdades do tipo $d \geq d_n$.

21. Percentis

Quando um pediatra pesa uma criança e mede sua altura, os valores são marcados em um gráfico para que o médico possa determinar em que *percentil* a criança se enquadra. Explique o que é um percentil e, depois de fazer uma pesquisa na Internet,

explique como foram criadas as tabelas usadas pelos médicos.

22. Qualidade Seis Sigmas

Como foi dito no texto, se os valores de uma grandeza obedecem à distribuição normal, existe uma probabilidade de aproximadamente 70% de que o valor medido em um teste específico esteja a menos de um desvio-padrão da média. Depois de fazer uma pesquisa na Internet, responda às seguintes perguntas:

(a) Quais são as probabilidades de que o valor medido em um teste esteja a menos de 2, 3 e 6 desvios-padrões (seis sigmas) da média?

(b) Se uma empresa alega que um determinado produto tem uma qualidade seis sigmas, quantas peças podem apresentar defeito em cada milhão de peças produzidas?

23. Previsão do Tamanho do Pé

Com que precisão é possível prever o tamanho do pé de uma pessoa a partir da distância entre o pulso e o cotovelo? Escreva um ensaio de 2 a 3 páginas sobre o assunto e apresente uma solução baseada na estratégia de solução de problemas do Capítulo 3, usando as técnicas analíticas do Capítulo 5.

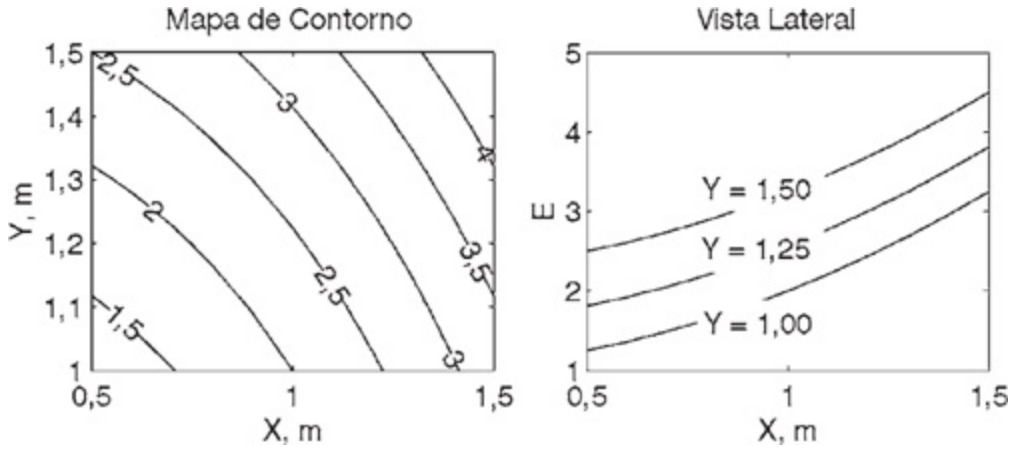
24. Mudar ou não Mudar?

Este é um problema famoso proposto por Marilyn von Savant, que escreve para a revista *Parade*. Suponha que você está participando de um programa de prêmios na televisão. À sua frente estão três portas, A, B e C. Você sabe que existe um prêmio atrás de uma das portas, e o apresentador lhe pede para escolher uma porta. Suponhamos que você tenha escolhido a porta A. O apresentador abre a porta C, mostra que não é atrás dela que está o prêmio e pergunta se você quer manter a escolha inicial ou mudar para a porta B. Você deve ficar com a porta A, mudar para

a porta B ou tanto faz? Explique seu raciocínio.

25. Interpretação das Vistas Laterais da Atiradeira

Os gráficos a seguir se referem à atiradeira descrita na Seção 5.5.5.



(a) Localize o ponto Q que corresponde a $X = 0{,}75$ e $Y = 1{,}25$ nos dois gráficos. Qual é o valor da energia relativa neste ponto?

(b) Suponha que existem restrições no processo de lançamento tais que a energia relativa não pode ser maior que 3 e Y deve ser 1,25. Localize a região aceitável nos dois gráficos.

(c) Localize o ponto R que corresponde a $E = 3$ e $X = Y$.

[1]René Descartes e Pierre de Fermat inventaram, em 1637, de forma independente, o sistema que hoje chamamos de “coordenadas cartesianas”. Um dos primeiros gráficos x-y de que se tem notícia é um gráfico de altitude em função da pressão barométrica feito por Edmond Halley em 1686.

[2]Alguns estatísticos usam outra definição de desvio-padrão na qual a raiz quadrada da soma dos quadrados é dividida por $n - 1$ em vez de n. Para valores muito grandes de n, a diferença é insignificante; ao usar um programa de computador ou uma calculadora, porém, o leitor deve prestar atenção na definição que está sendo usada.

[3]Arbuthnot foi também nomeado guardião de “Peter, o Menino Selvagem”, encontrado em um bosque perto de Hamelen, Alemanha, em 1725, vivendo de nozes, frutas silvestres e cascas de árvores, e entregue ao rei Jorge I da Inglaterra. Swift e Arbuthnot escreveram uma sátira a respeito da celeuma que se criou em torno do menino selvagem intitulada “A Maravilha Mais Maravilhosa que Jamais Apareceu para Maravilhar a Nação Britânica”.

[4]Do inglês *Root Mean Square*. (N.T.)

CAPÍTULO

6

Modelagem de Relações entre os Componentes de um Sistema: Estruturas Leves

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- explicar e dar exemplos de relações entre os componentes de um sistema, decorrentes de interações das partes ou do estudo do sistema a partir de vários pontos de vista; descrever, especificamente, a modelagem de uma treliça do ponto de vista do equilíbrio estático, dos materiais e da geometria;
- formular as equações de equilíbrio estático de uma treliça usando o método dos nós;
- usar a Lei de Hooke e o módulo de Young para formular equações que descrevam a relação entre a força interna em uma barra e o seu alongamento;
- discutir alguns dos mecanismos responsáveis pela falha de estruturas e o conceito de resistência à flambagem;
- explicar a diferença entre uma treliça estaticamente determinada e estaticamente indeterminada e formular e resolver um sistema de equações lineares nos dois casos;
- explicar algumas soluções de compromisso entre resistência e peso no projeto de treliças.

6.1 INTRODUÇÃO

A modelagem do comportamento de sistemas triviais que têm apenas uma “parte” e um comportamento de interesse é tão simples quanto encontrar a lei adequada e aplicá-la diretamente. A maioria dos sistemas de engenharia, porém, tem muitas partes e muitos comportamentos de interesse, o que torna a tarefa de modelagem muito mais complexa. O objetivo dos Capítulos 6 e 7 é examinar em profundidade as relações entre os componentes de sistemas de engenharia: como surgem, como são modeladas e qual sua importância nos projetos.

Para ilustrar as relações entre os componentes de um sistema, vamos discutir o projeto de estruturas leves. Em particular, vamos examinar uma estrutura conhecida como *treliça*, feita de barras relativamente compridas e finas, porém resistentes, ligadas por nós, como mostra a Figura 6.1. As treliças são usadas em muitos tipos de estruturas, como pontes, telhados e máquinas pesadas. Uma forma de encarar uma treliça é pensar na estrutura como uma placa maciça de material que exerce um papel de sustentação e da qual é removida a maior quantidade possível de material que não comprometa o desempenho da estrutura. A forma resultante é muito mais leve e barata que a placa original, mas, mesmo assim, satisfaz as restrições de desempenho. Como, na maioria dos casos, as treliças não são construídas por remoção de material e sim por montagem, apresentam a vantagem adicional de serem relativamente fáceis de transportar e armar no local. Brinquedos como Lego e Meccano se baseiam em treliças, o que também acontece com projetos de “pré-engenharia” como a construção de pontes com palitos de sorvete.

A dificuldade para modelar uma treliça está no número de partes *e* no número de disciplinas envolvidas. Por outro lado, é possível criar modelos de treliças bastante precisos usando princípios físicos muito simples, como os ensinados no segundo grau. Dentro do seu ambiente operacional, uma treliça deve sustentar uma carga e satisfazer restrições geométricas sem se deformar significativamente. No

ambiente de engenharia, três diferentes pontos de vista devem ser considerados no projeto e na análise de treliças:

Figura 6.1 Treliças. O peso de uma estrutura é especialmente importante quando deve ser lançada no espaço. Foto do canto inferior direito cortesia da NASA.

Ponto de vista do equilíbrio estático: O ponto de vista do equilíbrio estático é a visão do sistema de acordo com as Leis de Newton. Como a treliça é um sistema *estático*, a força resultante a que está submetida qualquer parte de uma treliça é necessariamente nula. Modelos de uma treliça do ponto de vista do equilíbrio estático consideram as forças a que as barras, os nós e os suportes estão submetidos.

Ponto de vista dos materiais: O ponto de vista dos materiais consiste em considerar qual será a deformação de uma treliça ao ser submetida a uma carga. Podemos pensar neste ponto de vista como a visão de Hooke do sistema, já que as barras são modeladas como molas de alta rigidez, alongadas ou comprimidas pela força aplicada. A deformação sofrida por uma barra ao ser submetida a uma dada força depende tanto do material de que é feita como de suas dimensões; os modelos devem levar em conta os dois fatores.

Ponto de vista da geometria: A geometria, e especialmente a trigonometria, desempenha vários papéis no projeto e na análise das treliças. Em primeiro lugar, existe o requisito básico de que a treliça como um todo satisfaça alguns requisitos espaciais, como sustentar um telhado com uma certa altura máxima e uma certa área. Em segundo lugar, a trigonometria é usada para analisar as forças que agem sobre cada nó. Finalmente, a geometria é usada para determinar as novas posições dos nós quando as barras se deformam ao serem submetidas a uma carga.

Ao criar um modelo para uma estrutura em forma de treliça, fazemos várias suposições para simplificar os cálculos:

- Em primeiro lugar, consideramos apenas problemas *bidimensionais*. Naturalmente, as estruturas são tridimensionais, mas, no caso das treliças, estamos mais interessados, na maioria dos casos, em forças que estão todas no mesmo plano. Muitas estruturas tridimensionais são montadas a partir de treliças planas, que podem ser analisadas de forma independente. Por isso, esta simplificação não constitui uma limitação séria.
- Vamos supor que todos os nós da estrutura são implementados na forma de articulações simples, que permitem que as barras girem livremente. Na prática, muitas das tecnologias usadas para unir as barras não permitem rotações, mas esta simplificação facilita muito a análise das forças e é muito usada em análise estrutural.
- Vamos supor que as deformações sofridas pelas barras quando a treliça é submetida a um carregamento são pequenas e que, portanto, a geometria global da estrutura sob carga não é muito diferente da geometria antes de ser aplicada a carga. Esta suposição simplifica bastante o cálculo das novas posições dos nós quando as barras são alongadas ou comprimidas pela carga.

Se você está cursando engenharia mecânica, civil ou aeroespacial, esta introdução à análise de estruturas leves tem uma ligação direta com assuntos que você irá estudar mais a fundo em outros cursos, embora nosso tratamento seja um pouco diferente da abordagem de alguns livros-textos sobre estruturas. Se o seu campo principal é outra especialidade da engenharia, como engenharia elétrica ou engenharia química, embora os conceitos físicos sejam diferentes, o método de análise tem muito em comum com a análise dos circuitos elétricos e do fluxo de reagentes em vasos industriais. O objetivo mais importante deste capítulo, porém, é ilustrar algumas das questões e abordagens gerais envolvidas na modelagem de sistemas com muitos componentes e que envolvem várias disciplinas, que são importantes para engenheiros de qualquer especialidade.

6.2 PONTO DE VISTA DO EQUILÍBRIO ESTÁTICO

6.2.1 A Força como um Vetor

Algumas grandezas físicas, como a massa e o volume de um objeto, podem ser expressas por um único número. Essas grandezas são chamadas de grandezas *escalares*. Existem outras grandezas, porém, como a força, para as quais um número não é suficiente. A força é uma grandeza *vetorial*, que possui um módulo (quanto) e uma orientação (em que direção e sentido). Todas as forças são vetores, mas nem todos os vetores são forças! A velocidade e a aceleração são também grandezas vetoriais, e o deslocamento pode ser considerado uma grandeza vetorial quando encarado como uma distância e uma orientação em relação a um ponto de referência. Na eletrônica, os vetores são usados para descrever certas características dos sinais elétricos. Neste livro, vamos falar apenas de algumas propriedades básicas dos vetores; você aprenderá muito mais a respeito de vetores e grandezas vetoriais em futuras cadeiras de matemática, física e

engenharia.

É importante ter em mente que a força é uma grandeza com dimensões. No sistema internacional de unidades (SI), as forças são expressas em newtons (N). No sistema inglês de unidades, as coisas são mais complicadas: forças podem ser expressas em libras (lb), em libras-força (lbf), onças (oz), e várias outras unidades. Ao resolver problemas de engenharia, convém trabalhar com um sistema coerente de unidades, de preferência o SI.

As forças e outras grandezas vetoriais são frequentemente representadas por setas. A Figura 6.2, que mostra um corpo C submetido a duas forças, **F** e **G**, é exemplo de um tipo de diagrama conhecido como *diagrama de corpo livre*. O ponto no qual uma força age sobre um corpo é chamado de *ponto de aplicação*. A seta está orientada na *direção* da força, aponta no *sentido* da força, e seu comprimento muitas vezes é proporcional ao *módulo* da força.

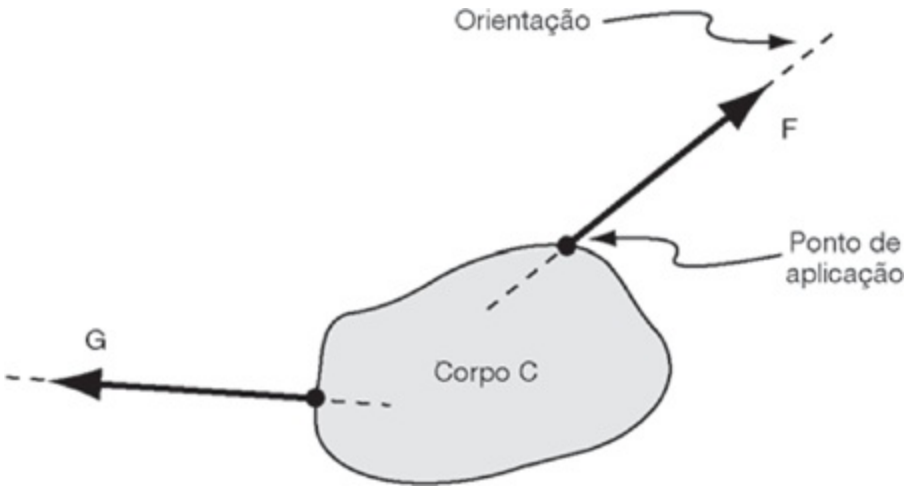


Figura 6.2 Diagrama de corpo livre.

Em muitos problemas de engenharia, as forças devem ser consideradas em três dimensões; afinal, a natureza é tridimensional! Frequentemente, porém, como vamos fazer neste capítulo, é possível simplificar um projeto de engenharia introduzindo certas suposições a respeito do comportamento de um sistema ou da natureza de um

problema. Nas discussões a seguir, vamos supor que é possível modelar corretamente um problema do mundo real usando um problema bidimensional equivalente. Assim, todas as forças e estruturas que vamos estudar estão limitadas a um único plano. Esta suposição torna mais fácil a análise – bem como o desenho de diagramas – e permite estudar algumas questões importantes. Muito do que será apresentado com relação a forças e estruturas pode ser facilmente generalizado para três dimensões. Esperamos que, depois de adquirir uma boa compreensão de alguns conceitos básicos através de problemas bidimensionais, você esteja preparado para lidar com a maior complexidade matemática e de notação associada aos problemas tridimensionais que encontrará em estudos futuros.

6.2.2 Adição de Forças

Se duas forças são aplicadas a um corpo no mesmo ponto, elas podem ser substituídas por uma única força, chamada *resultante*, que produz o mesmo efeito. No exemplo da Figura 6.3, dois vetores, **A** e **B**, são substituídos por um vetor resultante **R**. Neste livro, vamos usar letras em negrito para representar grandezas vetoriais e letras em itálico para representar grandezas escalares. O módulo do vetor **R** é a grandeza escalar *R*.

O método gráfico de somar vetores é a chamada *regra do paralelogramo*, proposta por Newton no livro *Principia Mathematica* [Newton1686] e ilustrada no lado esquerdo da Figura 6.4. Para somar dois vetores **A** e **B** usando a regra do paralelogramo, desenhamos um paralelogramo com **A** e **B** como lados vizinhos; o vetor resultante **R** é a diagonal do paralelogramo que passa pela origem comum de **A** e **B**. Outra forma de somar vetores graficamente é desenhar os vetores em sequência, com a origem do segundo começando na extremidade do primeiro. Nesse caso, o vetor resultante é obtido unindo a origem do primeiro vetor à extremidade do segundo. Esta construção é mostrada no lado direito da Figura 6.4.

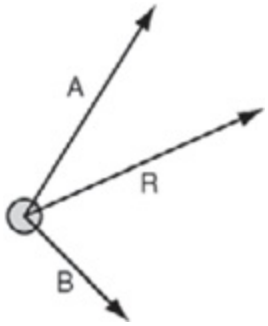


Figura 6.3 Soma de dois vetores para obter um vetor resultante.

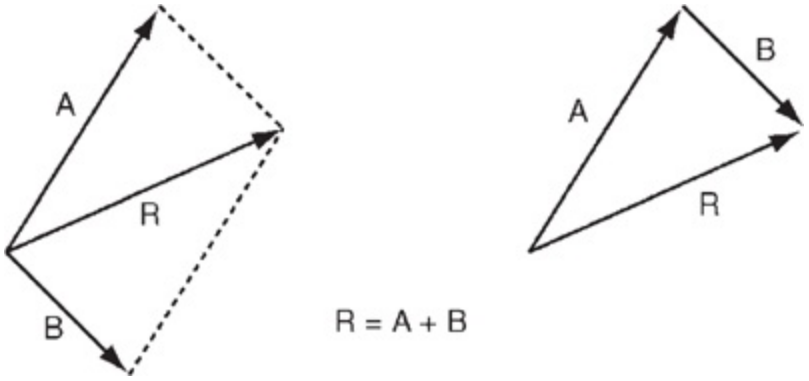


Figura 6.4 Soma de vetores usando a regra do paralelogramo (esquerda) e desenhando os vetores em sequência (direita).

Os engenheiros não costumam usar a regra do paralelogramo e sim uma abordagem que, à primeira vista, é mais complicada, mas facilita o trabalho, por duas razões: Em primeiro lugar, reduz a chance de cometer erros, especialmente de sinal; em segundo lugar, pode ser facilmente programada em um computador. Os passos desta abordagem são os seguintes:

1. Escolher um sistema conveniente de eixos cartesianos (*xy*).
2. Determinar as componentes de cada força em relação aos eixos escolhidos.
3. Somar separadamente as componentes em relação a cada eixo.
4. Combinar as componentes resultantes para formar o vetor desejado.

Para ilustrar esta abordagem, vamos usar o exemplo da Figura 6.5. O objetivo deste problema é determinar a força resultante que age sobre o ponto **A** quando as forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ são aplicadas ao ponto A. Em outras palavras, vamos determinar uma única força, *estaticamente equivalente*, chamada **R**, capaz de substituir tão bem $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ que o ponto A não perceba a diferença. As orientações das duas forças estão indicadas em relação à reta horizontal tracejada mostrada na figura. As duas forças estão no mesmo plano, que coincide com o plano do papel. Uma vez definido o problema, vamos somar as forças de acordo com a abordagem proposta.

1ª Etapa: Escolher um Sistema de Eixos Conveniente Como as informações quanto à orientação das forças foram expressas em relação à reta tracejada da Figura 6.5, faz sentido usá-la como um dos eixos do sistema de coordenadas. A Figura 6.6 mostra um sistema de eixos cartesianos no qual o eixo *x* coincide com a reta tracejada, e a origem coincide com o ponto A. Esse tipo de sistema, o mais comum, no qual uma rotação de 90° do eixo *x* no sentido anti-horário faz o eixo *x* coincidir com o eixo *y*, é chamado de *dextrogiro*. Se a rotação de 90° que faz o eixo *x* coincidir com o eixo *y* fosse no sentido horário, o sistema seria chamado de *levogiro*. Existem outras opções para o sistema de coordenadas. Poderíamos, por exemplo, alinhar o eixo *x* com a direção da força $\mathbf{F}_1$ para não termos que calcular a componente da força $\mathbf{F}_1$ em relação aos eixos (a componente em relação ao eixo *x* seria o módulo de $\mathbf{F}_1$; a componente em relação ao eixo *y* seria 0). Neste exemplo, vamos usar os eixos mostrados na Figura 6.6.

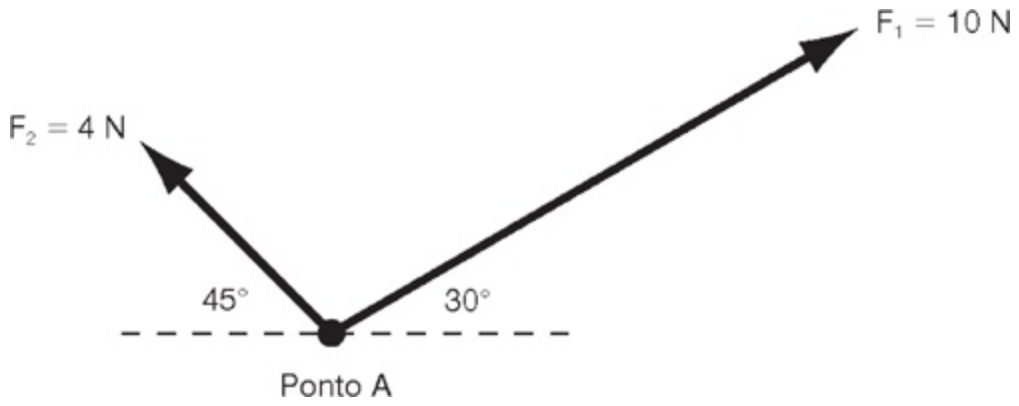


Figura 6.5 Exemplo de soma de vetores pelo método das componentes.

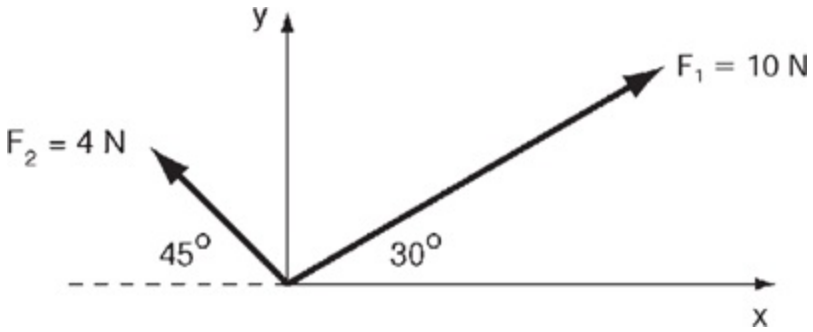


Figura 6.6 Definição de um sistema de coordenadas cartesianas.

2ª Etapa: Calcular as Componentes das Forças em Relação aos Eixos Escolhidos Assim como podemos somar dois vetores para obter um vetor resultante, podemos decompor um vetor em dois vetores cuja soma é igual ao vetor original. Em geral, as direções desses vetores são as dos eixos do sistema de coordenadas escolhido, o que facilita os cálculos.

Vejamos o que isso significa para a força $\mathbf{F}_1$ de nosso exemplo. O processo usado para determinar as componentes de $\mathbf{F}_1$ envolve a construção de um paralelogramo, que, neste caso, é um retângulo com o vetor na diagonal e os dois lados alinhados com os eixos do sistema de coordenadas, como mostra a Figura 6.7. A componente x da força $\mathbf{F}_1$ é um vetor $\mathbf{F}_{1x}$, cujo módulo, de acordo com a trigonometria, é dado por

$$F_{1x} = F_1 \cos(30^\circ) = 10 \cos(30^\circ)\ \text{N} = 10(0{,}866)\ \text{N} = 8{,}66\ \text{N}$$

A componente y da força $\mathbf{F}_1$ é outro vetor, $\mathbf{F}_{1y}$, cujo módulo, de acordo com a trigonometria, é dado por

$$F_{1y} = F_1 \operatorname{sen}(30^\circ) = 10 \operatorname{sen}(30^\circ)\ \text{N} = 10(0{,}500)\ \text{N} = 5{,}00\ \text{N}$$

Assim, como mostra a Figura 6.8, a ação da força $\mathbf{F}_1$ sobre o ponto **A** pode ser expressa em termos da resultante $\mathbf{F}_1$ ou das componentes $\mathbf{F}_{1x}$ e $\mathbf{F}_{1y}$.

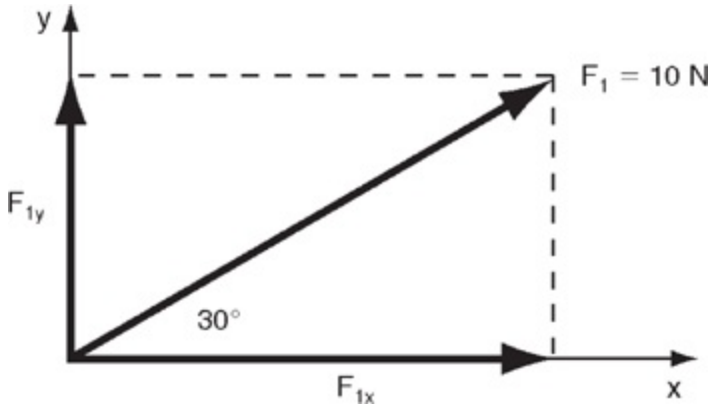


Figura 6.7 Uso da regra do paralelogramo para determinar as componentes $\mathbf{F}_{1x}$ e $\mathbf{F}_{1y}$ de $\mathbf{F}_1$.

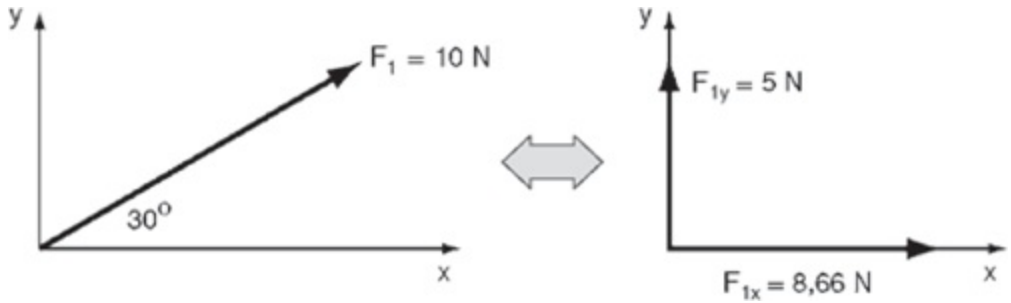


Figura 6.8 Representação da força $\mathbf{F}_1$ através de componentes x e y.

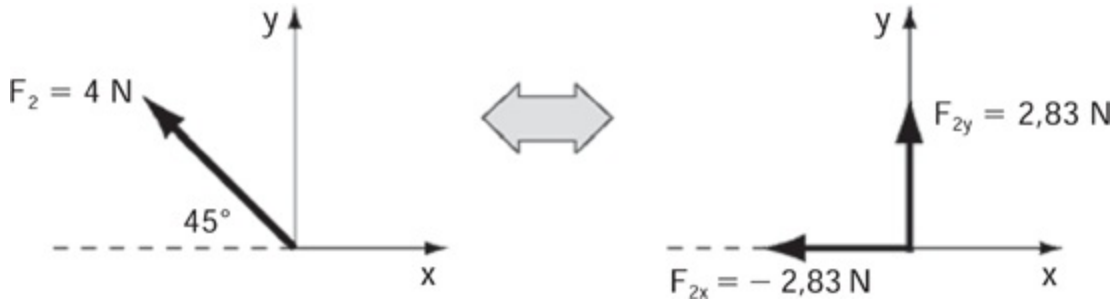


Figura 6.9 Representação da força $\mathbf{F}_2$ através de componentes x e y.

O mesmo processo pode ser aplicado à força $\mathbf{F}_2$, como mostra a Figura 6.9, mas é preciso tomar cuidado com o fato de que a componente x da força $\mathbf{F}_2$ está orientada no sentido negativo do eixo x. Quando usamos as componentes de dois vetores para calcular a soma vetorial, os módulos de componentes com diferentes orientações devem ser tomados com sinais opostos: a componente orientada no sentido positivo do eixo é tomada com o sinal positivo e a componente orientada no sentido negativo é tomada com o sinal negativo. A componente x da força $\mathbf{F}_2$ é um vetor $\mathbf{F}_{2x}$ cujo módulo é

$$F_{2x} = F_2 \cos(45^\circ) = 4 \cos(45^\circ)\ \text{N} = 4(0{,}707)\ \text{N} = 2{,}83\ \text{N}$$

Esta componente deve ser tomada com o sinal negativo porque está orientada no sentido negativo do eixo x. A componente y da força $\mathbf{F}_2$ é o vetor $\mathbf{F}_{2y}$ cujo módulo é

$$F_{2y} = F_2 \cos(45^\circ) = 4 \operatorname{sen}(45^\circ)\ \text{N} = 4(0{,}707)\ \text{N} = 2{,}83\ \text{N}$$

Assim, como no caso da força $\mathbf{F}_1$, a ação da força $\mathbf{F}_2$ sobre o ponto **A** pode ser expressa em termos da resultante $\mathbf{F}_2$ ou das componentes $\mathbf{F}_{2x}$ e $\mathbf{F}_{2y}$, pois essas duas representações da força $\mathbf{F}_2$ são estaticamente equivalentes.

3ª Etapa: Somar as Componentes em Relação a Cada Eixo Agora que as duas forças foram expressas em termos de suas componentes, é fácil somar vetores com o mesmo ponto de aplicação e a mesma direção, como mostra a Figura 6.10.

Representando a força resultante pelo símbolo **R**, as componentes da resultante $\mathbf{R}_x$ e $\mathbf{R}_y$ são dadas por

$$\text{R}_x = \text{F}_{x1} + \text{F}_{x2} = 8{,}66\ \text{N} + (-2{,}83\ \text{N}) = 5{,}83\ \text{N}$$

e

$$R_y = F_{y1} + F_{y2} = 5{,}00\ \text{N} + (2{,}83\ \text{N}) = 7{,}83\ \text{N}$$

A Figura 6.10 mostra este resultado.

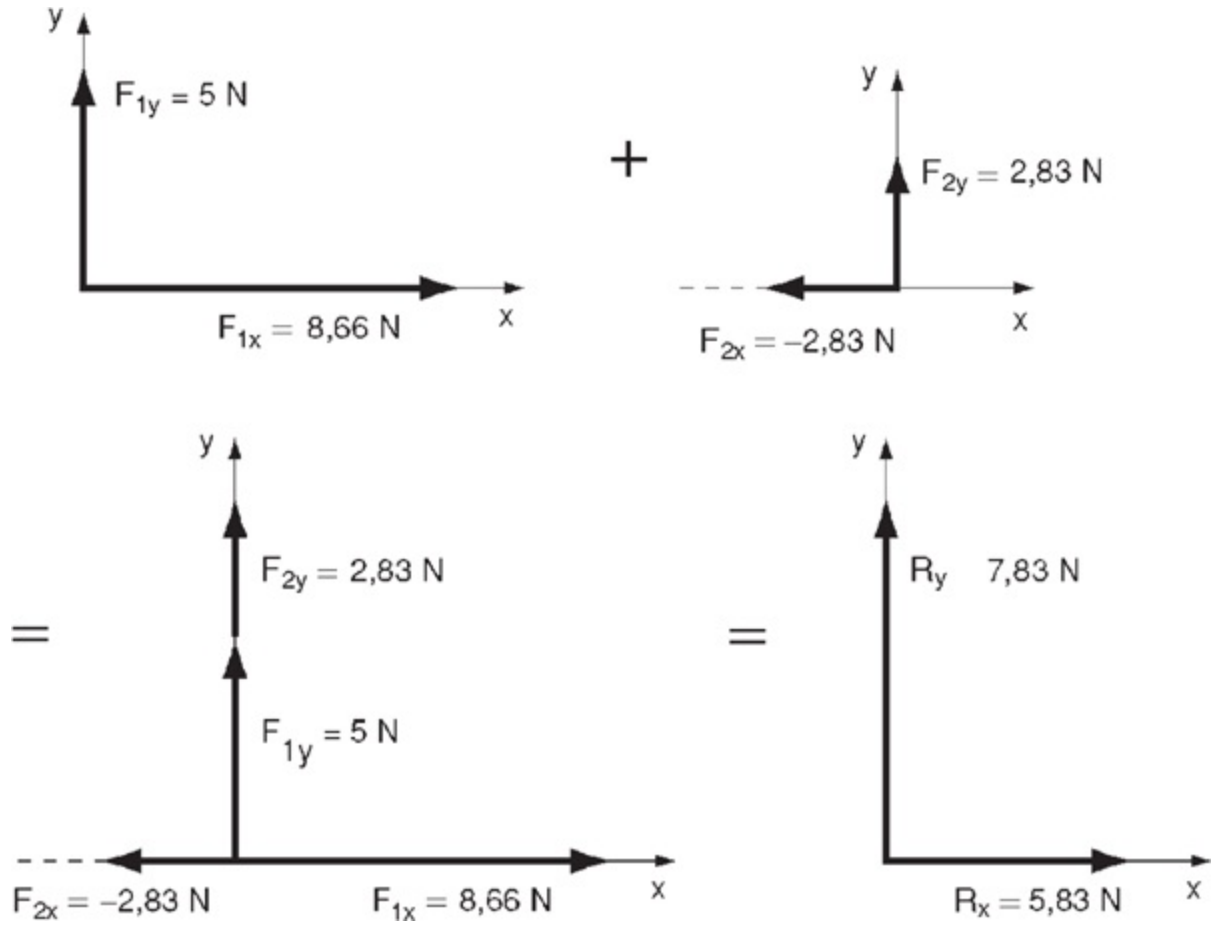


Figura 6.10 Soma das componentes *x* e *y* dos vetores $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$.

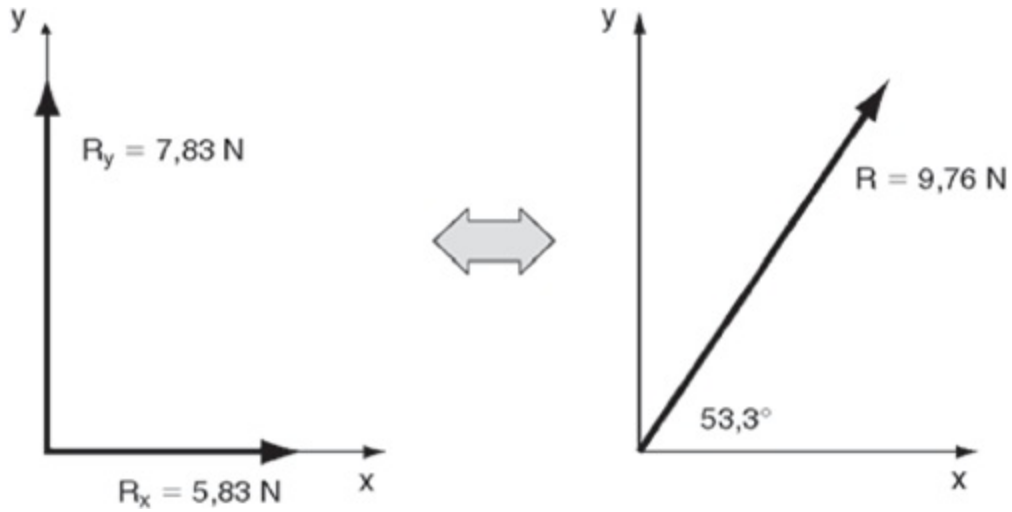


Figura 6.11 Combinação de $\mathbf{R}_x$ e $\mathbf{R}_y$ para formar um único vetor $\mathbf{R}$.

4ª Etapa: Combinar as Componentes Resultantes para Formar o Vetor Resultante. A etapa final do processo consiste em combinar as componentes resultantes para formar um único vetor, usando novamente a regra do paralelogramo, como mostra a Figura 6.11. O módulo e a orientação do vetor resultante são determinados a partir das componentes, fazendo

$$\tan \theta = R_y/R_x = 7{,}83 \text{ N}/5{,}83 \text{ N} = 1{,}343$$
$$\theta = 53.3^\circ$$

e

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(5.83\text{N})^2 + (7.83\text{N})^2} = 9.76\text{N}$$

A resultante $\mathbf{R}$ é *estaticamente equivalente* às forças iniciais $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$. Finalmente, confirmamos que a resultante de $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ obtida usando as componentes x e y é igual à resultante obtida usando a regra do paralelogramo ou desenhando os vetores em sequência, como na Figura 6.12.

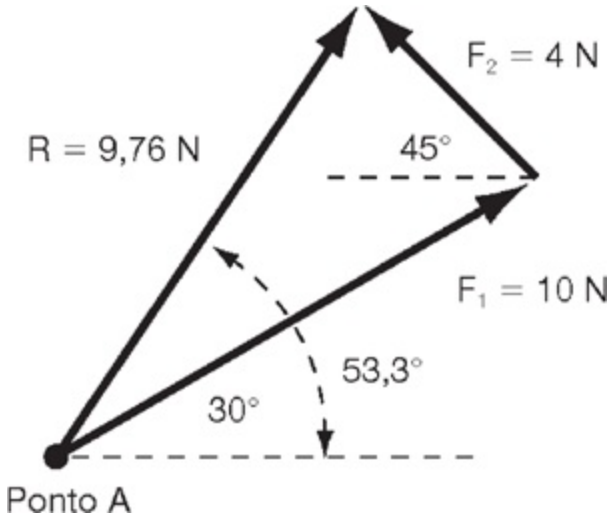


Figura 6.12 A força resultante $\mathbf{R}$ também pode ser obtida desenhando-se os vetores $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ em sequência.

6.2.3 Equilíbrio de um Ponto ou Partícula

A Figura 6.13 mostra um caso em que várias forças são aplicadas ao mesmo ponto. Um ponto como este é às vezes chamado de *partícula*, o que significa que pode ter massa, mas suas dimensões são desprezíveis. Mais uma vez, vamos limitar nossa discussão a situações nas quais todas as forças estão no mesmo plano.

Como no caso anterior, podemos substituir as forças aplicadas por uma única força resultante, às vezes chamada de força total, que é a soma de todas as forças:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots + \mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^{i} \mathbf{F}_j$$

De acordo com a Segunda Lei de Newton, a força aplicada a um objeto é igual à massa do objeto multiplicada pela aceleração. Nos problemas que serão discutidos daqui a pouco, o ponto A vai representar uma ligação que *não queremos que se mova*. Assim, a aceleração em todos os pontos da estrutura deve ser nula e, de acordo com a Segunda Lei de Newton, a força resultante em cada ponto também deve ser nula. Assim,

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots + \mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^{i} \mathbf{F}_j = 0$$

em todos os pontos da estrutura. Esta situação, na qual a força resultante aplicada a um ponto ou partícula é nula, é chamada de *equilíbrio estático* porque a partícula permanece estática, ou seja, sem se mover.

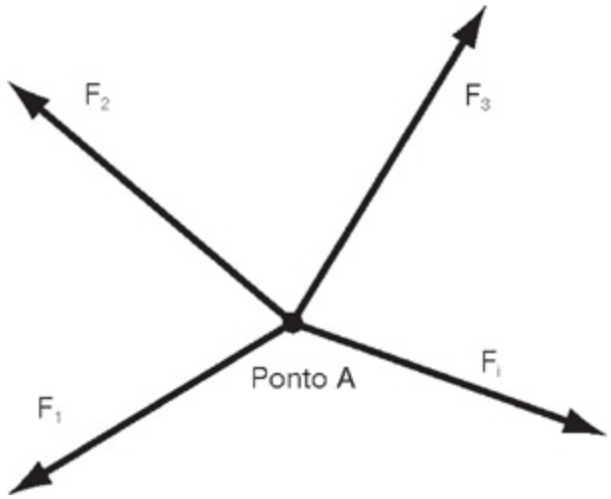


Figura 6.13 Várias forças aplicadas ao ponto A, todas no mesmo plano.

Como na Seção 6.2.2, podemos substituir as forças aplicadas à partícula por componentes *x* e *y*. Nesse caso, a condição de equilíbrio em um ponto deve satisfazer duas equações independentes:

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \cdots F_{ix} = \sum_{j=1}^{i} F_{jx} = 0$$

$$F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \cdots F_{iy} = \sum_{j=1}^{i} F_{jy} = 0$$

Assim, podemos determinar se o nó de uma estrutura está em equilíbrio estático usando a seguinte rotina:

1. Identificar todas as forças que agem sobre a partícula.
2. Escolher um sistema de eixos cartesianos (*xy*) apropriado.
3. Separar cada força em componentes *x* e *y*.
4. Somar separadamente as componentes *x* e *y* de todas as forças.
5. Se a soma das componentes *x* e a soma das componentes *y* é nula, a partícula está em equilíbrio estático.

6.2.4 Equilíbrio de Pinos Articulados e Barras

Como foi dito no início do capítulo, treliça é uma estrutura leve feita

de barras longas e finas unidas em pontos chamados nós. Nas treliças reais, as barras podem ser unidas por várias técnicas, entre elas algumas, como a de soldagem, que mantêm as barras rigidamente no lugar. Em nossa análise, porém, vamos supor que todos os nós são um tipo especial de ligação conhecido como *pino articulado* (Figura 6.14). A principal característica do pino articulado é que as barras são livres para girar em torno do pino. Ao contrário de uma junção soldada, esse tipo de união não oferece resistência a rotações. Como vamos ver em seguida, esta propriedade tem influência sobre a orientação das forças em uma treliça.

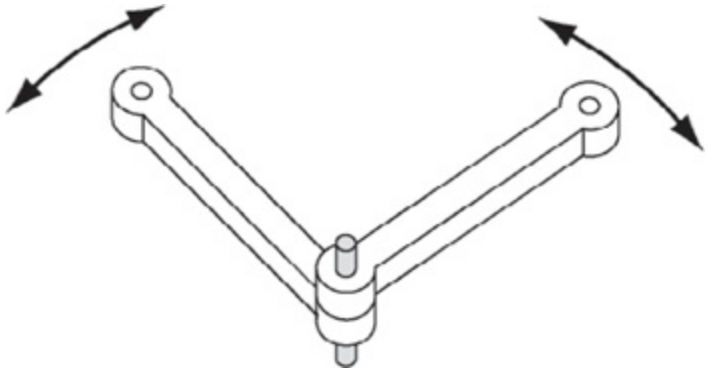


Figura 6.14 Pino articulado. As barras estão livres para girar em torno do pino.

Quando uma treliça com pinos sustenta uma carga, as barras da treliça aplicam forças aos pinos, e vice-versa. Se a treliça como um todo está em equilíbrio estático, todos os pinos e barras também devem estar em equilíbrio estático; caso contrário, uma parte da treliça estaria em movimento. Isso significa que a força resultante em cada barra e em cada pino deve ser nula. Entretanto, existe outro requisito das forças exercidas sobre as barras: que elas sejam ao longo da maior dimensão das barras, como mostra a Figura 6.15. No primeiro caso da figura, embora as forças aplicadas tenham o mesmo módulo, a mesma direção e sentidos opostos, e, portanto, a força resultante seja nula, a barra tende a girar. Como os pinos articulados não resistem a rotações, a barra não está em equilíbrio estático. Nos outros dois casos, como as forças estão alinhadas com a maior

dimensão da barra, não há uma tendência para a rotação e a barra está em equilíbrio estático, mesmo com pinos articulados. Objetos como barras presas pelas extremidades e submetidas a exatamente duas forças são conhecidos como *elementos de duas forças*; para que um elemento de duas forças esteja em equilíbrio estático, é *necessário* que as duas forças tenham o mesmo módulo, sentidos opostos *e* sejam colineares.

Assim como os pinos articulados exercem forças sobre as barras, as barras exercem forças sobre os pinos. De acordo com a Terceira Lei de Newton, a força que a barra exerce sobre o pino deve ser igual e oposta à força que o pino exerce sobre a barra. Além disso, para que a barra esteja em equilíbrio estático, as duas forças devem estar alinhadas com a maior dimensão. O arranjo de forças entre a barra e os pinos nessa situação é mostrado na Figura 6.16. Se as forças exercidas sobre a barra apontam para o centro da barra e, portanto, tendem a encurtá-la, dizemos que a barra está sendo *comprimida*. Se as forças exercidas sobre a barra apontam para longe do centro e, portanto, tendem a alongá-la, dizemos que está sendo *tracionada*. Observe que uma barra comprimida tende a empurrar os pinos, enquanto uma barra tracionada tende a puxá-los.

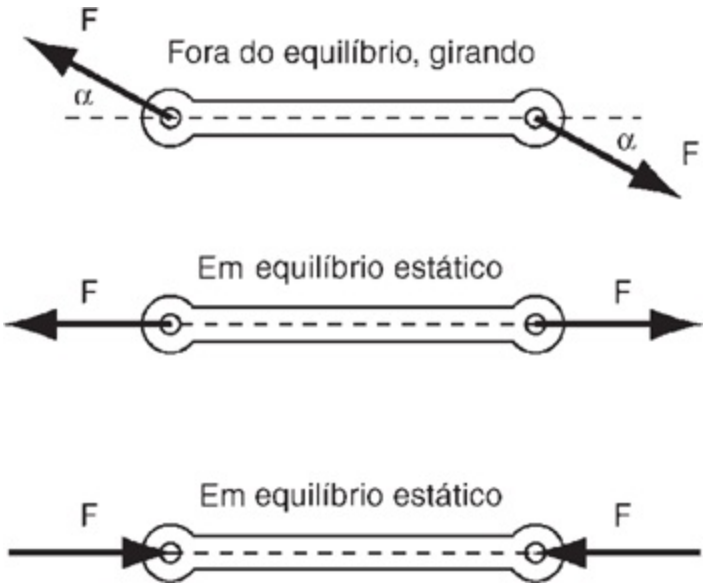


Figura 6.15 Para que uma barra presa nas extremidades por pinos articulados esteja em equilíbrio estático, as forças aplicadas à barra devem ter o mesmo módulo, sentidos opostos *e* estar alinhadas com a maior dimensão da barra.

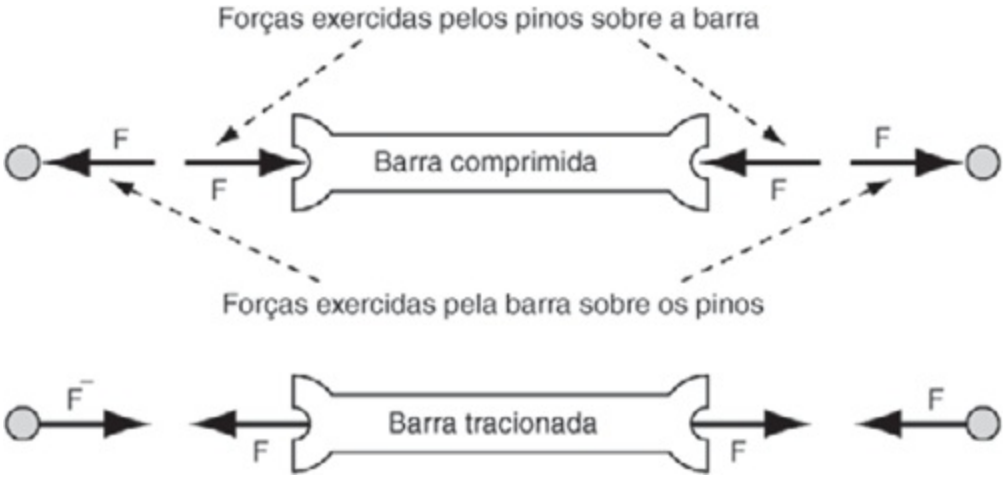


Figura 6.16 Uma barra e os pinos das extremidades exercem forças iguais e opostas.

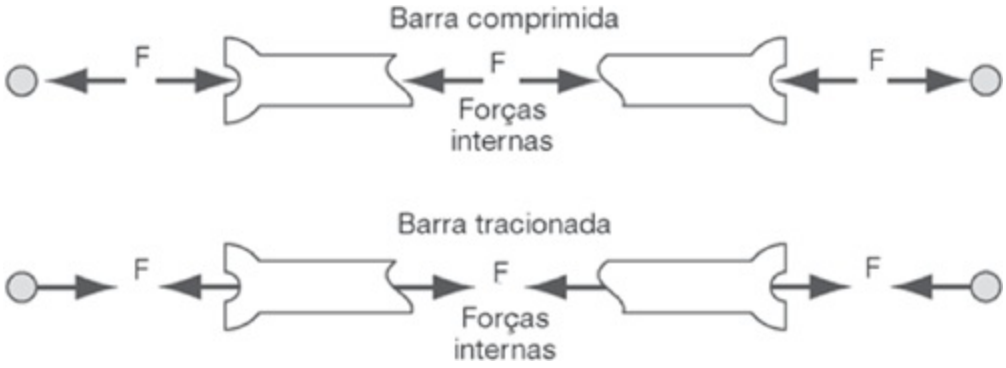


Figura 6.17 As forças internas de uma barra exercem a mesma força sobre uma parte da barra que essa parte da barra exerce sobre o pino correspondente.

Quando uma barra está sendo tracionada ou comprimida, existem forças no interior do material da barra que impedem que ela se fragmente. Essas forças, que recebem o nome de *forças internas*, serão examinadas na Seção 6.3, quando discutirmos o ponto de vista dos materiais. No momento, vamos considerar apenas a relação entre as forças internas e as forças entre a barra e os pinos. Suponhamos que pudéssemos tomar uma barra em equilíbrio estático, parti-la ao meio e medir as forças exercidas em cada parte, como na Figura 6.17. Para

que cada parte da barra esteja em equilíbrio estático, a força interna deve ser igual e oposta à força externa que o pino exerce sobre a barra. Isso significa que a força interna é igual à força que a barra exerce sobre o pino. Repetimos esta conclusão porque ela é muito importante para as análises que serão desenvolvidas em outras seções:

> A força interna de uma barra tem o mesmo módulo que a força que a barra exerce sobre um dos pinos articulados.

Finalmente, vamos considerar as condições de equilíbrio estático de um pino articulado. Os pinos articulados de uma treliça estão submetidos às forças das barras às quais estão ligados. Essas forças têm o mesmo módulo que as forças internas das barras. Como os pinos são muito menores que as barras, podemos substituí-los por pontos ou partículas, como mostra a Figura 6.18. Assim, de acordo com a discussão da Seção 6.2.3, para que um nó esteja em equilíbrio estático, a resultante das forças internas das barras ligadas a ele deve ser nula. Observe que, como um nó foi substituído por um ponto sem dimensões, não precisamos nos preocupar com o fato de as forças estarem ou não alinhadas, como aconteceu quando estudamos as condições de equilíbrio de uma barra.

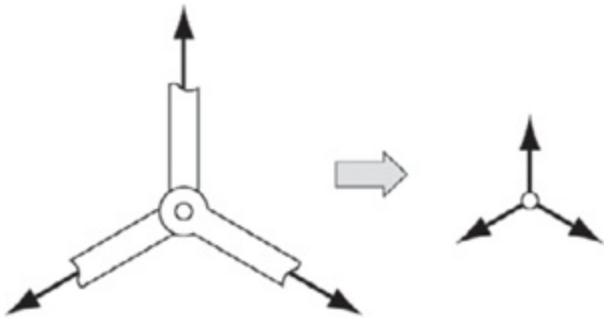


Figura 6.18 Modelo de um nó como uma partícula à qual são aplicadas as forças internas das barras ligadas ao nó.

6.2.5 Cargas, Suportes e Forças de Reação

Antes de iniciar uma análise estática completa de uma treliça,

precisamos considerar brevemente o modo como esta estrutura é *carregada* e *sustentada*. Para isso, é preciso determinar quais são as forças aplicadas à estrutura e os locais onde essas forças são aplicadas. Assim, por exemplo, o modo como a estrutura está apoiada no solo tem influência no seu comportamento. Durante esta discussão, vamos tomar como exemplo a treliça mostrada na Figura 6.19.

As *cargas* são forças aplicadas a uma estrutura e podem ser classificadas como *externas* ou *internas*. Existem vários tipos de cargas externas. No caso de uma ponte, por exemplo, as cargas externas são os veículos, o vento e outras estruturas, como sinais de trânsito instalados na ponte. No momento, não vamos nos preocupar com o tipo das cargas externas, mas vamos supor que o módulo, a orientação e o ponto de aplicação são conhecidos. No caso das treliças simples, unidas por pinos articulados, que vamos discutir, o ponto de aplicação das forças externas é *necessariamente* um nó. Assim, as forças externas são todas aplicadas aos pinos e *não* às barras. No exemplo da Figura 6.19, as cargas externas $\mathbf{F}_A$ e $\mathbf{F}_B$ são aplicadas aos pinos 2 e 3, respectivamente.

Outro tipo de força externa é a força gravitacional. Além de outras forças externas que venham a ser aplicadas, a estrutura deve ser capaz de sustentar o próprio peso. Obviamente, o peso está distribuído por todas as partes da estrutura e, portanto, não está aplicado apenas aos nós. Em geral, vamos supor em nossos exemplos que o peso das forças pode ser desprezado em comparação com outras forças aplicadas à estrutura. Se o peso fosse levado em conta, porém, seria tomado, aproximadamente, como uma carga externa distribuída por todos os nós.

Outro tipo importante de força externa são as forças exercidas pelos suportes, que impedem que a estrutura se mova. A Figura 6.19 mostra dois tipos diferentes de suporte: um no nó 1 e outro no nó 4. Os símbolos desses suportes são mostrados com detalhes na Figura 6.20.

O suporte do nó 1 é um *suporte fixo*, que mantém a estrutura totalmente imóvel. Isso significa que, por maiores que sejam as forças aplicadas à estrutura, podemos supor que este ponto da estrutura não se move em nenhuma direção. Em outras palavras, um suporte fixo é capaz de aplicar a carga que for necessária para impedir que o nó ao qual está ligado se mova. Isso significa ainda que no nó 1 sempre existe uma força, de valor desconhecido, que *reage* de modo adequado para manter imóvel a estrutura. Devido à natureza dessa força, ela é chamada de *força de reação* e é uma força de módulo e orientação desconhecidos. Entretanto, usando o método de representar vetores através de componentes, vamos representar a força de reação como dois vetores de direção conhecida (paralelos aos eixos do sistema de coordenadas) e módulo desconhecido. Os módulos desses vetores serão chamados de R_x e R_y.

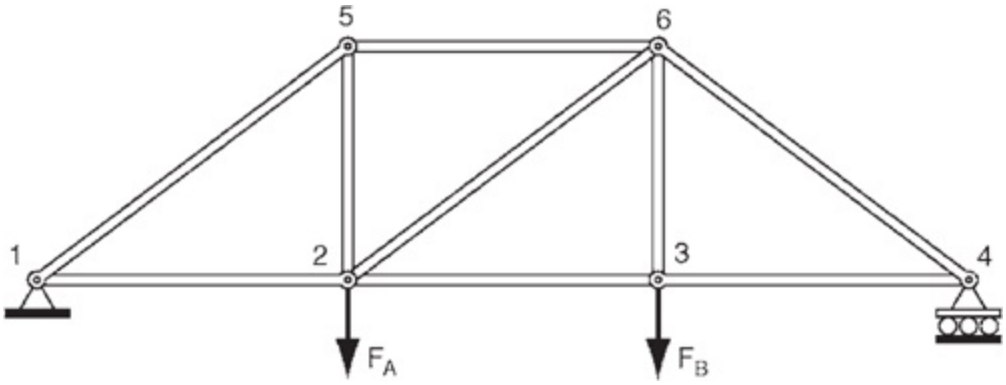


Figura 6.19 Exemplo de treliça com cargas externas e suportes.

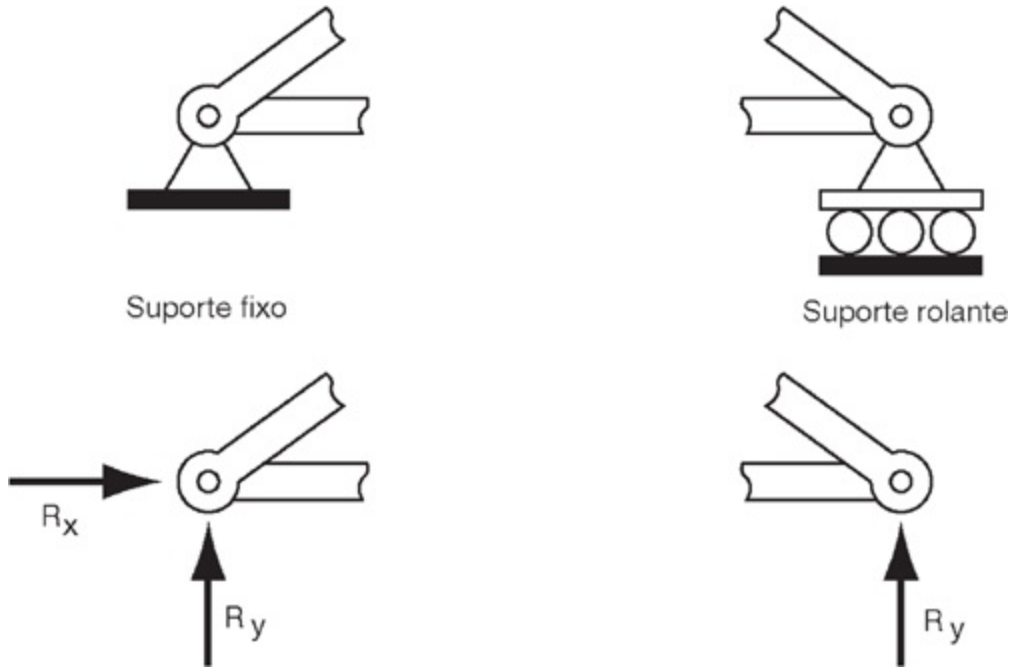


Figura 6.20 Dois tipos de suportes e as componentes de suas forças de reação.

Outro tipo de suporte foi usado no nó 4 da Figura 6.19 e aparece com detalhes na Figura 6.20. Esse tipo de suporte, conhecido como *suporte rolante*, cujo símbolo lembra um carrinho, produz uma reação apenas a forças aplicadas em uma certa direção. Um suporte rolante permite que a estrutura se mova paralelamente a uma superfície, mas não permite nenhum movimento na direção perpendicular a essa superfície. Assim, no nó 4, apenas uma reação vertical, de módulo desconhecido, é aplicada à estrutura. O fato de o símbolo ser um carrinho não significa que o suporte rolante possa ser desprendido da superfície; a força de reação se opõe a qualquer movimento perpendicular à superfície, mesmo que o suporte esteja preso a uma parede vertical ou a um telhado.

As forças de reação são fascinantes. Quando as cargas externas aplicadas à estrutura mudam, as reações também mudam, em uma tentativa de manter o equilíbrio. Elas mudam de direção de acordo com as necessidades, às vezes puxando, outras vezes empurrando. Por convenção, em geral *supomos* que as forças de reação apontam nas direções dos eixos do sistema de coordenadas. Se, depois de resolver

um problema de análise estática, descobrimos que uma força de reação é *negativa*, concluímos que nossa suposição inicial a respeito do sentido da força estava errada e que a força, na realidade, age no sentido oposto. Fazer suposições e verificar se estão corretas constitui, como já mencionamos anteriormente, uma parte importante da solução dos problemas de engenharia.

6.2.6 Análise Estática de uma Treliça Completa

Para que uma treliça esteja em equilíbrio estático, é preciso que todos os seus componentes, ou seja, todos os nós e barras, estejam, individualmente, em equilíbrio estático. Para ilustrar a análise estática de uma treliça, vamos considerar a treliça de três barras da Figura 6.21.

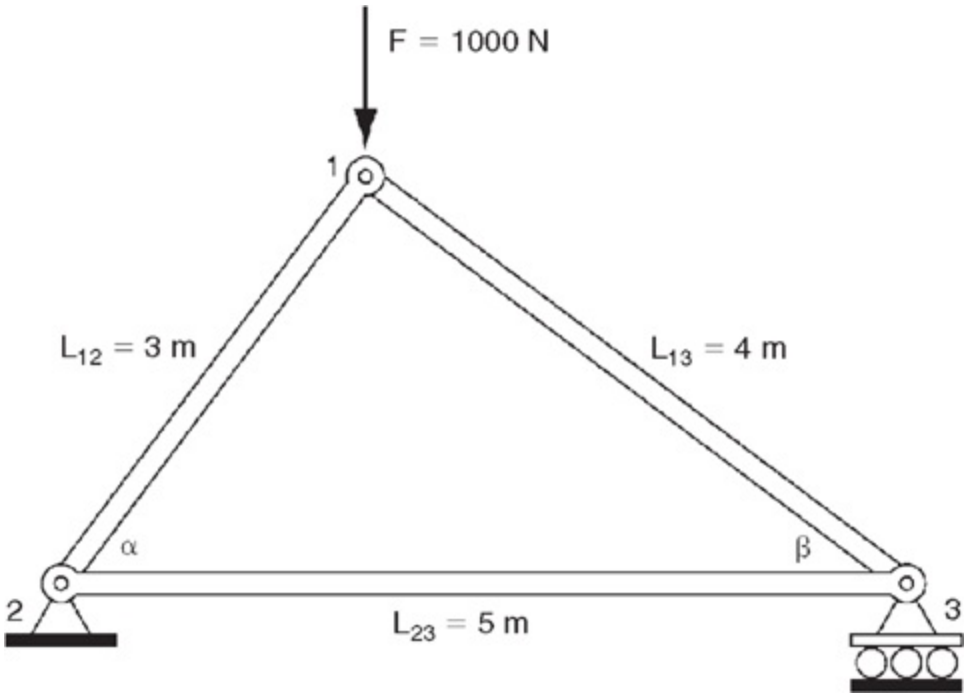


Figura 6.21 Uma treliça de três barras.

Definição do Problema Neste problema, a estrutura da treliça, seus suportes e a carga externa são conhecidos, e as forças internas das barras e as forças de reação externas são desconhecidas. O problema

consiste em determinar essas forças desconhecidas. A treliça tem três nós, três barras e dois suportes; a carga é uma única força $\mathbf{F} = 1000$ N, aplicada verticalmente ao nó superior. Os três nós são rotulados como 1, 2 e 3. As barras são designadas pelos nós das extremidades: barra 12, barra 13 e barra 23. Os comprimentos das barras são $L_{12} = 3$ m, $L_{13} = 4$ m e $L_{23} = 5$m.

Suposições Para resolver o problema, vamos fazer as seguintes suposições:

- Todos os nós são pinos articulados sem atrito, ou seja, as barras podem girar livremente em torno dos nós. Os nós são modelados como pontos ou partículas; para que um nó esteja em equilíbrio estático, a resultante das forças aplicadas ao nó deve ser nula.
- Todas as barras são elementos de duas forças em equilíbrio estático, ou seja, os pinos articulados nas extremidades de cada barra aplicam à barra forças iguais e opostas, alinhadas com a maior dimensão da barra.

Plano Para resolver o problema:

1. Desenhe um diagrama que mostre as forças aplicadas a todos os nós e inclua as forças internas das barras, as forças de reação nos suportes e a força externa aplicada.
2. Escreva, para cada nó, um par de equações que reflita o equilíbrio estático, ou seja, o fato de que a soma das forças nas direções x e y deve ser nula: $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$.
3. Resolva o sistema de equações resultante para determinar as forças internas e as forças de reação.

Implementação do Plano

Diagrama de Forças em Cada Nó A Figura 6.22 mostra as forças a que estão submetidos os nós da treliça. Cada barra aplica uma força

interna $\mathbf{N}_{ij}$ aos nós situados em suas extremidades, onde i e j são os números dos nós. Adotamos a convenção de desenhar as forças que as barras aplicam aos nós apontando dos nós para o centro das barras, o que equivale a supor que as barras estão sendo tracionadas. Se os cálculos mostram que os valores dessas forças para uma barra são negativos, isso significa que essa barra está sendo comprimida.

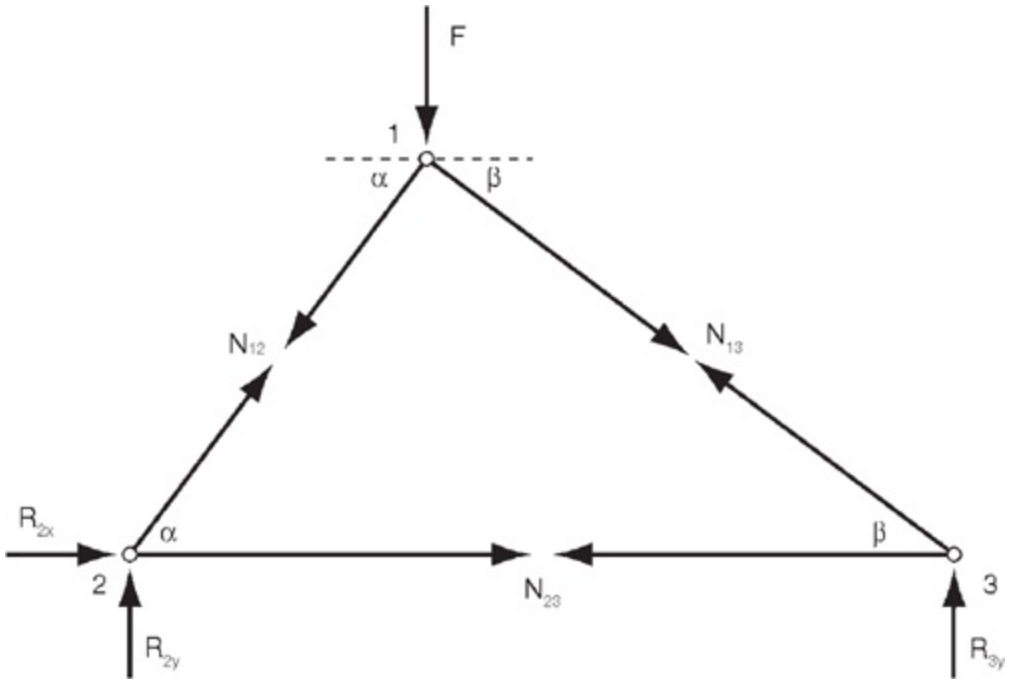


Figura 6.22 Forças a que estão submetidos os nós da treliça da Figura 6.21.

Os suportes que sustentam os nós 2 e 3 aplicam forças de reação à treliça. Como o suporte do nó 2 é um suporte fixo, aplica forças de reação nas direções x e y; como o suporte do nó 3 é um suporte rolante, aplica uma força de reação apenas na direção y.

Equações de Equilíbrio Estático em Cada Nó Esta é a etapa da solução do problema na qual aplicamos as Leis de Newton aos nós da treliça. Observe que já aplicamos as Leis de Newton às barras da treliça quando afirmamos que existem forças iguais e opostas nas extremidades das barras. Uma vez desenhado o diagrama de forças da Figura 6.22, podemos somar as componentes x e y das forças em

todos os nós e igualar os resultados a zero.

O nó 1 está submetido a três forças: a força externa **F** e duas forças internas, $\mathbf{N}_{12}$ e $\mathbf{N}_{13}$. As componentes x e y dessas forças são as seguintes:

$$N_{12x} = -N_{12}\cos(\alpha) = -\frac{3}{5}N_{12} \quad N_{12y} = -N_{12}\,\mathrm{sen}(\alpha) = -\frac{4}{5}N_{12}$$

$$N_{13x} = N_{13}\cos(\beta) = \frac{4}{5}N_{13} \quad N_{13y} = -N_{13}\,\mathrm{sen}(\beta) = -\frac{3}{5}N_{13}$$

$$F_x = \quad F_y = -1000$$

Somando as forças nas direções x e y e igualando os resultados a zero, obtemos as seguintes equações:

$$\sum F_x = 0 \text{ no nó 1:} \quad -\frac{3}{5}N_{12} + \frac{4}{5}N_{13} = 0 \quad (6.1a)$$

$$\sum F_y = 0 \text{ no nó 1:} \quad -\frac{4}{5}N_{12} + -\frac{3}{5}N_{13} - 1000 = 0 \quad (6.1b)$$

As condições de equilíbrio estático para o nó 2 podem ser determinadas da mesma forma. O nó 2 está submetido a quatro forças: duas forças internas, N_{12} e N_{23}, e duas forças de reação, R_{2x} e R_{2y}. Precisamos apenas separar N_{12} em componentes x e y, pois as outras forças já têm a direção de um dos eixos:

$$N_{12x} = N_{12}\cos(\alpha) = \frac{3}{5}N_{12} \quad N_{12y} = N_{12}\,\mathrm{sen}(\alpha) = \frac{4}{5}N_{12}$$

Somando as forças nas direções x e y e igualando os resultados a zero, obtemos as seguintes equações:

$$\sum F_x = 0 \text{ no nó 2:} \quad \frac{3}{5}N_{12} + N_{23} + R_{2x} = 0 \quad (6.2a)$$

$$\sum F_y = 0 \text{ no nó 2:} \quad \frac{4}{5}N_{12} + R_{2y} = 0 \quad (6.2b)$$

Finalmente, determinamos as condições de equilíbrio para o nó 3. O nó 3 está submetido a três forças: duas forças internas, N_{13} e N_{23}, e

uma força de reação, R_{3y}. Apenas N_{13} precisa ser separada em componentes x e y.

$$N_{13x} = -N_{13}\cos(\beta) = -\frac{4}{5}N_{13} \quad N_{13y} = N_{13}\,\text{sen}(\beta) = \frac{3}{5}N_{13}$$

As equações de equilíbrio são, portanto,

$$\sum F_x = 0 \text{ no nó 3:} \quad -\frac{4}{5}N_{13} + -N_{23} = 0 \qquad (6.3a)$$

$$\sum F_y = 0 \text{ no nó 3:} \quad \frac{3}{5}N_{13} + R_{3y} = 0 \qquad (6.3b)$$

Solução do Sistema de Equações para Calcular as Forças Desconhecidas Neste ponto, temos um sistema de seis equações com seis incógnitas, que devemos resolver para calcular as forças desconhecidas. As seis equações são as condições de equilíbrio (6.1a), (6.1b), (6.2a), (6.2b), (6.3a) e (6.3b). As seis incógnitas são as forças internas N_{12}, N_{13} e N_{23} e as forças de reação R_{2x}, R_{2y} e R_{3y}.

Para resolver um sistema de equações de equilíbrio, procuramos primeiro uma equação com apenas uma incógnita, que possa ser resolvida de forma trivial. Como não existe nenhuma equação desse tipo, procuramos um sistema de duas equações com duas incógnitas e encontramos um, formado pelas Equações (6.1a) e (6.1b). Resolvendo o sistema, obtemos:

$$N_{12} = -800\,\text{N} \text{ ou } 800\,\text{N de compressão}$$
$$N_{13} = -600\,\text{N} \text{ ou } 600\,\text{N de compressão}$$

Substituindo o valor de N_{13} nas Equações (6.3a) e (6.3b), obtemos:

$$N_{23} = 480\,\text{N} \text{ ou } 480\,\text{N de tração}$$
$$R_{3y} = 360\,\text{N}$$

Finalmente, substituindo os valores dessas forças nas Equações (6.2a) e (6.2b), obtemos:

$$R_{2x} = 0\,\text{N}$$
$$R_{2y} = 640\,\text{N}$$

Esses resultados aparecem na Figura 6.23.

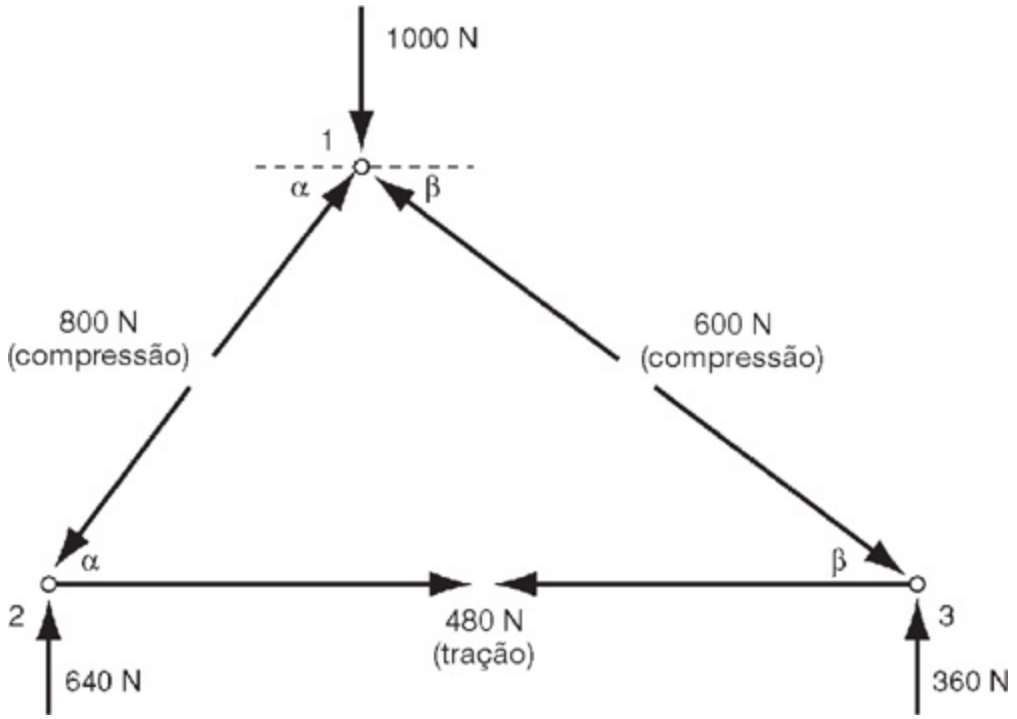


Figura 6.23 Resultados da análise estática da treliça de três barras da Figura 6.21.

Discussão Esta análise revela vários fatos interessantes. Em primeiro lugar, talvez o leitor fique surpreso ao constatar que a força de reação R_{2x} é zero. Os valores das forças de reação e das forças internas de uma treliça dependem do módulo e da orientação das forças externas e, para algumas configurações da carga, uma ou mais dessas forças podem se anular, como será visto novamente em um dos problemas do final do capítulo. Em segundo lugar, observamos que as equações de equilíbrio dependem dos ângulos entre as barras, mas não do comprimento das barras. Isso significa que, se aumentarmos ou reduzirmos o tamanho da treliça, mantendo constantes a carga, o tipo de apoio e os ângulos entre as barras, as forças calculadas serão as mesmas. Finalmente, observe que esta análise não exigiu nenhuma informação a respeito da seção reta das barras ou do material de que são feitas. Isso significa que, para uma dada treliça, as forças são as mesmas, qualquer que seja a composição das barras!

6.3 PONTO DE VISTA DOS MATERIAIS

Quando aplicamos uma força a um objeto sólido impossibilitado de se mover, o objeto sofre uma *deformação*. Essa deformação pode ser tão pequena que não é notada, mas sempre acontece. Nesta seção, vamos examinar as relações entre a força aplicada a uma barra, sua composição, suas dimensões e a deformação sofrida.

No caso das treliças, o ponto de vista dos materiais é importante por vários motivos. Em primeiro lugar, sabendo como cada barra se deforma ao ser submetida a uma força, podemos calcular qual é a deformação sofrida pela treliça como um todo, o que pode ser muito importante para determinar se ela é capaz de desempenhar a contento a função para a qual foi projetada. Assim, por exemplo, entre os requisitos de uma treliça usada para sustentar um aparelho científico ou uma ponte pode estar o de que a deformação não deve exceder um certo valor. Em segundo lugar, uma barra se rompe se sofrer uma deformação maior que um determinado limite, e uma das considerações mais importantes ao modelar uma treliça é assegurar que esse limite não seja excedido em uma das barras.

6.3.1 As Barras como Molas: a Lei de Hooke e o Módulo de Young

Suponhamos que temos uma barra, feita de um certo material de comprimento L e seção reta de área A, como mostra a Figura 6.24. Se uma força F é aplicada às duas extremidades da barra, o comprimento da barra muda. Esta mudança é chamada de *dilatação*. Representamos a dilatação pelo símbolo ΔL, no qual o "Δ", na notação de engenharia, significa uma "variação pequena, mas mensurável". Por convenção, se a barra é tracionada e, portanto, sofre uma dilatação positiva, a força é positiva; se a barra é comprimida e, portanto, sofre uma dilatação negativa, a força é negativa.

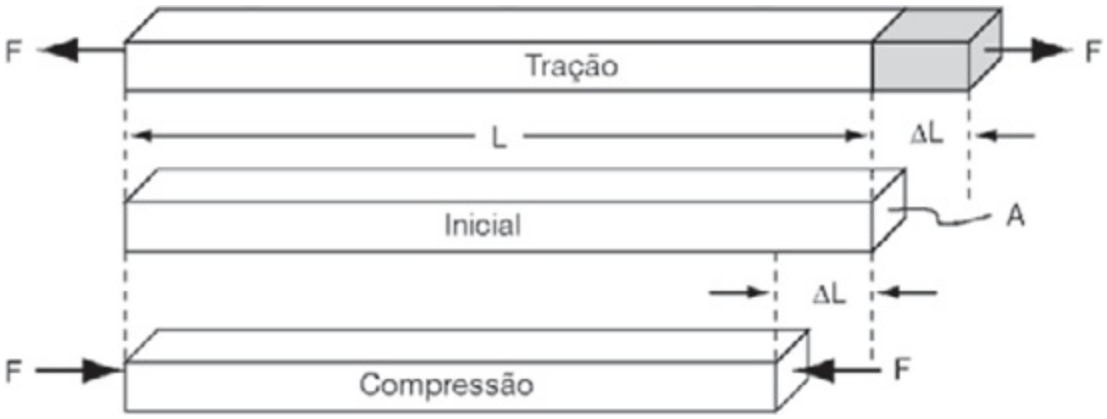


Figura 6.24 Uma barra de comprimento L e seção reta de área A sofre uma dilatação ΔL quando é submetida a uma força F nas duas extremidades.

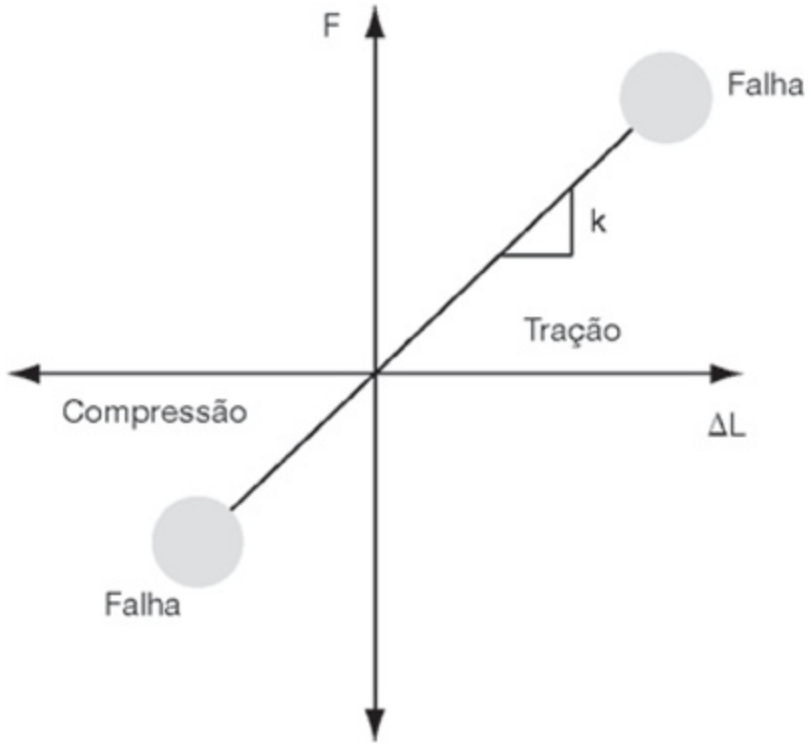


Figura 6.25 Força em função da dilatação para uma barra.

Na maioria dos materiais de que são feitas as treliças, como madeira e metais, o gráfico da força F em função da dilatação ΔL tem a forma mostrada na Figura 6.25. Para pequenas dilatações – positivas ou negativas – a dilatação é aproximadamente proporcional à força e, portanto, a barra obedece à Lei de Hooke,

$$F = k \cdot \Delta L,$$

onde k é a *constante de mola* da barra. Quando a intensidade da força ultrapassa um certo limite, porém, esse comportamento muda e, para forças ainda maiores, a barra se rompe ou *falha*. Nesta seção, vamos tratar da região na qual a Lei de Hooke se aplica; os mecanismos de falha serão considerados na Seção 6.3.2.

Dada uma barra, podemos determinar a constante de mola k realizando um experimento no qual aplicamos à barra uma força conhecida F e medimos a dilatação ΔL. A constante de mola é dada por

$$k = \frac{F}{\Delta L}.$$

Não é prático, porém, fazer isso para todas as barras de uma treliça. Uma abordagem mais interessante seria encontrar uma forma de calcular a constante de mola a partir das dimensões da barra e de alguma propriedade do material de que é feita a barra. Para ter uma ideia de como é possível separar a constante de mola em um termo que depende das dimensões e outro que depende das propriedades do material, consideremos um experimento no qual tomamos uma amostra da barra na forma de um pequeno cubo, de comprimento L e área A iguais a 1, independentemente do sistema de unidades utilizado, como mostra a Figura 6.26. Suponhamos que, para determinar a constante de mola do cubo, aplicamos à amostra uma força F e medimos a dilatação ΔL:

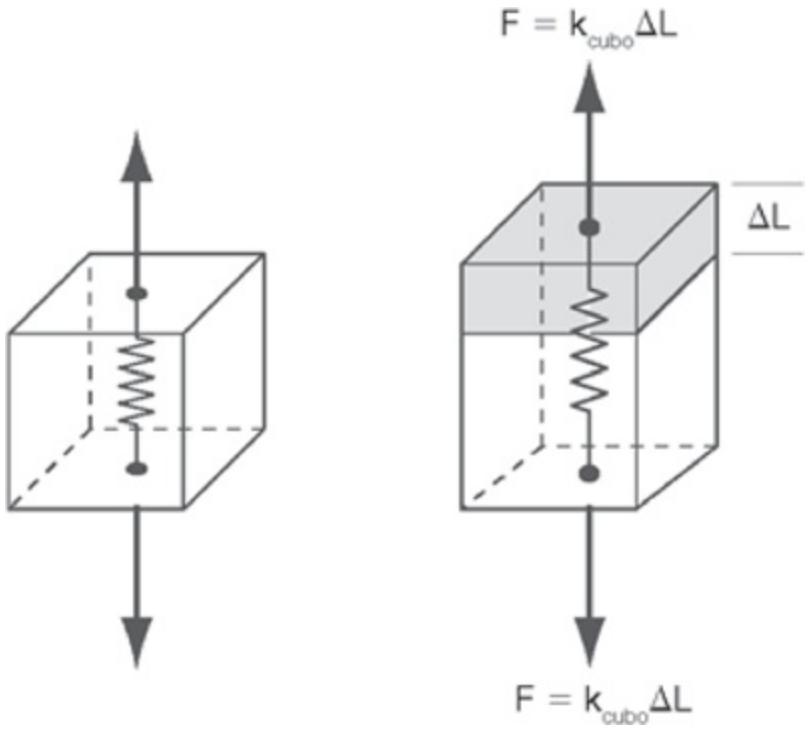


Figura 6.26 Um cubo unitário de um material visto como uma mola.

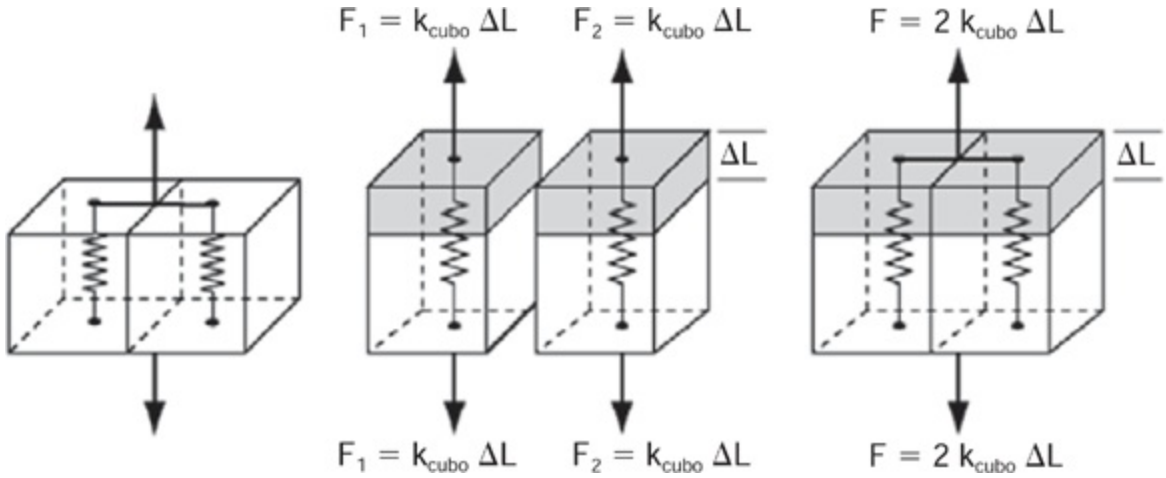


Figura 6.27 Multiplicar por dois a área da seção reta de um cubo unitário equivale a ligar duas molas em paralelo

$$k_{\text{cubo}} = \frac{F}{\Delta L}$$

Reagrupando os termos, podemos dizer que a força necessária para alongar uma amostra de comprimento e área da seção reta iguais a 1 é dada por

$$\text{Área} = 1, \text{comprimento} = 1 \Rightarrow F = k_{\text{cubo}} \cdot \Delta L$$

Suponhamos agora que a área da seção reta do cubo seja duplicada. Como mostra a Figura 6.27, se pensamos no cubo original como uma mola de constante k_{cubo}, uma amostra cuja seção reta em área 2 é como duas molas em paralelo, ambas com uma constante de mola k_{cubo}. Para que esta combinação sofra o mesmo alongamento ΔL, devemos aplicar uma força $k_{\text{cubo}} \cdot \Delta L$ a *cada* mola. Assim, a força total que devemos aplicar à amostra é

$$\text{Área} = 2, \text{comprimento} = 1 \Rightarrow F = 2k_{\text{cubo}} \cdot \Delta L$$

Se a área da seção reta da amostra é aumentada para A, é como se tivéssemos A molas em paralelo, e a força necessária para produzir um alongamento ΔL é dada por

$$\text{Área} = \text{A}, \text{comprimento} = 1 \Rightarrow F = Ak_{\text{cubo}} \cdot \Delta L$$

Suponhamos agora que voltamos ao cubo original e duplicamos o comprimento. Como mostra a Figura 6.28, isso equivale a ligar em série duas molas de constante de mola k_{cubo}. Se esta amostra sofre um alongamento ΔL uniformemente distribuído ao longo do comprimento, metade do comprimento da amostra sofre um alongamento $\Delta L/2$. Como é necessária apenas metade da força para produzir metade do alongamento-padrão, a força necessária para produzir um alongamento ΔL nesta amostra é

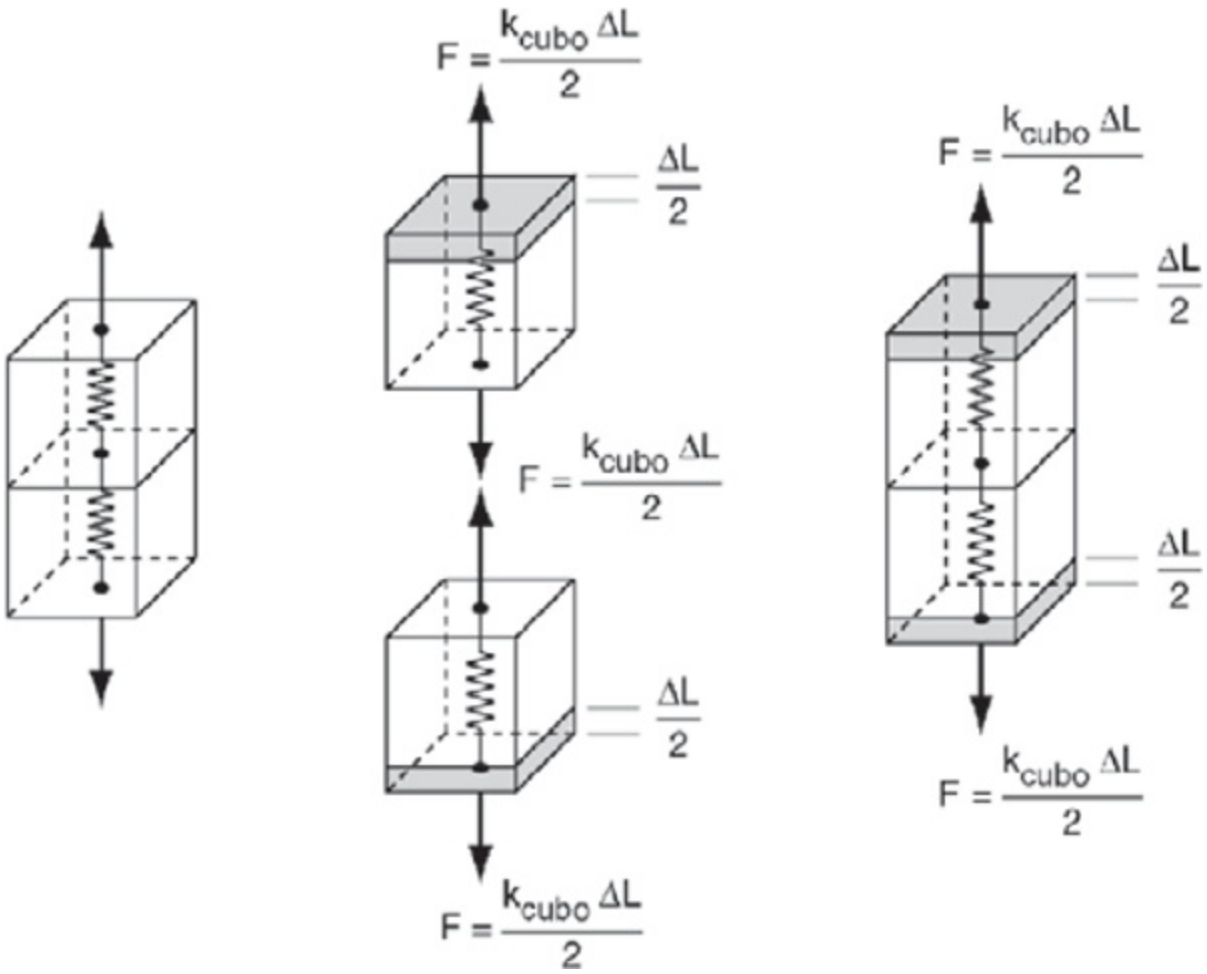


Figura 6.28 Multiplicar por dois o comprimento de um cubo unitário equivale a ligar duas molas em série.

$$\text{Área} = 1, \text{comprimento} = 2 \;\Rightarrow\; F = \frac{k_{\text{cubo}}}{2} \cdot \Delta L$$

Generalizando este resultado, se temos uma amostra de comprimento L e a área da seção reta é 1, é como se tivéssemos L molas em série, e a força necessária para produzir um alongamento ΔL é

$$\text{Área} = 1, \text{comprimento} = \text{L} \;\Rightarrow\; F = \frac{k_{\text{cubo}}}{L} \cdot \Delta L$$

Finalmente, consideremos uma amostra do mesmo material que o cubo unitário original, mas de comprimento L e área da seção reta A. Podemos pensar nesta amostra como um conjunto de molas com A

molas em paralelo e L molas em série. Como colocar A molas em paralelo multiplica a força por A e colocar L molas em série divide a força por L, a força necessária para produzir um alongamento ΔL é dada por

$$\text{Área} = \text{A, comprimento} = \text{L} \;\Rightarrow\; F = \frac{Ak_{\text{cubo}}}{L} \cdot \Delta L \quad (6.4)$$

De acordo com a Equação (6.4), podemos escrever a seguinte expressão para a constante de mola de uma barra de dimensões arbitrárias em termos de suas dimensões e da constante de mola de um cubo unitário:

$$k_{\text{A}\times\text{L}} = \frac{Ak_{\text{cubo}}}{L}.$$

Em outras palavras, se conhecemos a constante de mola k_{cubo} de um cubo unitário feito de um certo material, podemos determinar a constante de mola de uma barra de dimensões arbitrárias feita do mesmo material. Isso significa que k_{cubo} é a propriedade do material, que estamos buscando. Formalmente, a constante k_{cubo} é chamada de *módulo de Young* ou *módulo de elasticidade* do material, e representada pela letra E. Como a massa específica, o módulo de Young é uma propriedade intrínseca dos materiais, que não depende do tamanho da amostra utilizada.

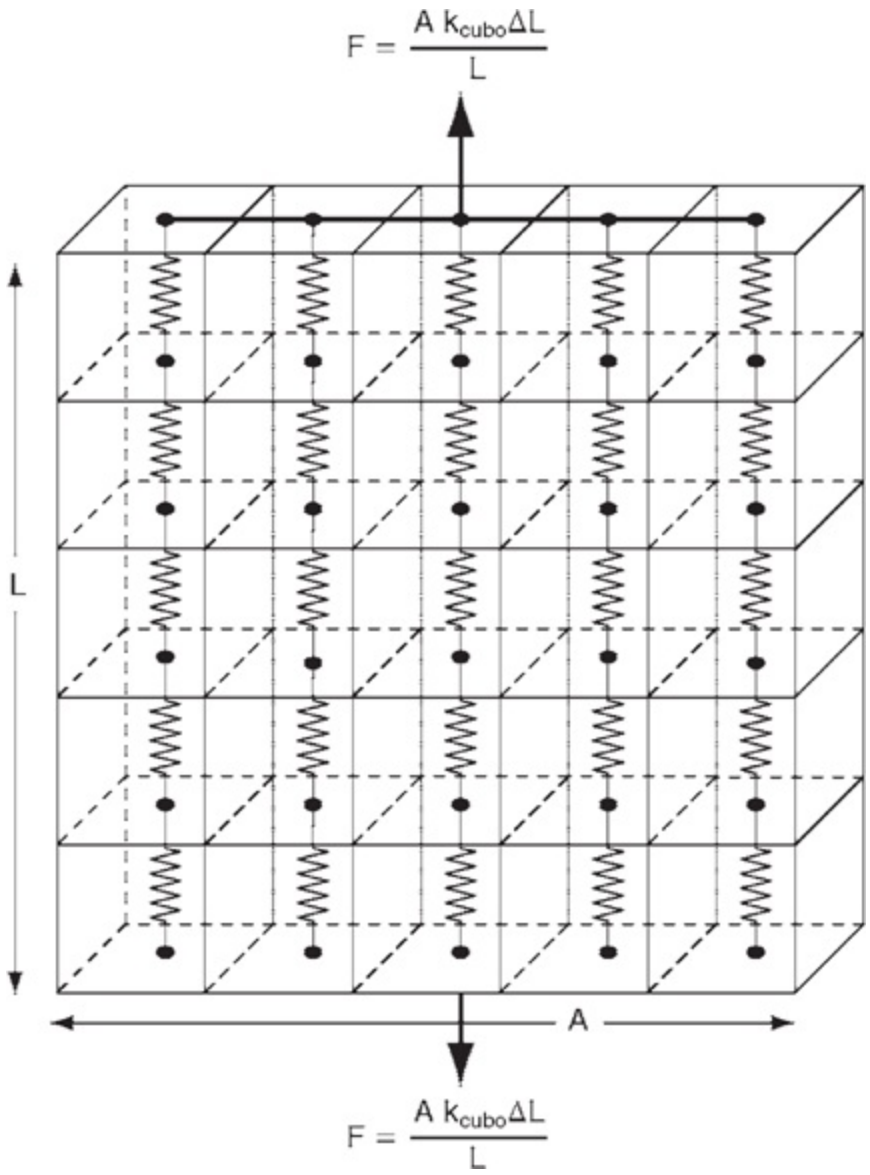


Figura 6.29 Modelo de uma amostra de comprimento L e área de seção reta A usando molas.

Como podemos, na prática, medir o módulo de Young de um material? Uma forma seria fabricar um cubo de dimensões unitárias, aplicar uma força e medir a dilatação. Observando a Equação (6.4), porém, constatamos que é possível determinar k_{cubo} usando uma barra de dimensões arbitrárias. Explicitando k_{cubo} na Equação (6.4), obtemos

$$\text{Módulo de Young: } E = k_{\text{cubo}} = \frac{F/A}{\Delta L/L}. \qquad (6.5)$$

Assim, aplicando uma força F e medindo a dilatação ΔL (ou viceversa) em uma barra de comprimento L e área da seção reta A, podemos determinar o módulo de Young usando a Equação (6.5).

Exemplo 6.1 **Determinação do Módulo de Young do Aço**

Uma barra de aço com 4×10^{-5} m^2 de seção reta e 0,025 m de comprimento sofre um alongamento de $1{,}4 \times 10^{-5}$ m quando é submetida a uma força de 5.000 N. Qual é o módulo de Young desse tipo de aço?

Solução De acordo com o enunciado do problema,

$$F = 5.000 \text{ N}$$
$$A = 4 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$
$$L = 0{,}025 \text{ m}$$
$$\Delta L = 1{,}4 \times 10^{-5} \text{ m}$$

O módulo de Young é

$$E = \frac{F/A}{\Delta L/L} = \frac{5.000/4 \times 10^{-5}}{1{,}4 \times 10^{-5}/0{,}025} = 22 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

Exemplo 6.2 **Dilatação de um Palito de Sorvete**

Os palitos de sorvete são feitos de pinho, que tem um módulo de Young de aproximadamente 9×10^9 N/m^2. As dimensões nominais de um palito de sorvete são 110 mm de comprimento, 9,5 mm de largura e 2,1 mm de espessura. Qual é a dilatação sofrida por um palito de sorvete ao ser submetido a uma força de 20 N?

Solução A única dificuldade deste problema está na conversão de unidades. Como o módulo de Young é dado em unidades do SI, vamos converter as dimensões do palito para metros. O resultado é o seguinte:

$$\begin{aligned} F &= 20\,\text{N} \\ E &= 9 \times 10^9\,\text{N/m}^2 \\ A &= (9{,}5 \times 10^{-3}\,\text{m})(2{,}1 \times 10^{-3}\,\text{m}) \\ &= 2{,}0 \times 10^{-5}\,\text{m}^2 \\ L &= 0{,}11\,\text{m} \end{aligned}$$

De acordo com a Equação (6.5),

$$\begin{aligned} \Delta L &= \frac{FL}{AE} \\ &= \frac{(20)(0{,}11)}{(2{,}0 \times 10^{-5})(9 \times 10^9)} \\ &= 1{,}2 \times 10^{-5}\,\text{m} \\ &= 0{,}012\,\text{mm} \end{aligned}$$

A título de comparação, a espessura de um fio de cabelo é da ordem de 0,05 a 0,10 mm.

O leitor deve estar se perguntando como é possível medir distâncias tão pequenas. Hoje em dia, existem várias formas de fazer isso com equipamentos relativamente simples. Um desses equipamentos é um dispositivo mecânico, conhecido como relógio comparador, que aparece na Figura 6.30. O relógio comparador usa uma engrenagem de precisão para transformar um pequeno deslocamento linear na rotação de um ponteiro. Um relógio comparador com precisão de 0,01 mm custa menos de R$ 50,00, e um relógio comparador com precisão de 0,001 mm custa menos de R$ 300,00.

6.3.2 Resistência dos Materiais

Como foi mencionado de passagem no início da última seção, a maioria dos materiais de que são feitas as treliças obedece à Lei de Hooke para pequenas dilatações; no caso de grandes dilatações, o comportamento é diferente, e, se um certo limite é ultrapassado, o material falha. Nesta seção, vamos discutir os métodos usados para quantificar a resistência dos materiais e alguns dos fatores que

contribuem para essa resistência.

Uma certa dilatação ΔL pode ser, ou não, considerada “grande”, dependendo do comprimento da barra que está sendo dilatada. No estudo da resistência dos materiais, estamos interessados em uma medida da dilatação que, como o módulo de Young, não dependa das dimensões da barra. A dilatação por unidade de comprimento da barra é chamada de *deformação*, representada pelo símbolo ε e definida através da equação

$$\text{Deformação} = \varepsilon = \Delta L/L.$$

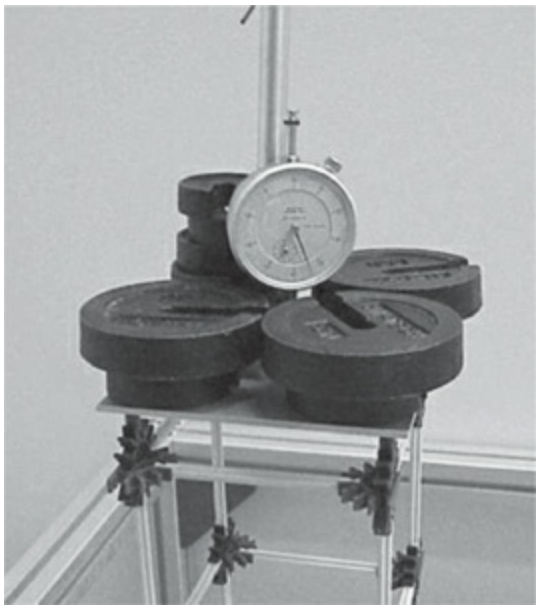


Figura 6.30 Um relógio indicador sendo usado para medir a dilatação sofrida por um brinquedo ao ser submetido a uma carga.

Como tanto o numerador como o denominador têm dimensão de comprimento, a deformação é *adimensional*.

Da mesma forma, uma certa força F pode ser, ou não, considerada “grande”, dependendo da área ao longo da qual está distribuída. A força por unidade de área da seção reta da barra é chamada de *tensão*, representada pelo símbolo $\sigma =$ e definida através da equação

$$\text{Tensão} = \sigma = F/A.$$

A tensão tem dimensões de *pressão*, força por unidade de área. No sistema SI, a unidade de pressão e de tensão é o *pascal*, cujo símbolo é Pa; 1 Pa equivale a 1 N/m^2. No sistema usado nos Estados Unidos, a pressão é medida em libras por polegada quadrada, ou psi. Note que, de acordo com a Equação 6.5 e as definições de tensão e deformação, a equação do módulo de Young pode ser escrita na forma

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

Como a deformação do denominador é adimensional, o módulo de Young tem as mesmas dimensões que a pressão e a tensão, e também pode ser expresso em pascals.

Na Figura 6.25, ilustramos a dilatação de um material sob o efeito de uma força no caso de uma amostra específica, com certas dimensões. Para caracterizar a resistência de um material independentemente das dimensões de uma barra feita do material, os engenheiros usam gráficos tensão-deformação como o da Figura 6.31. Um gráfico tensão-deformação tem a mesma forma que um gráfico força-dilatação. A inclinação do gráfico tensão-deformação na região em que o material obedece à Lei de Hooke é igual ao módulo de Young, enquanto era igual à constante de mola no gráfico força-dilatação. Lembre-se de que o módulo de Young é simplesmente a constante de mola de uma barra do material na forma de um cubo de dimensões unitárias.

Quando a tensão aplicada a uma amostra é muito elevada, a amostra se rompe (falha). Diferentes materiais apresentam diferentes mecanismos de falha e se comportam de maneira diferente quando submetidos a tração e compressão. Alguns materiais falham bruscamente quando a tensão atinge um certo valor, enquanto outros sofrem grandes deformações antes de falhar. Independentemente do modo como uma amostra falha, a tensão para a qual a amostra finalmente se rompe, mostrada na Figura 6.31, é chamada de *tensão de ruptura*.

Podemos estudar a resistência e a falha dos materiais do ponto de vista *macroscópico* ou do ponto de vista *microscópico*. O ponto de vista macroscópico tem a ver com as propriedades gerais do material ao se deformar sob a ação de uma carga, como é mostrado pela curva tensão-deformação. Em outras palavras, a visão macroscópica está relacionada aos sintomas da deformação, enquanto a visão microscópica está relacionada às causas da deformação em termos da composição do material. Uma hierarquia de pontos de vista, que vai do macroscópico ao microscópico, considera os materiais com um grau de resolução cada vez maior, até chegar aos níveis molecular e atômico.

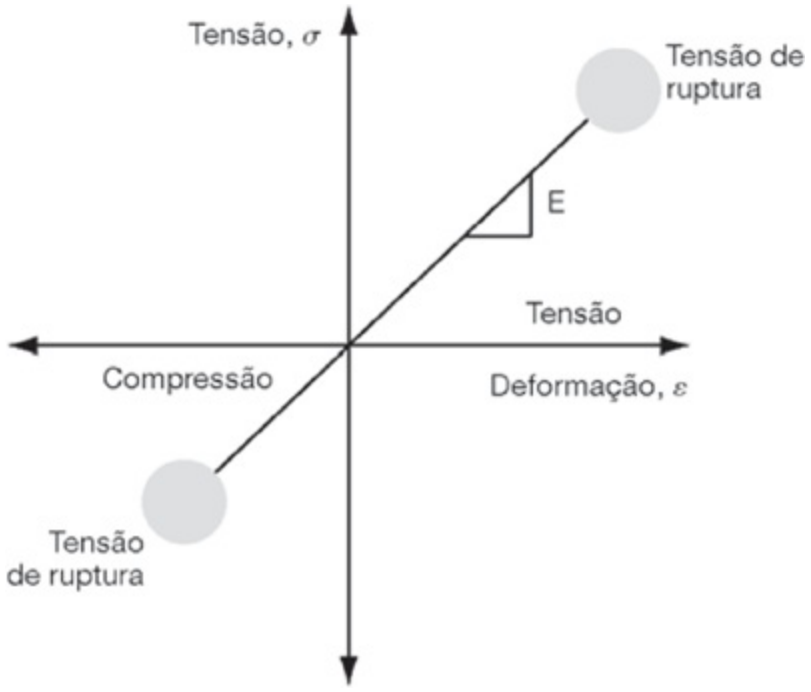


Figura 6.31 Gráfico tensão-deformação de um material.

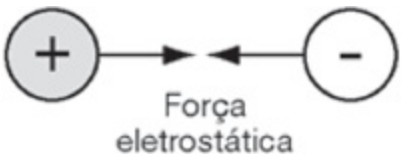


Figura 6.32 As partículas positivas e negativas de um material são mantidas unidas pela força eletrostática.

Em última análise, a resistência de um material se deve à força de atração entre partículas de carga positiva e de carga negativa, conhecida como *força eletrostática* (Figura 6.32). Graças à força eletrostática, os átomos se unem para formar moléculas de várias formas; as formas dessas moléculas e o modo como se agrupam têm grande influência no modo como os materiais se comportam do ponto de vista macroscópico. Vamos agora discutir, em detalhes, dois dos materiais de construção mais comuns, metal e madeira, e o modo como a composição afeta seu comportamento mecânico.

Metal Nos metais, os átomos formam estruturas regulares compactas chamadas *cristais* (Figura 6.33). Quando uma pequena tensão é aplicada a um metal, os átomos se afastam ligeiramente uns dos outros, e o metal se comporta de acordo com a Lei de Hooke. Quando uma tensão maior é aplicada, uma parte da estrutura "escorrega" em relação a outra. Este fenômeno em geral começa em um local onde existe um defeito, como a falta de um átomo. Se a tensão continua a ser aplicada, o escorregamento continua até o material se romper.

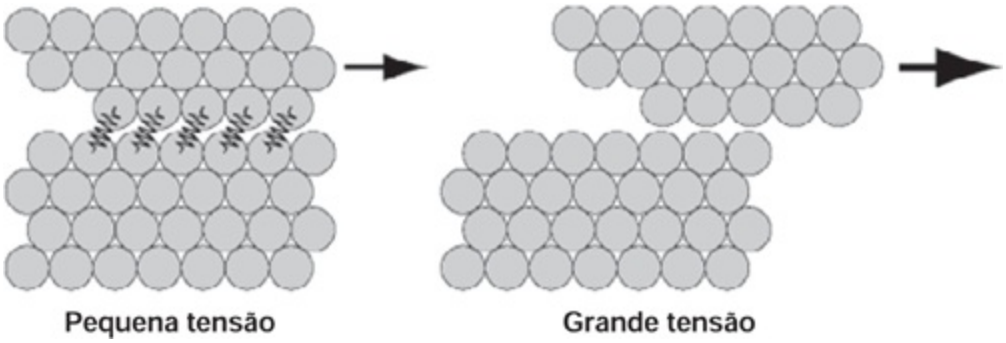


Figura 6.33 Estrutura cristalina de um metal.

Esse comportamento pode ser visto claramente na curva tensão-deformação de um metal (Figura 6.34). Quando uma tensão crítica, conhecida como *limite de escoamento*, é ultrapassada, o metal começa a se deformar sem que haja um aumento significativo da tensão. O limite de escoamento é o ponto no qual começa a haver escorregamento na estrutura cristalina. Finalmente, o metal se

deforma a tal ponto que a tensão de ruptura é atingida e o material se rompe. Essa deformação sem que haja um aumento significativo da tensão é chamada de comportamento *plástico*, enquanto a deformação de acordo com a Lei de Hooke é chamada de comportamento *elástico*. Como exemplo de comportamento plástico, pense em um pedaço de goma de mascar, que pode sofrer um grande alongamento, sem se romper.

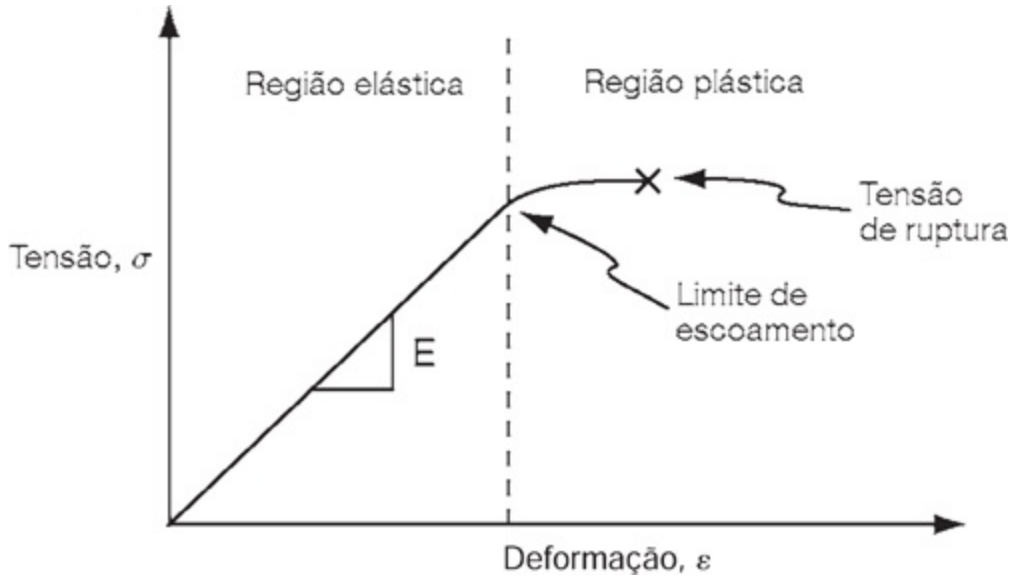


Figura 6.34 Curva tensão-deformação de um metal. Um metal sofre escoamento e exibe comportamento plástico quando começa a ocorrer escorregamento na estrutura cristalina.

Madeira A estrutura da madeira é, obviamente, muito diferente da do metal, e seu comportamento mecânico reflete as peculiaridades de sua estrutura. A madeira é feita das paredes celulares de células vegetais mortas. Estruturalmente, essas paredes celulares são feitas principalmente de longas fibras de *celulose*, mantidas juntas por uma substância chamada *lignina*, que é responsável pelo "grão" da madeira, como mostra a Figura 6.35.

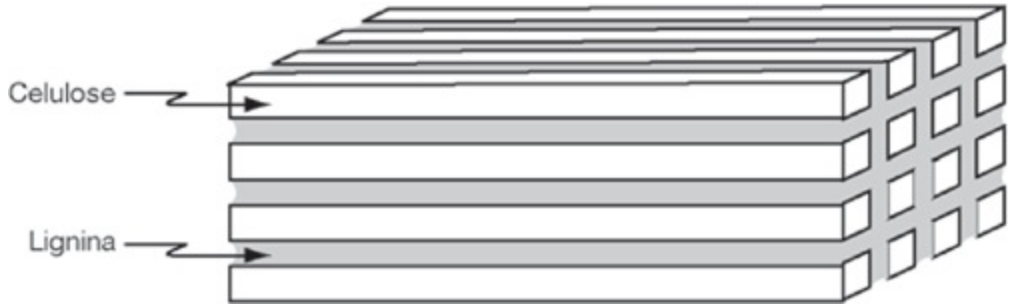


Figura 6.35 A madeira é composta de fibras de celulose unidas por lignina.

A celulose e a lignina são *polímeros*. Polímero é uma molécula gigante formada por um número muito grande de unidades iguais, chamadas *monômeros*, ligadas umas às outras. Os polímeros podem ser cadeias lineares ou complexas redes tridimensionais. A celulose é uma cadeia linear de moléculas de glicose. A lignina possui uma estrutura molecular muito mais complexa, que lembra uma tela de arame. A Figura 6.36 mostra a estrutura das duas moléculas.

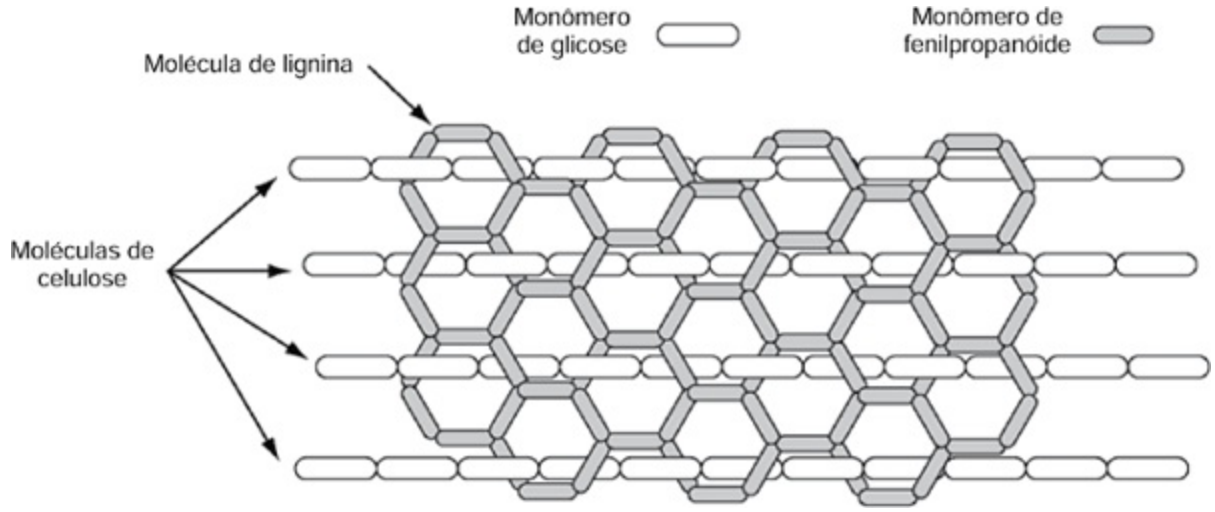


Figura 6.36 Estrutura molecular da madeira, mostrando as cadeias de celulose unidas por uma malha de lignina. A verdadeira forma da molécula de lignina é muito mais complexa do que este diagrama sugere, e a molécula possui três variedades diferentes de monômeros fenilpropanóides.

Como é um material compósito, a madeira apresenta propriedades mecânicas diferentes para forças de tração e de compressão; além disso, as propriedades mecânicas dependem da orientação da força

em relação ao grão. A Figura 6.37 mostra valores aproximados da tensão de ruptura da madeira para vários tipos de forças. A resistência da madeira é maior para forças de compressão paralelas ao grão, e menor para forças de compressão perpendiculares ao grão.

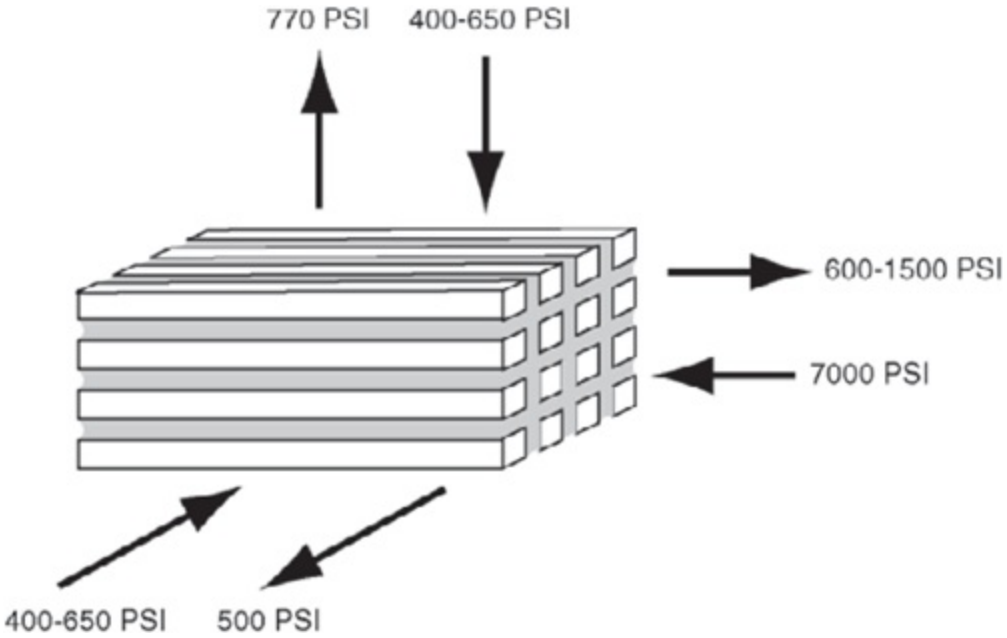


Figura 6.37 Valores aproximados da tensão de ruptura da madeira para tensões aplicadas em diferentes direções.

A Tabela 6.1 mostra a massa específica, o módulo de Young e a tensão de ruptura de alguns materiais comuns.

TABELA 6.1 Massa específica, módulo de Young e tensão de ruptura de alguns materiais comuns de engenharia

	Massa Específica		Módulo de Young		Tensão de Ruptura	
Material	**kg/m³**	**lb/in³**	**10^9 N/m²**	**10^3 lb/n²**	**10^6 N/m²**	**lb/in²**
Aço	7860	0,2840	200	29008	400	58015
Alumínio	2710	0,0979	70	10153	110	15954
Vidro	2190	0,0791	65	9427	50	7252
Concreto	2320	0,0838	03	4351	40	5802
Madeira	525	0,0190	13	1885	50	7252
Osso	1900	0,0686	9	1305	170	24656

Poliestireno	1050	0,0379	3	435	48	6962

6.3.3 Flambagem

Imagine pegar um pedaço de macarrão cru e comprimi-lo no sentido da maior dimensão. Uma força moderada é suficiente para fazer o macarrão quebrar, mas isso não acontece porque a tensão de ruptura da massa foi atingida. A causa da falha é a *flambagem* ou curvatura do pedaço de macarrão, como mostra a Figura 6.38. O matemático suíço Leonhard Euler formulou a teoria da flambagem em meados do século XVIII. Ele mostrou que existe uma carga crítica a partir da qual barras finas ao serem comprimidas se tornam instáveis e que, a partir desse ponto, uma pequena força perpendicular faz com que a curvatura aumente sem limite, levando à ruptura da barra. Não é possível analisar o modelo de flambagem sem recorrer às ferramentas matemáticas do cálculo, mas podemos usar os resultados de Euler para escrever uma fórmula que se aplica a alguns tipos de vigas.

Figura 6.38 Flambagem de uma viga longa e estreita.

A carga crítica de flambagem para uma viga depende não apenas da área da seção reta e do módulo de Young, como era de esperar, mas também do perfil da viga. As propriedades importantes do perfil podem ser expressas por uma grandeza conhecida como *momento de inércia de área*, representada pela letra *I*. Não vamos entrar nos detalhes do cálculo do momento de inércia de área, mas a ideia básica é apresentada a seguir. Suponhamos dividir a seção reta da viga em pequenos quadrados de área ΔA, como na Figura 6.39. Se multiplicarmos a área de cada quadrado pelo quadrado da distância entre o quadrado e um eixo de referência, o momento de inércia de área em relação a esse eixo será a soma de todos esses produtos.

Como cada termo do somatório é uma área multiplicada pelo quadrado de uma distância, a unidade do momento de inércia de área é o comprimento elevado à quarta potência. O momento de inércia de área pode ser calculado para qualquer perfil e em relação a qualquer eixo. Para nossos propósitos, vamos considerar apenas duas formas, um quadrado e um círculo, e um eixo de referência passando pelo centro da viga. Nesses dois casos, os momentos de inércia de área são dados pelas seguintes expressões:

Momento de inércia de um círculo de raio r em relação a um

$$\text{diâmetro:} \quad I = \frac{\pi r^4}{4} \tag{6.6}$$

Momento de inércia de um quadrado de lado d em relação a

$$\text{um eixo central:} \quad I = \frac{d^4}{12} \tag{6.7}$$

Um aspecto interessante da fórmula do momento de inércia de área é que as partes da viga que estão mais afastadas do eixo têm uma influência maior sobre o valor total que as partes que estão mais próximas do eixo. Suponhamos, por exemplo, que um dos pequenos quadrados ΔA está a 1 unidade de distância do eixo, enquanto outro dos pequenos quadrados está a 2 unidades de distância. Nesse caso, a contribuição para I do primeiro quadrado é $\Delta A(1)^2$, enquanto a contribuição do segundo é $\Delta A(2)^2$, um valor 4 vezes maior. Vamos voltar a esta questão nos problemas do final do capítulo, quando considerarmos vigas com diferentes perfis.

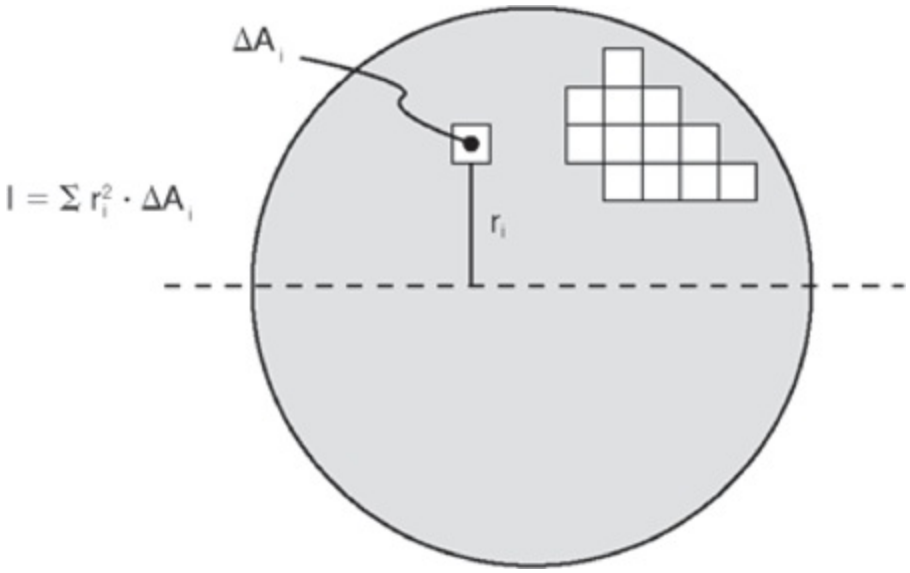


Figura 6.39 Cálculo do momento de inércia de área.

A fórmula de Euler para a carga crítica de flambagem para uma viga de comprimento L, momento de inércia de área I e módulo de Young E é a seguinte:

$$\text{Carga crítica de flambagem: } F_{\text{flam}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad (6.8)$$

Exemplo 6.3 Flambagem de uma Viga

Uma viga de alumínio tem 10 m de comprimento, e a seção reta é um quadrado com 2 cm de lado. Qual é a maior força de compressão que a viga é capaz de suportar?

Solução A viga pode falhar por flambagem ou porque a tensão de ruptura, σ_u, foi excedida. Vamos calcular as forças necessárias para provocar os dois tipos de falha e verificar qual é menor. De acordo com a Tabela 6.1, para o alumínio,

$$\sigma_u = 110 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$
$$E = 70 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

A força necessária para produzir a tensão de ruptura é

$$\begin{aligned} F_u &= A\sigma_u \\ &= (0{,}0004 \text{ m}^2)(110 \times 10^6 \text{ N/m}^2) \\ &= 44.000 \text{ N} \end{aligned}$$

O momento de inércia de área da viga é

$$\begin{aligned} I &= \frac{d^4}{12} \\ &= \frac{(0{,}02)^4}{12} \\ &= 1{,}6 \times 10^{-7}\ \mathrm{m}^4 \end{aligned}$$

A carga crítica de flambagem é

$$\begin{aligned} F_{\text{flam}} &= \frac{\pi^2 EI}{L^2} \\ &= \frac{(3{,}14)^2 (70 \times 10^9)(1{,}6 \times 10^{-7})}{(10)^2} \\ &= 1104\ \mathrm{N} \end{aligned}$$

Como a carga crítica de flambagem é muito menor que a tensão de ruptura, a força máxima de compressão que a viga suporta é de 1104 N.

6.4 O MODELO COMPLETO

Depois de discutir separadamente os pontos de vista do equilíbrio estático e dos materiais, vamos agora considerar um exemplo no qual criamos um modelo completo de uma treliça e adotamos simultaneamente os dois pontos de vista. Consideremos a treliça da Figura 6.40, feita de barras de alumínio com uma seção reta quadrada de 2 cm de lado. A principal preocupação é saber se esta treliça pode sustentar um peso de 1000 N; caso a resposta seja afirmativa, estamos interessados em conhecer as forças internas e de reação, as dilatações das barras e o deslocamento do nó superior.

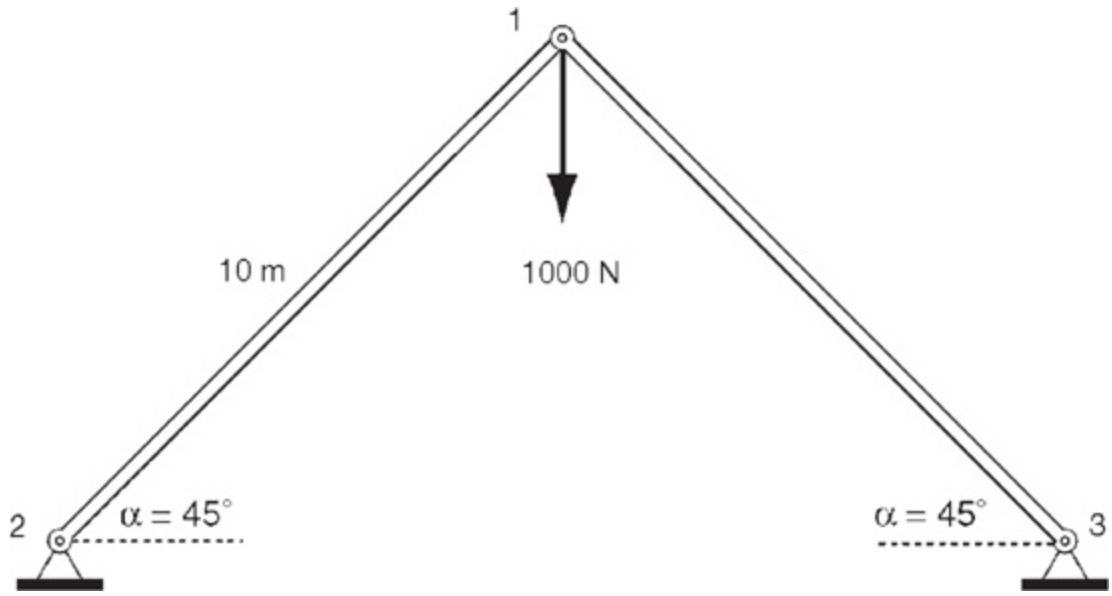


Figura 6.40 Uma treliça estaticamente determinada de duas barras.

6.4.1 Ponto de Vista do Equilíbrio Estático

Como vimos anteriormente, o modelo de uma treliça do ponto de vista do equilíbrio estático expressa a condição de que a soma das forças aplicadas a cada nó deve ser nula. A Figura 6.41 mostra as forças que agem sobre os nós. No caso desta treliça, existem seis forças desconhecidas: duas forças internas das barras e quatro forças de reação.

Vamos separar as forças nas componentes *x* e *y* e igualar a zero as componentes *x* e *y* da força resultante aplicada a cada nó. Isso nos dá um total de seis equações:

$$\sum F_x = 0 \text{ no nó } 1: \quad -N_{12}\cos(\alpha) + N_{13}\cos(\alpha) = 0 \tag{6.9a}$$

$$\sum F_y = 0 \text{ no nó } 1: \; -N_{12}\,\text{sen}(\alpha) + -N_{13}\,\text{sen}(\alpha) - F = 0 \tag{6.9b}$$

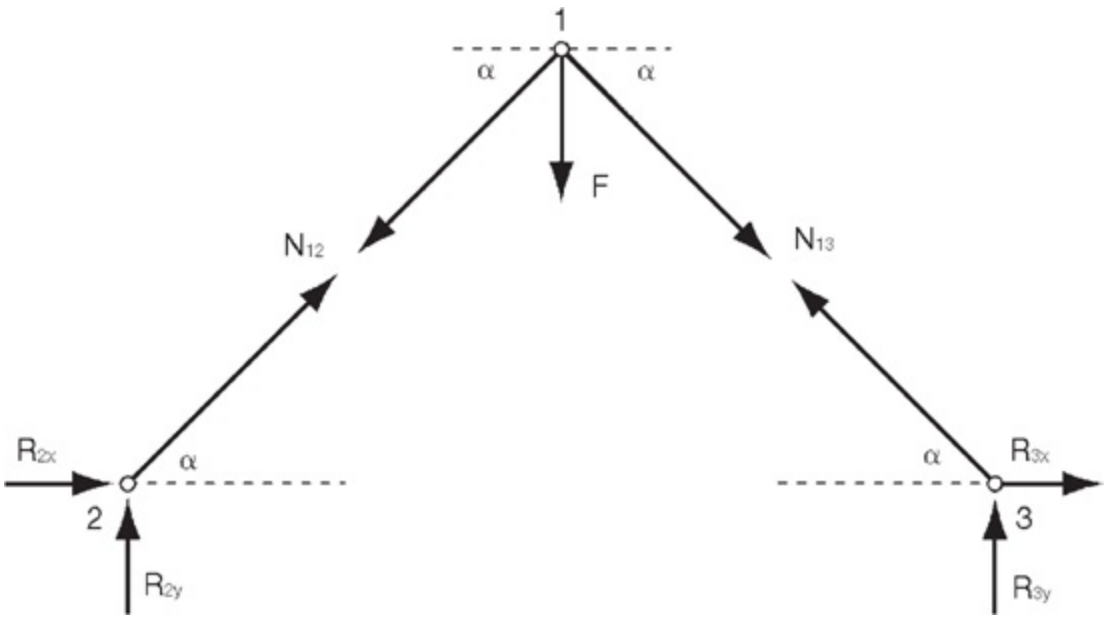


Figura 6.41 Forças internas e de reação da treliça da Figura 6.40.

$$\sum F_x = 0 \text{ no nó 2:} \quad N_{12}\cos(\alpha) + R_{2x} = 0 \qquad (6.9c)$$

$$\sum F_y = 0 \text{ no nó 2:} \quad N_{12}\,\text{sen}(\alpha) + R_{2y} = 0 \qquad (6.9d)$$

$$\sum F_x = 0 \text{ no nó 3:} \quad -N_{13}\cos(\alpha) + R_{3x} = 0 \qquad (6.9e)$$

$$\sum F_x = 0 \text{ no nó 3:} \quad N_{13}\,\text{sen}(\alpha) + R_{3y} = 0 \qquad (6.9f)$$

Como existem seis equações e seis incógnitas, podemos calcular sem dificuldade os valores de todas as forças. A equação de equilíbrio da componente *x* da força aplicada ao nó 1, Equação (6.9a), nos dá

$$N_{13} = N_{12} \qquad (6.10)$$

Substituindo este resultado na equação de equilíbrio da componente *y* da força aplicada ao nó 1, Equação (6.9b), e explicitando N_{12}, obtemos:

$$\begin{aligned} N_{12} = N_{13} &= -\frac{F}{2\,\text{sen}\,\alpha} \\ &= -\frac{1000}{2\,\text{sen}\,45^\circ} \\ &= -707\ \text{N (compressão)} \end{aligned} \qquad (6.11)$$

Substituindo este resultado nas equações restantes (6.9c) a (6.9f), obtemos os valores das forças de reação:

$$R_{2x} = R_{2y} = R_{3y} = 500\,\text{N}$$
$$R_{3x} = -500\,\text{N} \qquad (6.12)$$

6.4.2 Ponto de Vista dos Materiais

Do ponto de vista dos materiais, os efeitos das forças sobre as barras são examinados levando-se em conta a dilatação, as dimensões e o módulo de Young de cada barra. Como as forças internas das barras já são conhecidas, vamos primeiro verificar se as forças são suficientes para induzir flambagem. O momento de inércia de área é o mesmo para as duas barras:

$$\begin{aligned} I &= \frac{d^4}{12} \\ &= \frac{(0{,}02)^4}{12} \\ &= 1{,}6 \times 10^{-7}\,\text{m}^4 \end{aligned}$$

A carga crítica de flambagem é dada por

$$\begin{aligned} F_{\text{flam}} &= \frac{\pi^2 EI}{L^2} \\ &= \frac{(3{,}14)^2(70 \times 10^9)(1{,}6 \times 10^{-7})}{(10)^2} \\ &= 1104\,\text{N} \end{aligned}$$

Como a força interna de 707 N é menor que a carga crítica de flambagem, a treliça não falha por flambagem ao ser submetida a uma carga de 1000 N. Como a tensão de ruptura é muito maior que a carga crítica de flambagem, a treliça também não falha por ruptura direta.

Agora que sabemos que a treliça não falha, vamos calcular as dilatações. As equações a seguir resultam da aplicação da Lei de Hooke às duas barras:

$$\text{Força na barra 12:} \quad N_{12} = \frac{EA_{12}}{L} \cdot \Delta L_{12} \qquad (6.13a)$$

$$\text{Força na barra 13:} \quad N_{13} = \frac{EA_{13}}{L} \cdot \Delta L_{13} \qquad (6.13b)$$

Como as duas barras são iguais e estão submetidas às mesmas forças internas, as dilatações também são iguais:

$$\Delta L_{12} = \Delta L_{12} = \frac{N_{12}L}{EA_{12}}$$
$$= \frac{(-707\,\text{N})(10\,\text{m})}{(70 \times 10^9\,\text{N/m}^2)(0{,}0004\,\text{m}^2)} \qquad (6.14)$$
$$= -0{,}25\,\text{mm}$$

6.4.3 Treliças Estaticamente Determinadas e Indeterminadas

Curiosamente, em todas as treliças que analisamos até agora, o número de equações era igual ao número de incógnitas, de modo que podíamos resolver o sistema de equações e a resposta era única. Entretanto, isso não acontece em *todas* as treliças.

Os exemplos anteriores levaram a números iguais de equações e incógnitas porque os elementos das treliças estavam dispostos de uma forma especial que tornava a treliça *estaticamente determinada*. Em uma estrutura estaticamente determinada, é possível calcular as forças internas simplesmente resolvendo as equações de equilíbrio para cada nó. Se uma estrutura é estaticamente determinada, o número de incógnitas é igual ao número de equações de equilíbrio. Caso isso não seja verdade, dizemos que a estrutura é *estaticamente indeterminada*. Em uma estrutura estaticamente indeterminada, o número de incógnitas é *diferente* do número de equações, e para calcular as forças precisamos encarar a treliça, não só do ponto de vista do equilíbrio estático, mas também dos pontos de vista geométrico e dos materiais. No restante desta seção, vamos discutir qual é o arranjo especial de elementos de uma estrutura estaticamente determinada.

Para compreender o que torna uma treliça estaticamente determinada, observe o uso de triângulos e suportes no projeto. A Figura 6.42 mostra uma treliça básica triangular de três barras. A

treliça está sustentada de tal forma que a posição da treliça como um todo é fixa, mas cada elemento tem liberdade para se dilatar ou se contrair quando uma carga é aplicada. Para isso, usamos um suporte fixo no nó 1 e um suporte rolante no nó 2. Esta estrutura básica tem três nós, três forças internas desconhecidas (uma para cada barra) e três reações desconhecidas (duas no nó 1 e uma no nó 2). Cada nó contribui com duas equações de equilíbrio, uma para a soma das componentes x das forças aplicadas ao nó e outra para a soma das componentes y. Assim, temos um total de seis equações e seis incógnitas e podemos determinar os valores das forças usando apenas as equações de equilíbrio. Note que se eliminarmos a barra horizontal da treliça e acrescentarmos uma restrição ao suporte do nó 2, como na Figura 6.43, ainda teremos seis equações e seis incógnitas.

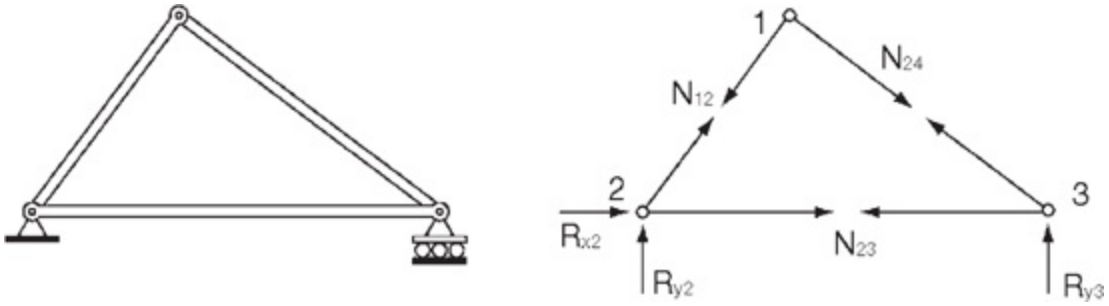


Figura 6.42 A analise estática de um triângulo único com um suporte fixo e um suporte rolante leva a um sistema de 6 equações com6 incógnitas.

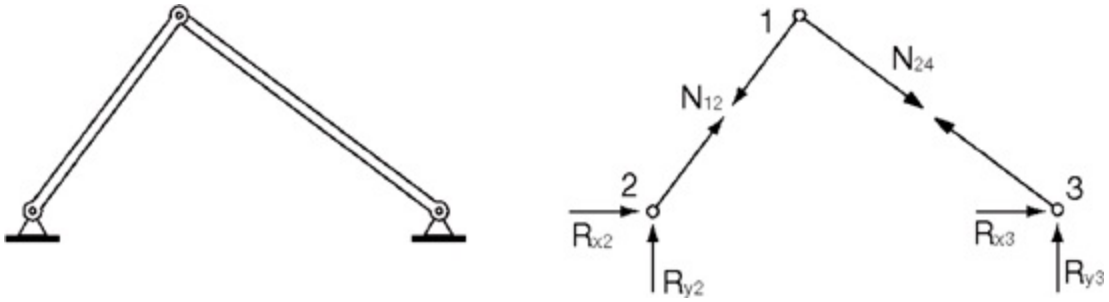


Figura 6.43 Removendo uma das barras de uma treliça triangular e acrescentando uma força de reação, mantemos seis equações e seis incógnitas na análise do equilíbrio estático.

Vamos agora acrescentar um segundo triângulo introduzindo duas

barras e um nó na estrutura, como na Figura 6.44. A nova treliça tem 4 nós, o que nos dá 8 equações, 3 forças de reação desconhecidas e 5 forças internas desconhecidas, ou seja, um sistema de 8 equações com 8 incógnitas. Se continuarmos a aumentar a estrutura acrescentando triângulos dessa forma, cada vez que acrescentarmos um nó e duas barras para ligar esse nó a uma treliça já existente, estaremos introduzindo mais duas forças internas desconhecidas e mais duas equações, mantendo o número de equações igual ao número de incógnitas. Assim, todas as treliças com os elementos dispostos em forma de triângulo e com um apoio fixo e outro rolante são estaticamente determinadas.

Vejamos agora o que acontece quando ligamos uma barra cruzada a dois nós já existentes, como na Figura 6.45. A estrutura ainda possui 4 nós que dão origem a 8 equações, além de 3 forças de reação desconhecidas, mas agora, em vez de 5, passa a ter 6 forças internas desconhecidas, o que leva a um sistema de 8 equações com 9 incógnitas. Em consequência, não podemos calcular univocamente as forças internas desta treliça usando apenas as equações de equilíbrio estático. Para determinar as forças, precisamos considerar as deformações sofridas pela estrutura ao ser submetida a uma carga, o que envolve encarar a treliça, não só do ponto de vista do equilíbrio estático, mas também dos pontos de vista geométrico e dos materiais. Não vamos nos aprofundar nesse tipo de estudo, mas é um tópico importante nos cursos de análise de estruturas.

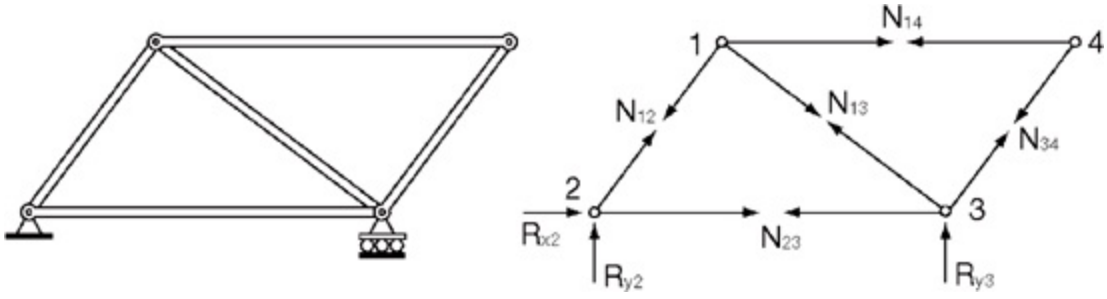


Figura 6.44 Acrescentando um nó e duas barras à treliça da Figura 6.42, ficamos com 8 equações e 8 incógnitas.

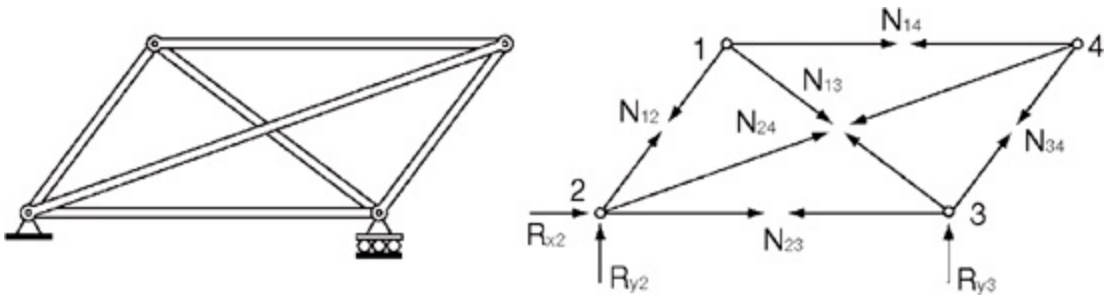


Figura 6.45 Acrescentando uma barra sem acrescentar novos nós, ficamos com mais uma incógnita e com o mesmo número de equações, ou seja, com 8 equações e 9 incógnitas.

6.5 EXEMPLO: ESTUDO DE ENGENHARIA DE RESISTÊNCIA *VERSUS* PESO EM UMA TRELIÇA

Uma das principais vantagens das treliças em relação a outros tipos de estruturas é que são ao mesmo tempo leves e resistentes. Neste exemplo, examinamos o problema de projetar a treliça mais leve possível, capaz de sustentar uma carga conhecida, sem falhar. Para resolver o problema, usaremos a abordagem de estudos de engenharia que definimos no Capítulo 5 e usamos na Seção 5.5 para resolver o problema de lançamento de uma bola de softball com uma atiradeira. Como vamos ver, mesmo no caso de uma treliça muito simples, várias relações presentes no sistema tornam o problema um desafio interessante.

6.5.1 Definição do Problema e Plano de Ataque

Os concursos de construção de pontes usando palitos de sorvete se revelaram uma forma excelente de introduzir os alunos de segundo grau aos métodos de solução de problemas de engenharia. Um dos objetivos deste exemplo é aproveitar a experiência que muitas pessoas têm em construir estruturas com palitos para ensinar um pouco de análise estrutural elementar.

A Figura 6.46 mostra uma visão geral do projeto. O objetivo é

projetar uma treliça de duas barras, feita de varas de madeira, capaz de cobrir uma distância de 24 polegadas e de sustentar um peso de pelo menos 10 libras. As varas devem ter o mesmo comprimento e ser feitas de *basswood* (uma madeira de lei, fácil de encontrar em lojas de modelismo), com uma seção reta quadrada, de dimensões padronizadas em incrementos de 1/32 de polegada. Um objetivo adicional é minimizar o peso da treliça.

As três primeiras etapas do processo de solução são as seguintes:

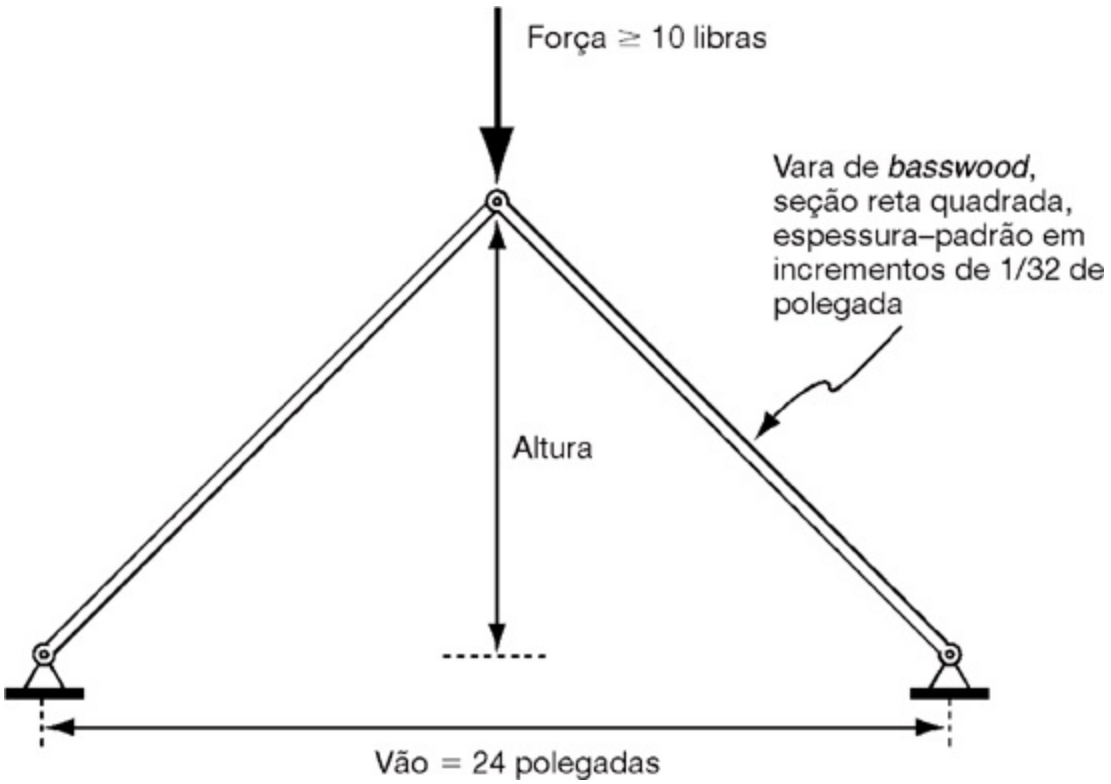


Figura 6.46 Projeto de uma treliça de dois elementos.

Definir O primeiro passo para resolver o problema é defini-lo em termos de variáveis e determinar quais são os valores conhecidos e quais são as incógnitas. A Tabela 6.2 mostra as variáveis principais do problema. Existem três variáveis de projeto: a altura h da treliça, a espessura t das varas e o material das varas. A altura da treliça e a espessura das varas são desconhecidas, mas sabemos que o material das varas é *basswood*. Note que a escolha do material é uma variável

múltipla, que envolve várias propriedades. A tabela mostra também três propriedades do material (*basswood*) que são relevantes para a solução do problema: o módulo de Young E, a tensão de ruptura para compressão σ_r e a massa específica ρ. Existem duas variáveis ambientais, ambas conhecidas. A primeira é o vão da treliça, 24 polegadas; a segunda é a carga mínima que a treliça deve ser capaz de sustentar, 10 libras. Finalmente, existem duas variáveis ambientais que descrevem o desempenho da treliça escolhida, ambas desconhecidas. A primeira é o peso W da treliça; a segunda é a carga máxima que a treliça é capaz de suportar, F_{falha}.

TABELA 6.2 Variáveis do projeto

Categoria	Nome	Descrição	Conhecida/Desconhecida
Projeto:	h	Altura da treliça	Desconhecida
Projeto:	t	Espessura das barras	Desconhecida
Projeto:	Material	Tipo de madeira	Conhecida, *basswood* $E = 1{,}46 \times 10^6$ psi $\sigma_u = 4730$ psi $\rho = 13{,}37 \times 10^{-3}$ lbs/in^3
Ambiental:	s	Vão da treliça	Conhecida, 12 polegadas
Ambiental:	$F_{mín}$	Força mínima (peso) que a treliça deve sustentar	Conhecida, 10 libras
Comportamental:	W	Peso da treliça	Desconhecida
Comportamental:	$F_{máx}$	Peso máximo que a treliça é capaz de suportar	Desconhecida

A Figura 6.47 mostra as variáveis usadas para descrever as dimensões da treliça. Observe que precisamos apenas de uma das três

variáveis – altura *h*, comprimento das barras *L* e ângulo das barras α – para descrever a geometria da estrutura, mas usaremos, em cada caso, a variável que for mais conveniente.

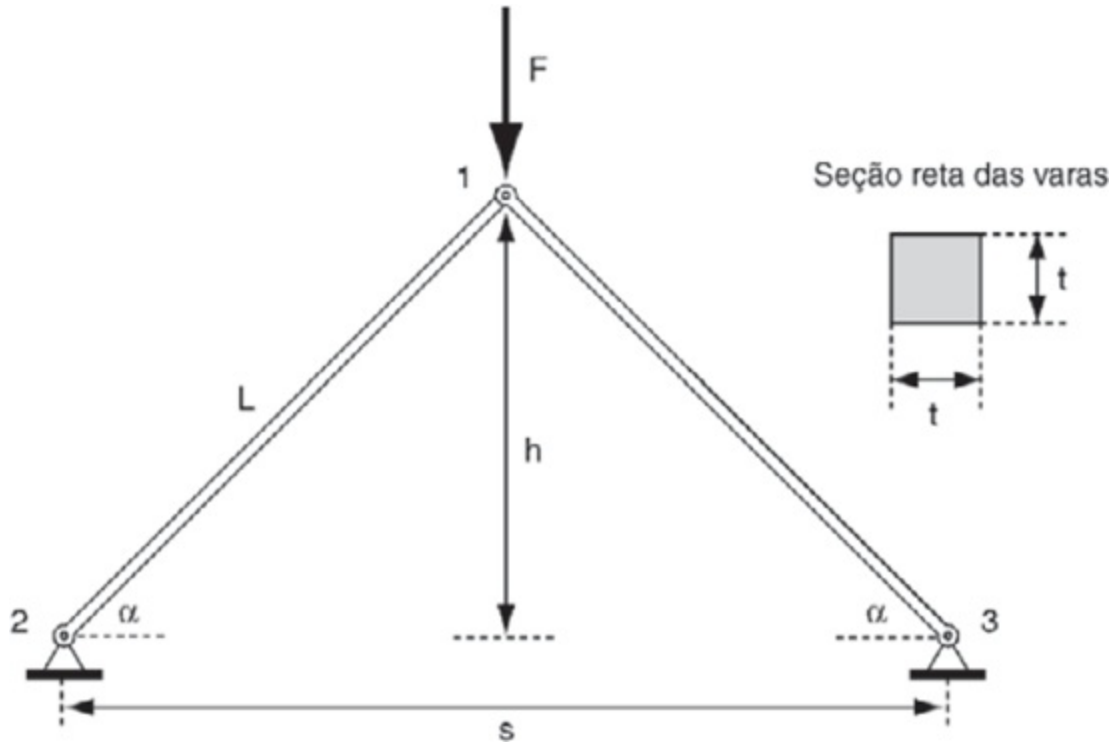


Figura 6.47 Variáveis associadas às dimensões da treliça.

Explorar Antes de definir um plano para resolver o problema, vamos examinar o problema com mais profundidade.

O Problema Faz Sentido? O enunciado do problema nos pede para projetar uma treliça de dois elementos que satisfaça duas condições: (1) seja capaz de sustentar uma carga de pelo menos 10 libras; (2) o peso seja o menor possível. Uma treliça pode falhar, por duas razões: porque a força interna em uma barra excede a tensão de ruptura ou porque a força a que é submetida uma barra excede a carga crítica de flambagem. Assim, devemos projetar a treliça de tal forma que nenhum dos dois mecanismos de falha aconteça com uma carga aplicada de 10 libras.

Como apenas duas variáveis de projeto são desconhecidas – a

altura da treliça e a espessura das varas –, a solução do problema será necessariamente um par de valores. Para compreender melhor o problema, vamos examinar de que forma cada uma dessas variáveis contribui para a solução e se existe uma relação entre elas.

O problema tem uma certa semelhança com o problema da atiradeira do Capítulo 5, no qual também estávamos buscando uma combinação de valores de duas variáveis para que duas condições fossem satisfeitas. Lembremo-nos de que, no problema da atiradeira, queríamos encontrar a combinação de ajustes horizontal e vertical que satisfizesse as condições de (1) atingir um alvo; (2) minimizar a energia do lançamento. Para resolver o problema da atiradeira, consideramos primeiro uma versão simplificada do problema com apenas uma variável de projeto. Suponhamos que fizéssemos a mesma coisa neste caso e fixássemos a altura da treliça ou a espessura das varas. Supondo conhecida a altura da treliça, o papel da espessura das barras se torna óbvio. Quanto mais espessas as barras, mais resistentes, tanto em termos da tensão de ruptura como da carga crítica de flambagem, mas também mais pesadas.

O papel da altura da treliça, ou, o que dá na mesma, do comprimento das barras, é menos óbvio. Se aumentarmos o comprimento das barras, a treliça ficará mais pesada. Além disso, a tendência à flambagem será maior; basta pensar na diferença entre comprimir um pedaço pequeno de macarrão e comprimir um pedaço comprido. Os dois fatores parecem apontar na direção de usar barras curtas. O que pode não ser tão óbvio é que, quanto mais curtas as barras, maior o ângulo entre elas e maior a força interna das barras. Na verdade, a força interna pode se tornar *muito maior* que a força aplicada, e tende a *infinito* quando as barras se aproximam da horizontal! Isso se tornará mais claro quando realizarmos uma análise estática da treliça. Assim, se as barras forem muito curtas, as forças internas se tornarão tão grandes que as barras não poderão suportar uma carga relativamente pequena. Portanto, deve haver um valor

intermediário para o comprimento das barras que represente uma solução de compromisso entre resistência e peso. A Figura 6.48 mostra dois casos extremos.

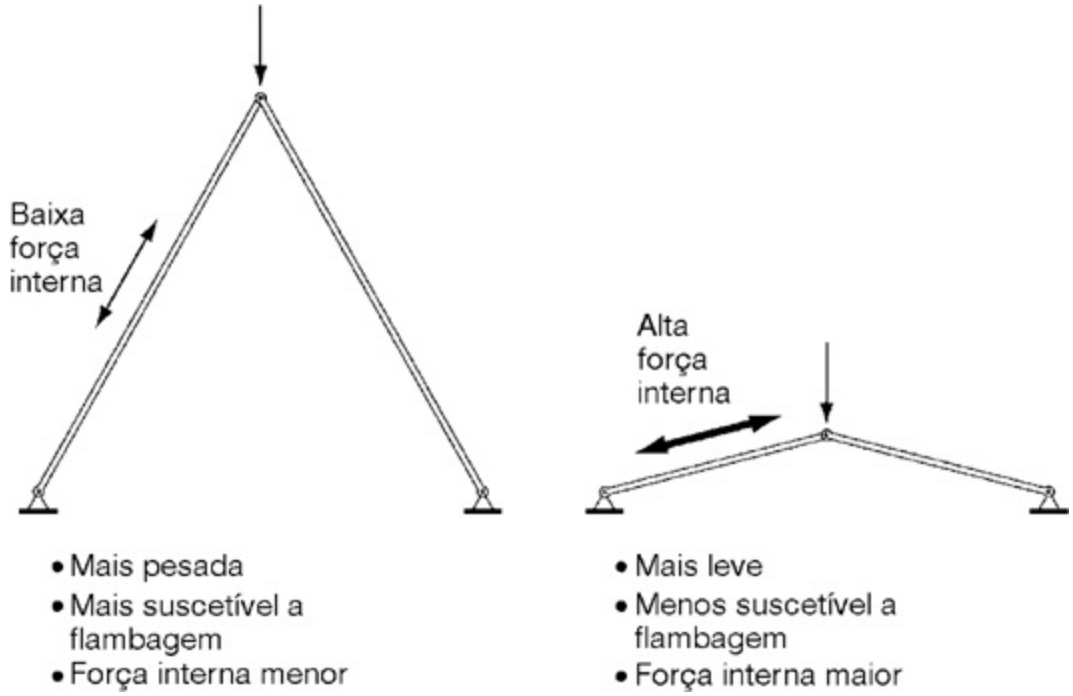


Figura 6.48 Compromisso entre o comprimento das barras e a resistência da treliça.

Suposições Como de costume, vamos supor que os nós da treliça são pinos articulados ideais. Além disso, vamos supor inicialmente que a causa da falha será a flambagem e não a ruptura direta, já que, no caso de barras finas, a carga crítica de flambagem é em geral muito menor que a tensão de ruptura. Entretanto, vamos confirmar este fato antes de terminar o projeto.

Quais São os Conceitos Importantes e as Abordagens Possíveis? Este problema envolve dois grupos principais de conceitos. O primeiro é a modelagem das relações entre os componentes de uma estrutura leve dos pontos de vista do equilíbrio estático, dos materiais e da geometria, que é o objetivo principal deste capítulo. O segundo é a busca de soluções de compromisso nos projetos de engenharia, que foi

o tema do Capítulo 5.

Que Nível de Entendimento Está Sendo Testado? Uma treliça de duas barras pode parecer uma estrutura muito simples, mas o problema proposto é relativamente difícil, por várias razões. Os exemplos anteriores de treliças que examinamos neste capítulo envolviam a aplicação de um princípio, como a flambagem, ou a análise de um projeto conhecido. Este exemplo, porém, requer a *avaliação* de vários projetos possíveis para escolher o melhor. Um segundo fator que torna este problema complexo tem a ver com as relações entre os componentes na análise da treliça. Quando executamos o estudo de engenharia de um sistema de lançamento no Capítulo 5, o modelo da distância atingida era um modelo empírico simples, e o modelo da energia era simplesmente a distância de recuo da tira de borracha. Desta vez, precisamos construir um modelo que leve em conta, além dos vários pontos de vista, as várias partes da treliça, mesmo que sejam apenas duas. Embora as equações a que vamos chegar não sejam muito complicadas quando examinadas isoladamente, temos que manipular muitas ideias ao mesmo tempo para resolver o problema.

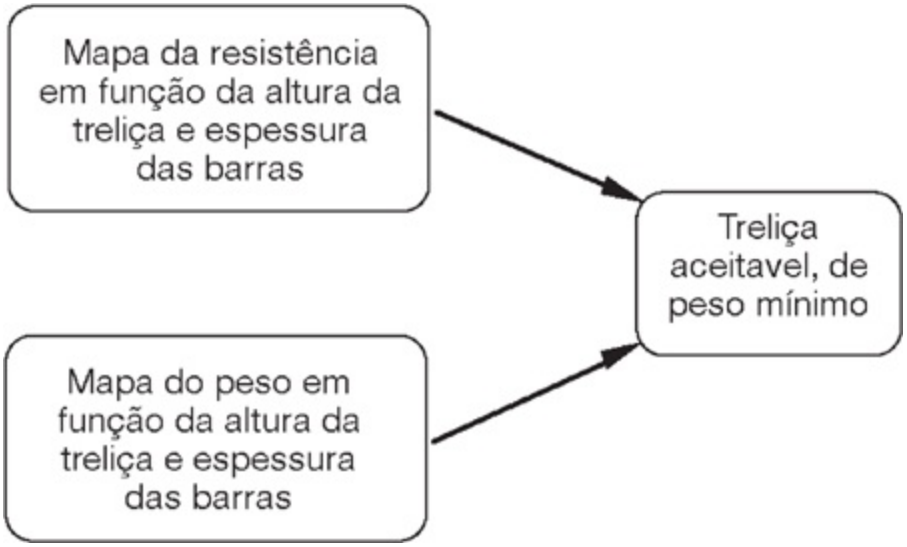


Figura 6.49 Versão 1 do plano.

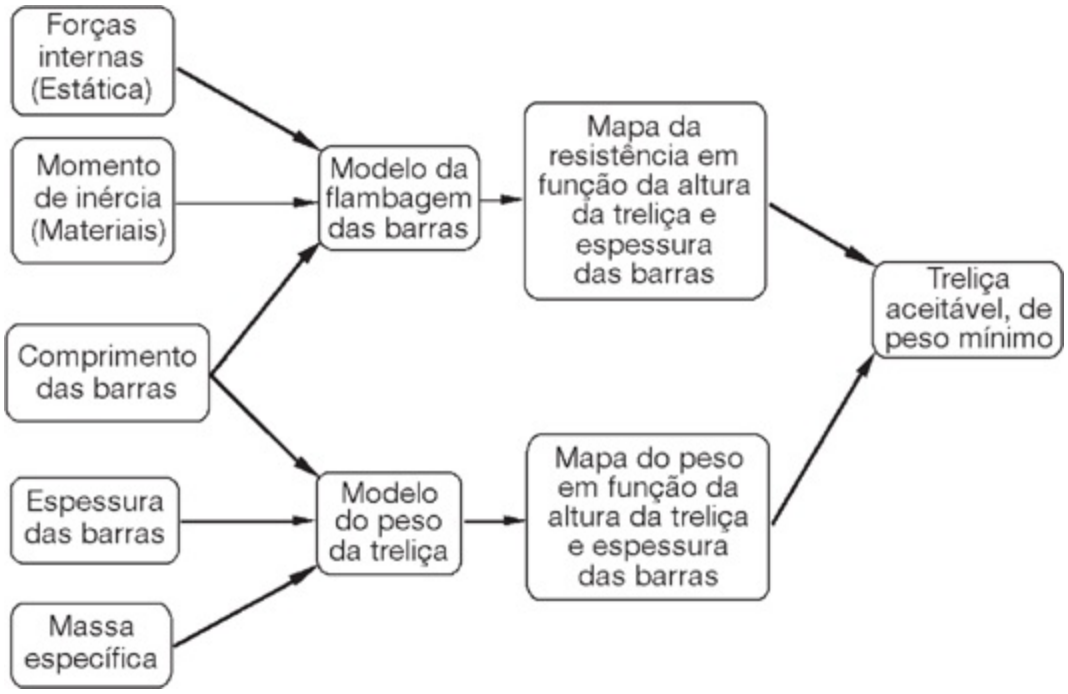


Figura 6.50 Versão 2 do plano.

Planejar Como precisamos trabalhar simultaneamente com vários conceitos para resolver este problema, vamos tomar um cuidado especial para ter um plano bem definido antes de começarmos a escrever e resolver equações. Na formulação desse plano, vamos começar pelo objetivo e trabalhar no sentido inverso até chegarmos aos parâmetros iniciais. Vamos fazer isso com três versões do plano, acrescentando mais detalhes a cada nova versão. A Figura 6.49 mostra a primeira versão do plano. O objetivo principal é encontrar uma configuração aceitável da treliça (ou seja, capaz de suportar pelo menos 10 libras) que minimize o peso. Para descobrir essa configuração, vamos precisar de mapas das duas variáveis comportamentais, carga máxima e peso da treliça, em função das duas variáveis de projeto: altura da treliça e espessura das barras.

A versão seguinte do plano, mostrada na Figura 6.50, diz respeito à criação do modelo necessário para construir os mapas.

- O peso da treliça depende das dimensões das barras e da massa específica da madeira.

- Supondo que o mecanismo de falha da treliça é a flambagem, a carga crítica de flambagem da treliça depende da força interna, comprimento e momento de inércia das barras.

Na terceira versão do plano, mostrada na Figura 6.51, detalhamos o cálculo da força interna e do momento de inércia das barras.

- A força interna pode ser calculada por meio de uma análise estática da treliça. Essa análise deve levar em conta a força aplicada e o ângulo entre as barras, que, por sua vez, depende do vão livre e da altura da treliça.
- O momento de inércia depende da espessura e do módulo de Young das barras.

A Figura 6.51 mostra também quais são os parâmetros conhecidos, quais são os parâmetros desconhecidos e quais são os parâmetros que serão varridos na construção dos mapas.

Uma vez conhecidas as etapas para resolver o problema de projetar a treliça da Figura 6.51, tudo que resta para definir um plano é escolher uma ordem para implementá-las. Vamos começar pela “parte fácil” de criar e plotar o modelo do peso, passar para o modelo da carga e, finalmente, superpor os dois mapas, como fizemos no caso da atiradeira, para escolher o melhor projeto.

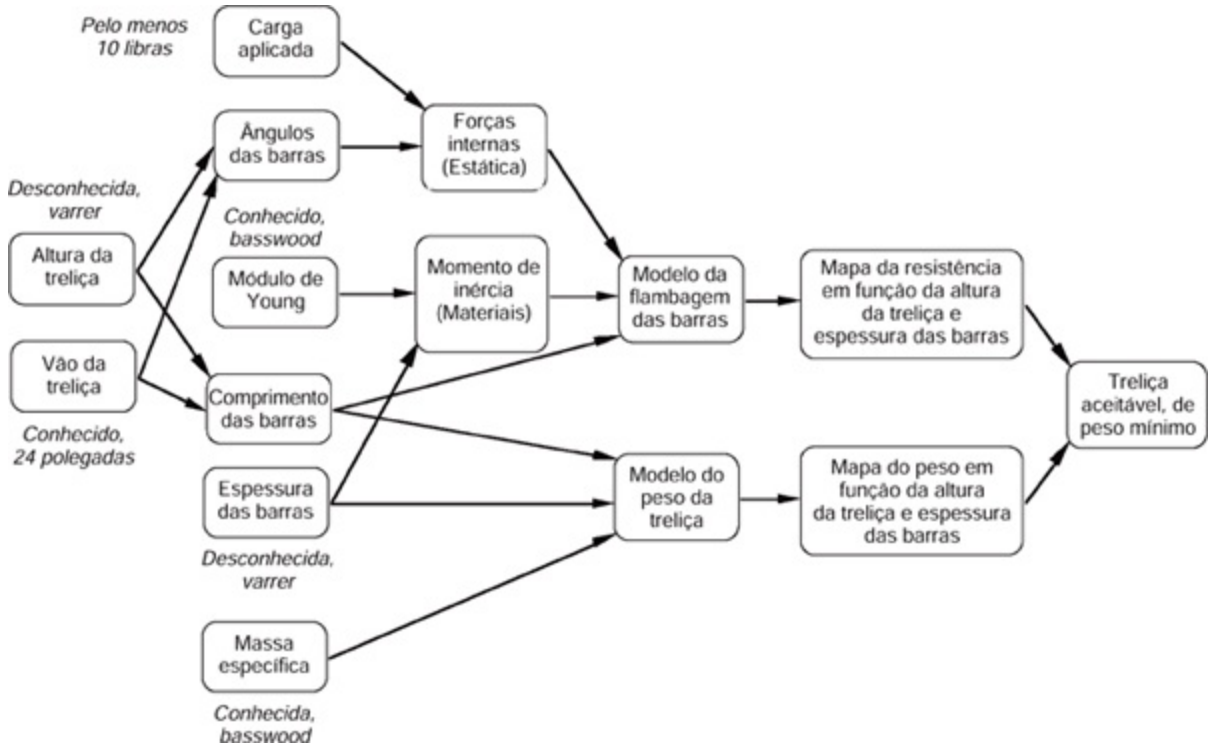


Figura 6.51 Versão 3 do plano.

6.5.2 Implementação do Plano

Modelo do Peso da Treliça A primeira parte do plano consiste em criar um modelo para o peso da treliça e plotar o peso em função das variáveis de projeto: a altura h da treliça e a espessura t das barras. O peso é igual ao produto do volume das duas barras pela massa específica da madeira:

$$\begin{aligned} W &= 2 \times \text{volume da barra} \times \text{massa específica de } \textit{basswood} \\ &= 2(t^2 L)\rho \\ &= 2(t^2\sqrt{h^2 + (s/2)^2})\rho \\ &= 2(t^2\sqrt{h^2 + (12)^2})(13{,}37 \times 10^{-3}) \text{ lbs} \end{aligned} \tag{6.15}$$

Uma vez determinada esta expressão do peso em função de h e t, podemos desenhar um mapa do peso fazendo uma varredura desses dois parâmetros. A Figura 6.52 mostra os mapas resultantes, nos quais fizemos h variar de 1 polegada até 12 polegadas, e t variar de 1/8 de polegada até 1/4 de polegada em incrementos de 1/32 de polegada.

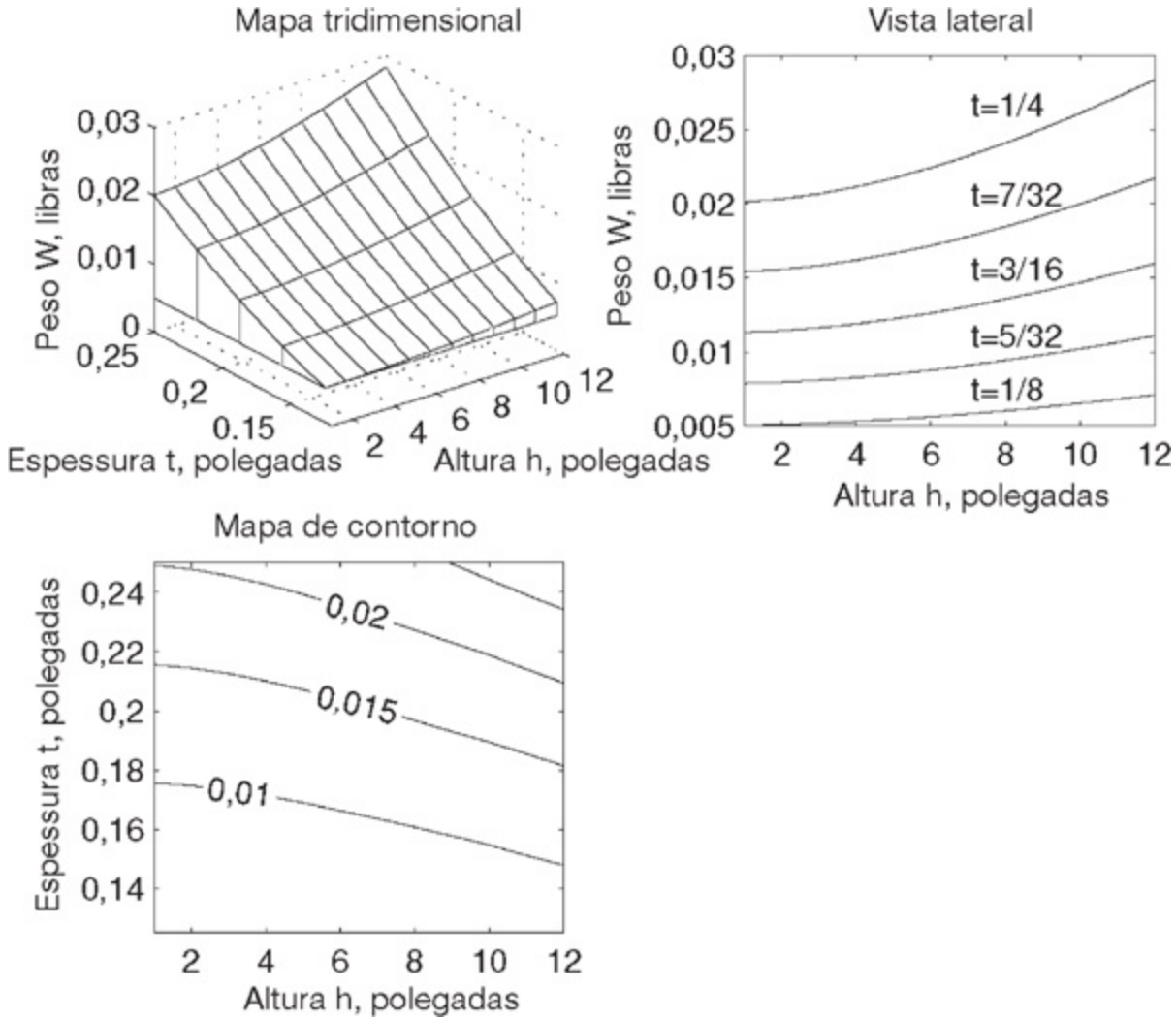


Figura 6.52 Peso W da treliça em função da altura da treliça e da espessura das barras. O gráfico no alto, à esquerda, é um mapa tridimensional, com h no eixo x, t no eixo y, e W no eixo z. O gráfico no alto, à direita, é uma vista lateral do plano yz, com as curvas de t constante variando de 1/8 de polegada a 1/4 de polegada em incrementos de 1/32 de polegada. O gráfico de baixo é um mapa de contorno que mostra uma vista superior do plano xy, com curvas de nível de peso constante para diferentes combinações de h e t.

Modelo da Resistência da Treliça O modelo da resistência da treliça descreve a carga máxima que a treliça pode suportar antes de falhar por flambagem em função da altura h e da espessura t das barras. Para criar este modelo, temos que considerar a treliça a partir de dois pontos de vista: o ponto de vista do equilíbrio estático, para determinar as forças internas, e o ponto de vista dos materiais, para

determinar a carga crítica de flambagem.

Ponto de Vista do Equilíbrio Estático A treliça de dois elementos deste exemplo é estaticamente determinada. Em consequência, precisamos apenas de uma análise estática para calcular as forças. Além disso, como estamos interessados apenas nas forças internas das barras e não nas reações dos suportes, precisamos apenas resolver as equações de equilíbrio estático do nó suspenso, o nó 1. Somando separadamente as componentes x e y das forças aplicadas ao nó 1, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\sum F_x = 0 \text{ no nó } 1: \quad -N_{12}\cos(\alpha) + N_{13}\cos(\alpha) = 0 \quad (6.16a)$$

$$\sum F_y = 0 \text{ no nó } 1: \quad -N_{12}\,\text{sen}(\alpha) - N_{13}\,\text{sen}(\alpha) - F = 0 \quad (6.16b)$$

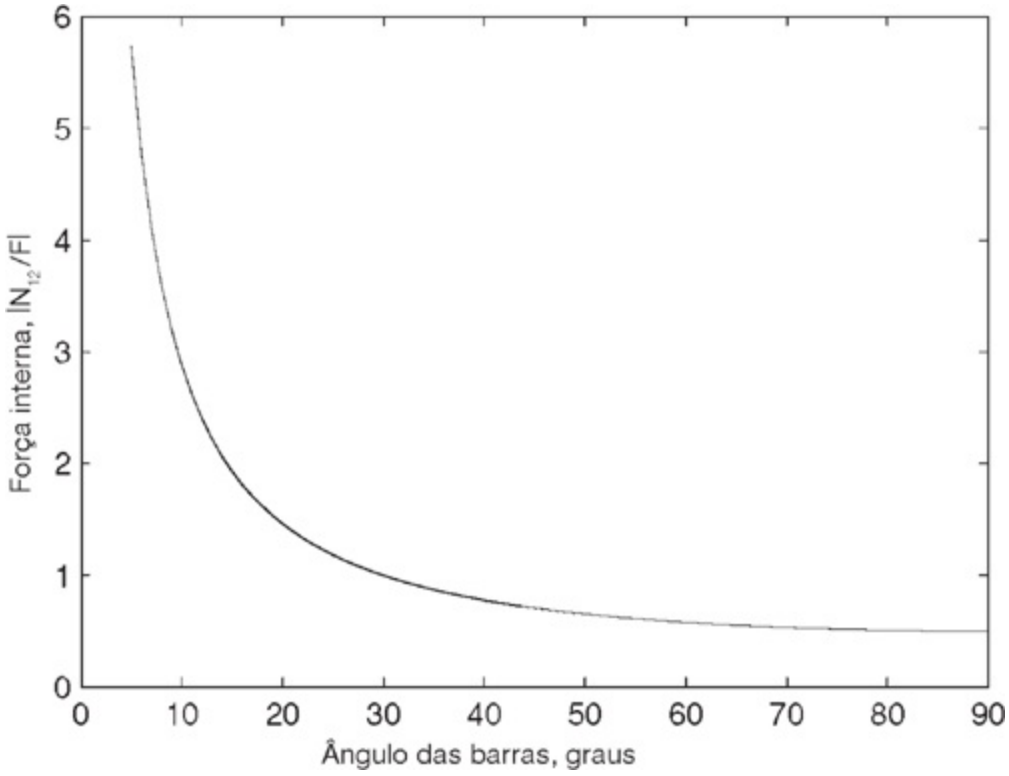


Figura 6.53 Força interna N_{12} em função do ângulo α entre as barras para a treliça da Figura 6.46. A força interna está expressa como uma fração da força aplicada F.

Resolvendo o sistema, obtemos

$$N_{12} = N_{13} = -\frac{F}{2\,\text{sen}\,\alpha} = -\frac{FL}{2h} \tag{6.17}$$

De acordo com a Equação (6.17), quando a altura h da treliça (e, consequentemente, o ângulo α) tende a zero, a força interna das barras tende a infinito. A Figura 6.53 mostra um gráfico da força interna em função de α. No caso de uma treliça muito alta, as barras se aproximam da vertical, e cada barra sustenta uma carga interna aproximadamente igual à metade da força aplicada F. Quando o ângulo diminui para 45°, a força interna em cada barra é ainda menor que a força aplicada. Em 30°, a força interna é igual à força aplicada. Para ângulos menores que 30°, a força aumenta rapidamente: em 10°, é quase três vezes maior que a força aplicada; em 5°, é quase seis vezes maior que a força aplicada. Assim, embora a redução do comprimento das barras diminua o peso da treliça, pode aumentar drasticamente as forças internas.

Ponto de Vista dos Materiais O ponto de vista dos materiais é usado para determinar a carga crítica de flambagem em função do comprimento, espessura e módulo de Young de uma barra. A equação geral para a carga crítica de flambagem é

$$N_{\text{flam}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{6.18}$$

onde, para uma barra de seção reta quadrada,

$$I = \frac{t^4}{12} \tag{6.19}$$

Assim, no caso de varas de *basswood,*

$$N_{\text{flam}} = \frac{\pi^2 E t^4}{12L^2} = \frac{\pi^2 (1{,}46 \times 10^6) t^4}{12L^2}\ \text{lbs} \tag{6.20}$$

A Figura 6.54 mostra um gráfico de N_{flam} em função do

comprimento das barras para vários valores de espessura. Observe que, neste cálculo, N_{flam} é uma força de compressão aplicada diretamente à barra, paralelamente a sua maior dimensão; *não é* a força F aplicada ao nó 1 da treliça. O gráfico mostra claramente que a carga crítica de flambagem diminui quando o comprimento da barra aumenta, e aumenta quando a espessura aumenta.

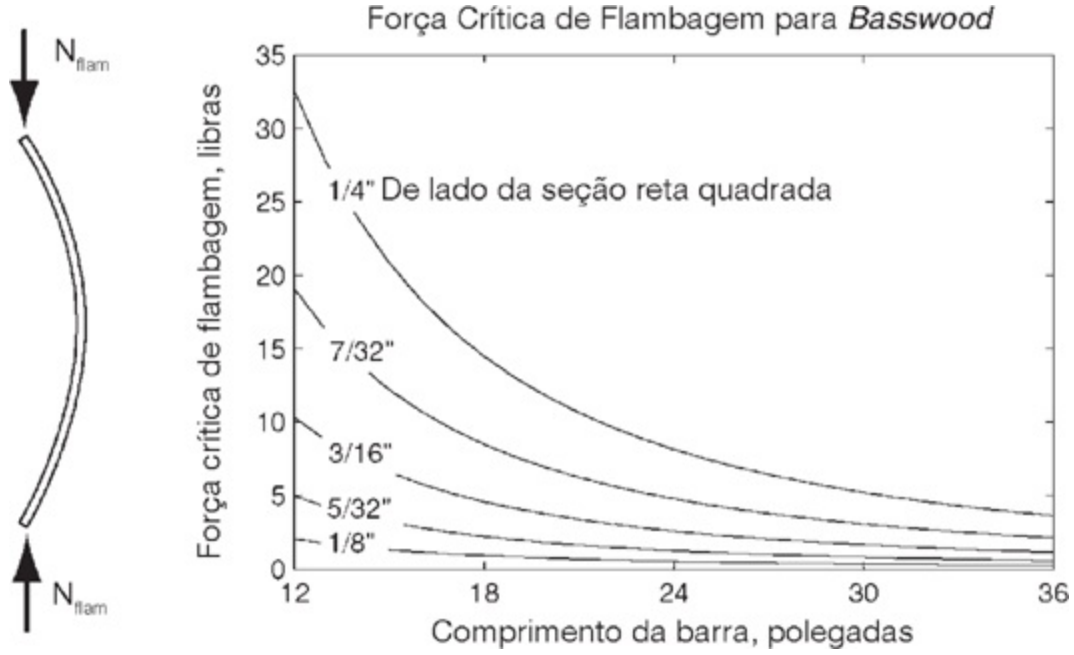


Figura 6.54 Carga crítica de flambagem N_{flam} para varas de *basswood* de seção reta quadrada em função do comprimento, para vários valores da espessura.

Combinação dos Pontos de Vista do Equilíbrio Estático e dos Materiais Uma vez determinada a fórmula da força interna das barras a partir do ponto de vista do equilíbrio estático, Equação (6.17), e determinada a fórmula da carga crítica de flambagem a partir do ponto de vista dos materiais, Equação (6.20), podemos combinar esses resultados para obter uma fórmula para a força F_{flam} que teríamos que aplicar à treliça no nó 1 para fazer as barras flambarem. Como para $F = F_{\text{flam}}$ temos $N_{12} = N_{\text{flam}}$, podemos escrever a Equação (6.17) na forma

$$F_{\text{flam}} = \frac{N_{\text{flam}} L}{2h}$$
$$F_{\text{flam}} = \frac{2hN_{\text{flam}}}{L} \qquad (6.21)$$

Substituindo a Equação (6.20) na Equação (6.21), obtemos

$$\begin{aligned} F_{\text{flam}} &= \frac{2hN_{\text{flam}}}{L} \\ &= \frac{2h\pi^2 Et^4}{12L^3} \\ &= \frac{2h\pi^2(1{,}46 \times 10^6)t^4}{12L^3} \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{h^2 + (s/2)^2} \\ &= \sqrt{h^2 + (12)^2} \end{aligned}$$

obtemos, finalmente, a seguinte fórmula para F_{flam} em função de h e t:

$$F_{\text{flam}} = \frac{2h\pi^2(1{,}46 \times 10^6)t^4}{12(h^2 + 144)^{3/2}} \qquad (6.22)$$

A Figura 6.55 mostra os mapas do modelo de resistência: um mapa tridimensional, uma vista lateral e um mapa de contorno. Para compreender melhor o significado desses mapas, vamos começar pela curva $t = 1/4$ de polegada da vista lateral e observar o que acontece quando aumentamos a altura h, de 1 polegada para 12 polegadas. Quando h é muito pequena, vemos, na Equação (6.17) e na Figura 6.53, que a força interna nas barras é muito maior que a força aplicada e, portanto, que F_{flam} é pequena. Quando aumentamos gradualmente a altura da treliça, a força interna diminui em relação à força aplicada até que, por volta de 7 polegadas ou um ângulo de 30°, elas se tornam iguais. Em toda esta região, F_{flam} aumenta continuamente, pois a razão entre a carga interna e a carga aplicada diminui. Ao mesmo tempo, porém, como as barras estão ficando mais

compridas, a força crítica de flambagem das barras está diminuindo, como podemos ver na Equação (6.20) e na Figura 6.54. Quando a altura da treliça ultrapassa aproximadamente 8 polegadas, o fato de que barras mais compridas resistem menos à flambagem passa a dominar, e F_{flam} começa a diminuir. Esta tendência persiste enquanto a altura continua a aumentar.

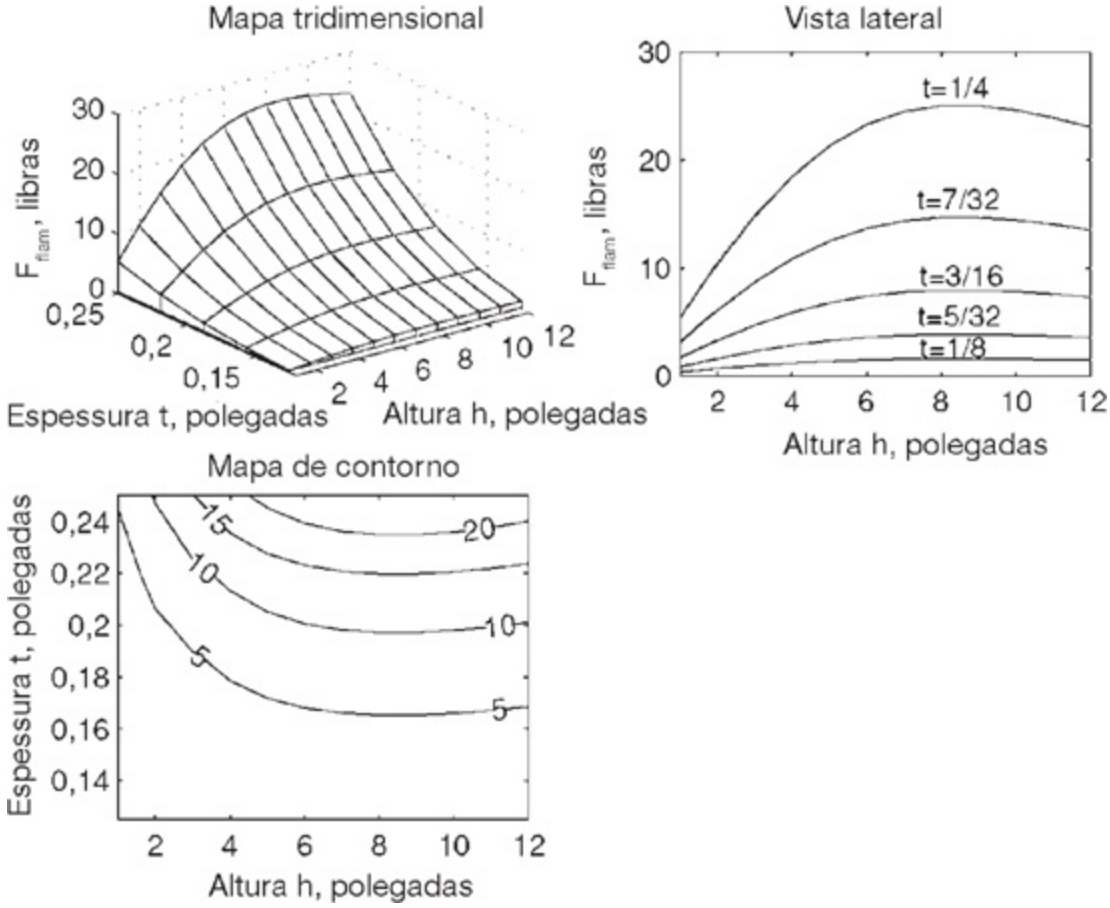


Figura 6.55 Força crítica de flambagem F_{flam} em função da altura da treliça e da espessura das varas.

Consideremos agora as curvas para as outras espessuras na vista lateral da Figura 6.55. Essas curvas têm a mesma forma que a curva de $t = 1/4$ de polegada, com F_{flam} aumentando enquanto a altura aumenta de 1 até 8 polegadas e depois diminuindo. Quando a espessura diminui de $t = 1/4$ de polegada para $t = 1/8$ de polegada, a altura máxima atingida pelas curvas diminui, o que mostra que F_{flam}

diminui quando a espessura das barras diminui. Podemos ver mais claramente a relação entre F_{flam} e t observando o gráfico tridimensional. Se traçarmos uma linha ao longo da superfície de F_{flam} para um valor constante da altura h da treliça, como $h = 12$ polegadas, por exemplo, veremos que F_{flam} aumenta rapidamente com t, já que F_{flam} é proporcional a t^4. Em outras palavras, um pequeno aumento da espessura da barra aumenta significativamente a resistência da treliça.

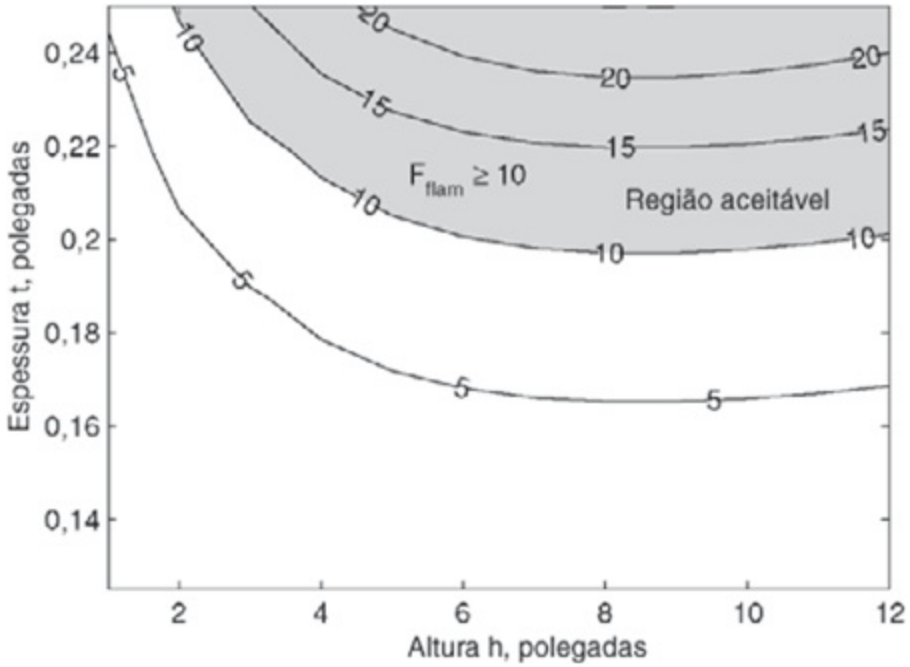


Figura 6.56 A região aceitável na qual a carga crítica de flambagem é maior ou igual a 10 libras.

6.5.3 Escolha Final dos Parâmetros

Uma vez preparados os mapas do peso em função da altura da treliça e espessura das barras da Figura 6.52 e os mapas da resistência em função da altura da treliça e da espessura das barras de Figura 6.55, só nos resta escolher os parâmetros da treliça mais leve capaz de sustentar um peso de pelo menos 10 libras. Para isso, vamos localizar no mapa de contorno da resistência a região aceitável na qual $F_{\text{flam}} \geq$

10 libras, e reproduzi-la no mapa de contorno do peso para determinar o ponto da região que corresponde ao menor peso.

A Figura 6.56 mostra a região aceitável do mapa de contorno da resistência, na qual $F_{\text{flam}} \geq 10$ libras. Lembremo-nos de que um mapa de contorno é uma vista de cima de um gráfico tridimensional; as curvas do mapa, conhecidas como curvas de nível, ligam os pontos nos quais a variável dependente – F_{flam}, no caso – tem o mesmo valor. A região aceitável da Figura 6.56 é, portanto, o conjunto de todas as combinações de valores de h e t para as quais os pontos estão sobre a curva de nível $F_{\text{flam}} = 10$, ou acima dela.

A Figura 6.57 mostra a região aceitável do mapa de resistência transposta para o mapa de peso. Vemos que o ponto de peso mínimo está logo abaixo da curva de nível $W = 0{,}015$ libra, e suas coordenadas são $h = 6$ polegadas, $t = 0{,}2$ polegada. Como devemos usar varas padrão de *basswood* com espessuras em múltiplos de 1/32 de polegada, os parâmetros escolhidos são $h = 3{,}8$ polegadas e $t = 7/32$ de polegada.

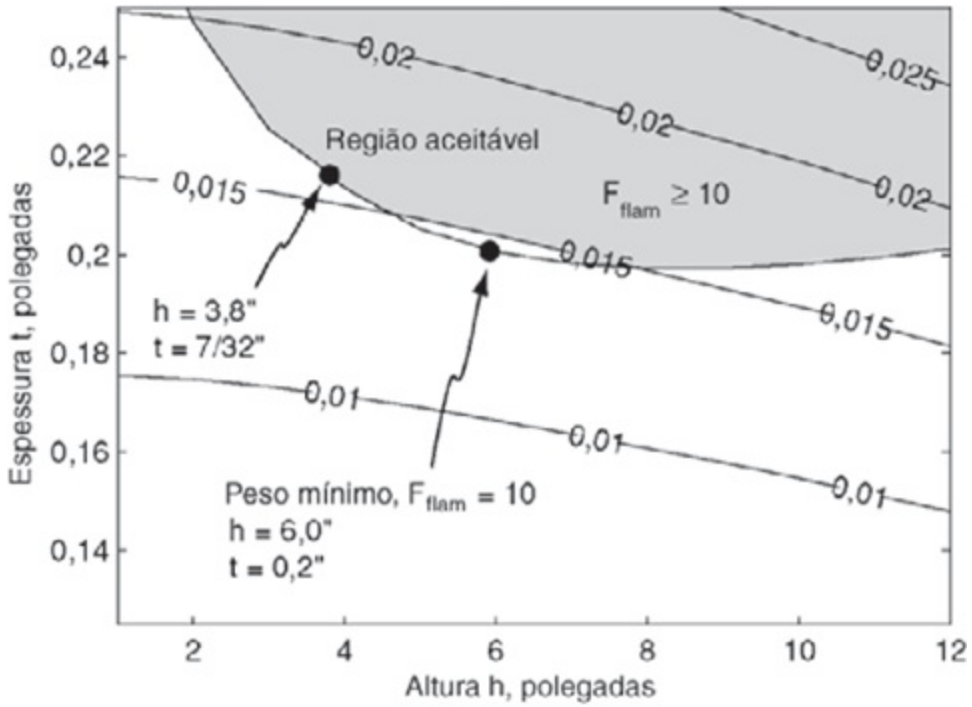
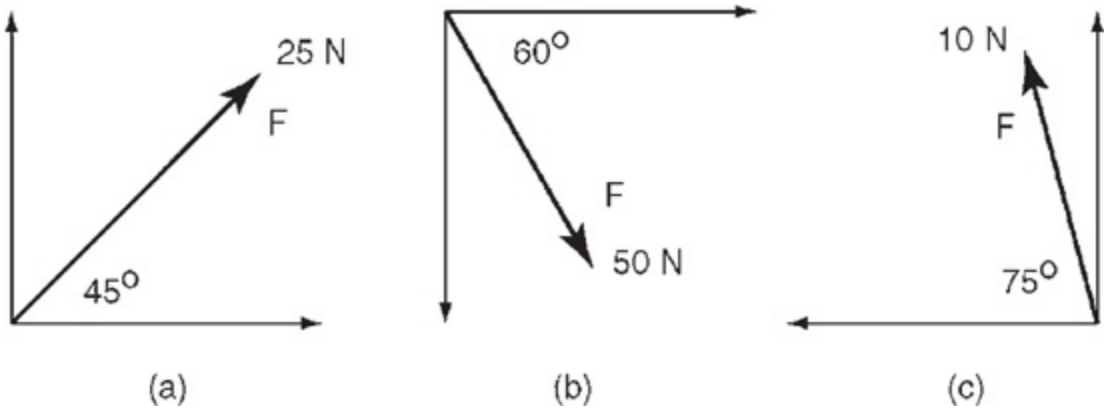


Figura 6.57 Escolha dos parâmetros finais do projeto de uma treliça de peso

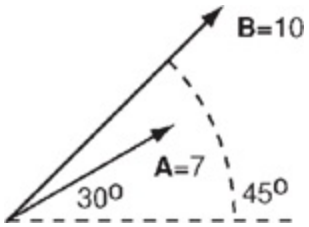
mínimo capaz de suportar uma carga de pelo menos 10 libras.

PROBLEMAS

1. **Componentes de um Vetor**
   Determine as componentes x e y do vetor F nos casos abaixo.

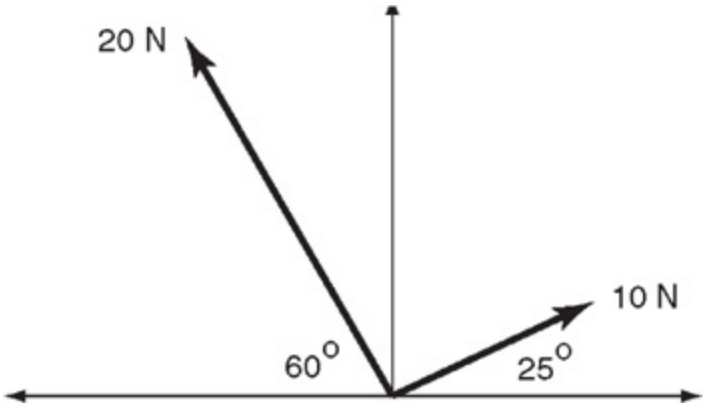


2. **Adição de Vetores**
   Some os vetores **A** e **B**



   (a) usando o método trigonométrico (módulo/orientação);
   (b) usando as coordenadas cartesianas.

3. **Resultante de Dois Vetores**
   Considere os vetores abaixo:

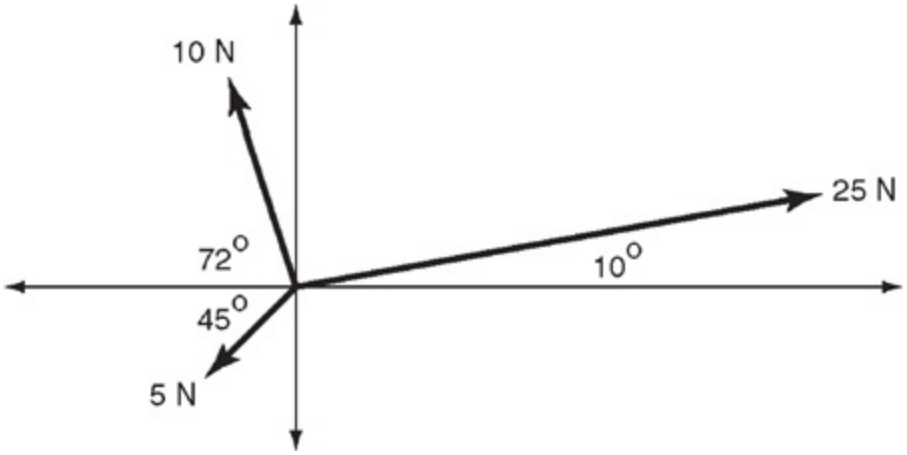


Determine o vetor resultante (módulo e orientação)

(a) usando a regra do paralelogramo;
(b) somando os vetores “em sequência”;
(c) usando as componentes cartesianas.

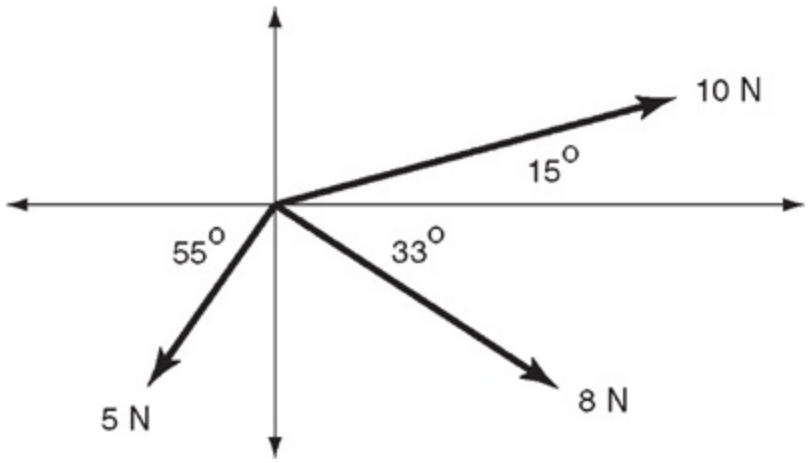
4. Resultante de Três Vetores

Determine o vetor resultante (módulo e orientação) dos três vetores abaixo, usando as componentes cartesianas.



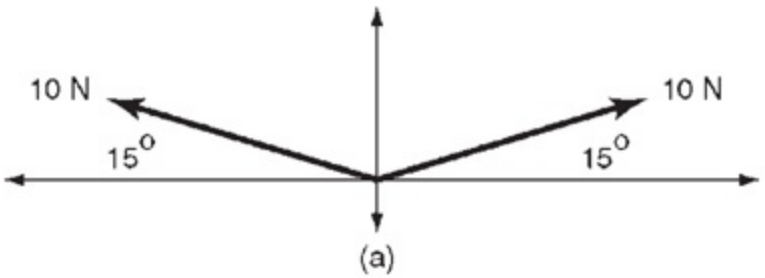
5. Resultante de Três Vetores

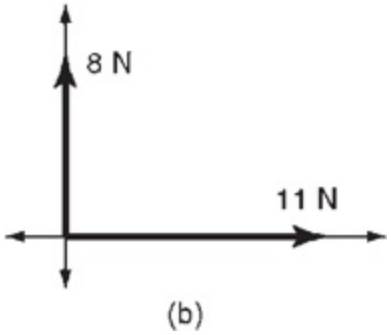
Determine o vetor resultante (módulo e orientação) dos três vetores abaixo, usando as componentes cartesianas.



6. Equilíbrio Estático

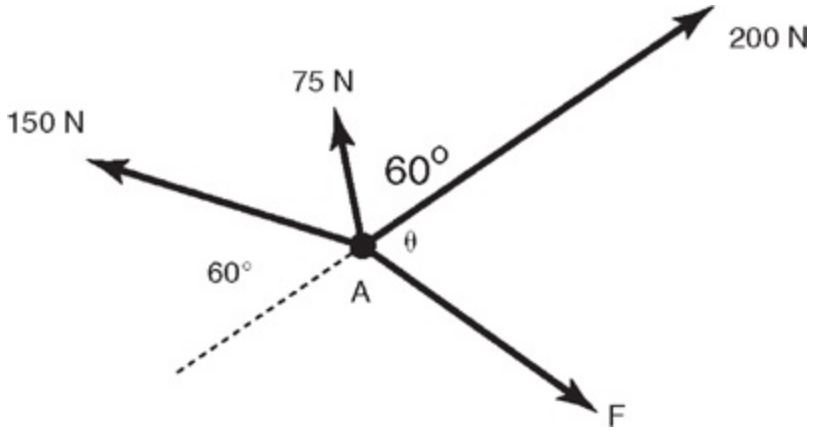
Nas duas situações abaixo, determine a força que deve ser acrescentada ao sistema para que fique em equilíbrio estático.





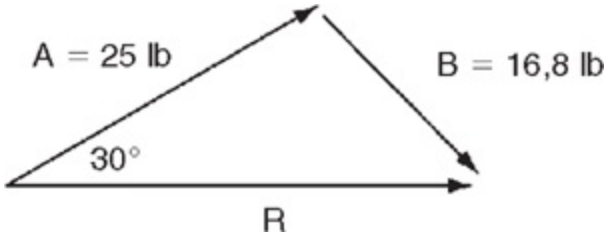
7. Determinação de uma Força Desconhecida Aplicada a uma Partícula em Equilíbrio Estático

Uma partícula, situada no ponto A, é submetida a quatro forças coplanares, das quais três são conhecidas e uma é desconhecida. Se a partícula está em equilíbrio, determine o módulo da força desconhecida **F** e o ângulo θ entre **F** e a força de 200 N.



8. Adição de Vetores

Sabe-se que o vetor **R** (de módulo desconhecido) é a soma vetorial de duas forças: a força **A**, que faz um ângulo de 30° com **R** e tem um módulo de 25 libras, e a força **B**, que tem um módulo de 16,8 libras.



Determine

(a) o ângulo entre **B** e **R**;

(b) o módulo de **R**.

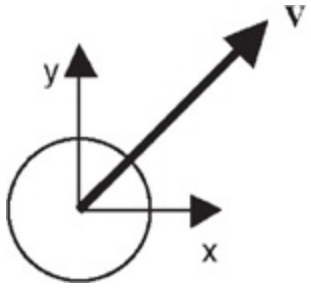
Por que existem duas soluções possíveis para o problema?

9. Vetor Velocidade

Um projétil está se movendo com velocidade **V**. Se o módulo da componente *x* de **V**, V_x, é 3 m/s e o módulo da componente *y* de **V**, V_y, é 4 m/s, determine

(a) o módulo de **V**;

(b) o ângulo entre **V** e o eixo *x*.

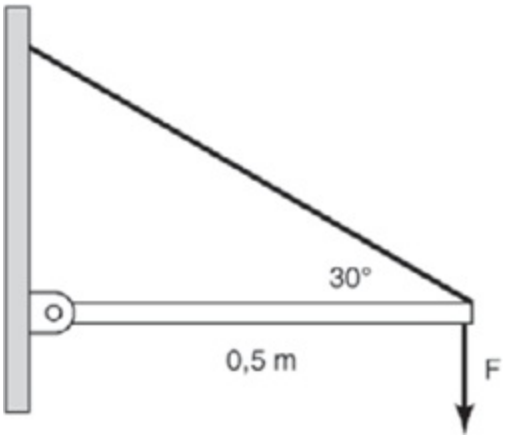


10. Forças nos Nós de uma Treliça

Desenhe os nós da treliça da Figura 6.19 como partículas submetidas a forças internas e externas. Suponha que todas as barras estão sendo tracionadas e que todas as forças de reação são de compressão.

11. Sustentação de uma Prateleira

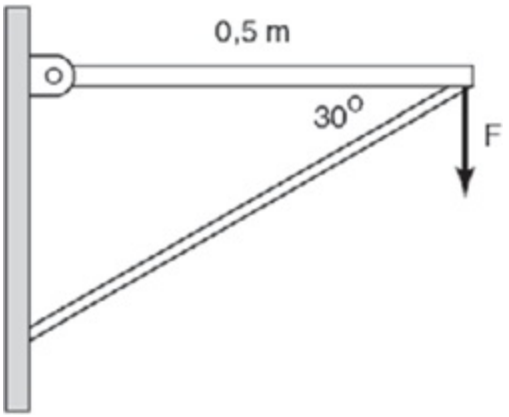
Uma prateleira está presa a uma parede por uma dobradiça e um cabo, como mostra a figura abaixo.



- Se uma força vertical para baixo, de módulo $F = 100$ N, é aplicada à borda da prateleira, qual é a tensão do cabo?
- Suponha que, em vez de um cabo, a prateleira seja sustentada por uma linha de pescar, com uma resistência de 50 libras, amarrada a um prego. Se é necessária uma força de 45 libras para arrancar o prego da parede, qual é o mecanismo de falha da prateleira se a força *F*é aumentada gradualmente, a partir de 0 libra, até o momento em que a falha ocorre? Justifique

sua resposta.

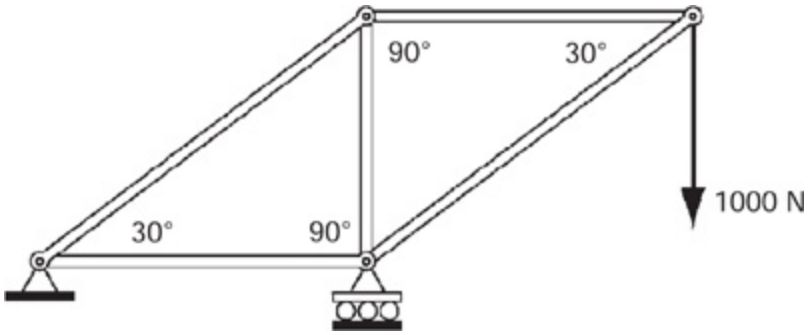
Suponha que, em vez de ser sustentada por um cabo, a prateleira seja sustentada por uma barra de madeira com uma seção reta, quadrada, de 1 cm por 1 cm, como mostra a figura abaixo.



- Qual é o maior peso *F* que a prateleira pode suportar?
- Qual é o diâmetro mínimo de uma barra cilíndrica de alumínio capaz de suportar o mesmo peso que a barra de madeira?

12. Análise de uma Treliça de Cinco Elementos

Considere a treliça de cinco elementos da figura abaixo.

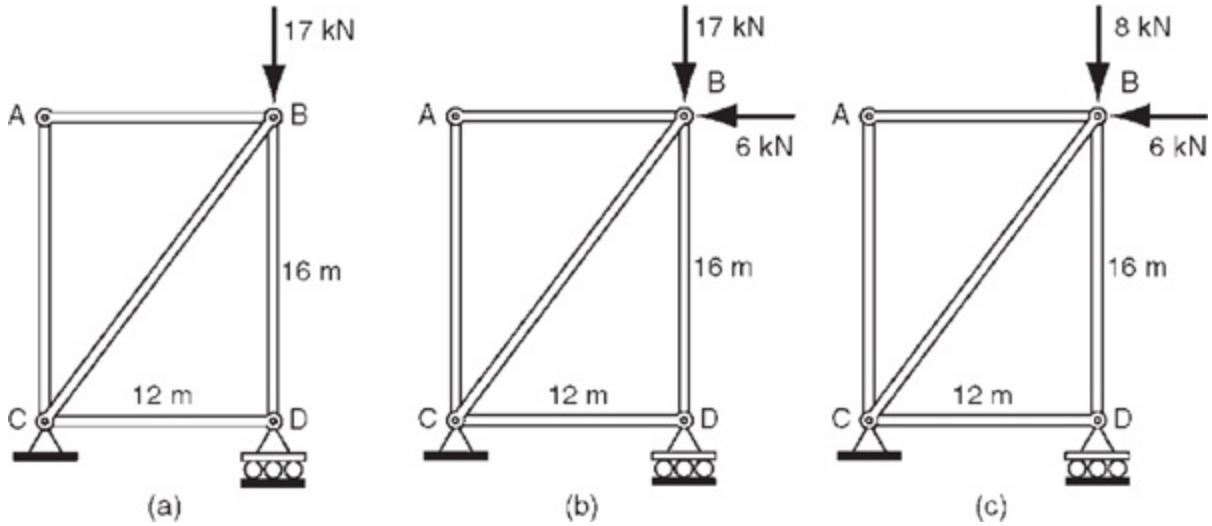


(a) Determine as forças internas nos cinco elementos da treliça.

(b) Se a altura da treliça é duplicada e a largura permanece a mesma, as forças internas das barras aumentam ou diminuem? Justifique sua resposta.

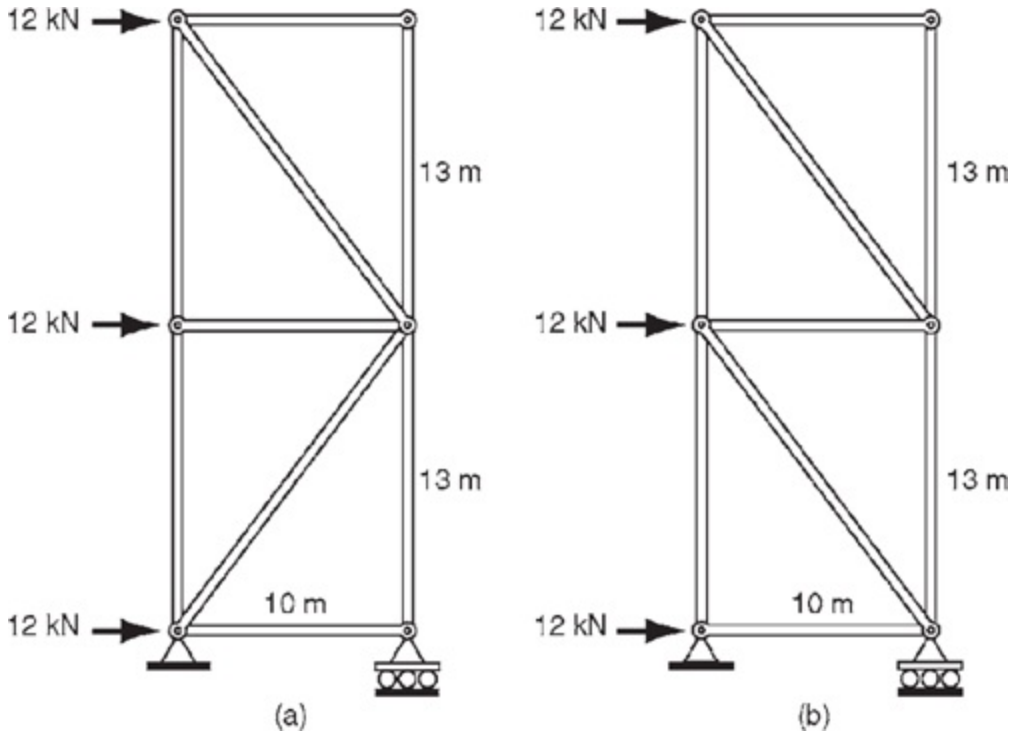
13. Elementos de Força Zero

Um elemento de força zero é um elemento de uma treliça que não possui nenhuma força interna, ou seja, não é tracionado nem comprimido, para um dado valor da carga aplicada. Determine, para as condições abaixo, quais são os elementos de força zero da treliça e quais são as forças de reação nos pontos C e D.



14. Escolha de um Modelo de Treliça

As duas treliças da figura estão sendo consideradas para uma aplicação na qual a estrutura será submetida às forças horizontais indicadas. Determine as forças internas nas barras e as forças de reação para os dois modelos. Existe alguma razão para preferir um dos modelos? Justifique sua resposta.

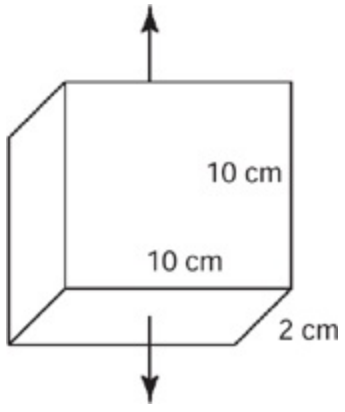


15. Curvas Catenárias e o Arco de St. Louis

Procure a definição de curva catenária e explique por que o Arco de St. Louis foi projetado para ter a forma de uma catenária invertida e não, por exemplo, a forma de uma parábola.

16. Constante de Mola de uma Amostra de Material

Determine a constante de mola de uma amostra de um material, com as dimensões mostradas na figura, que sofre uma dilatação de 0,1 mm ao ser submetida a uma força de tração de 24 kN na direção mostrada na figura. Qual pode ser o material?



17. Compressão de um Cano

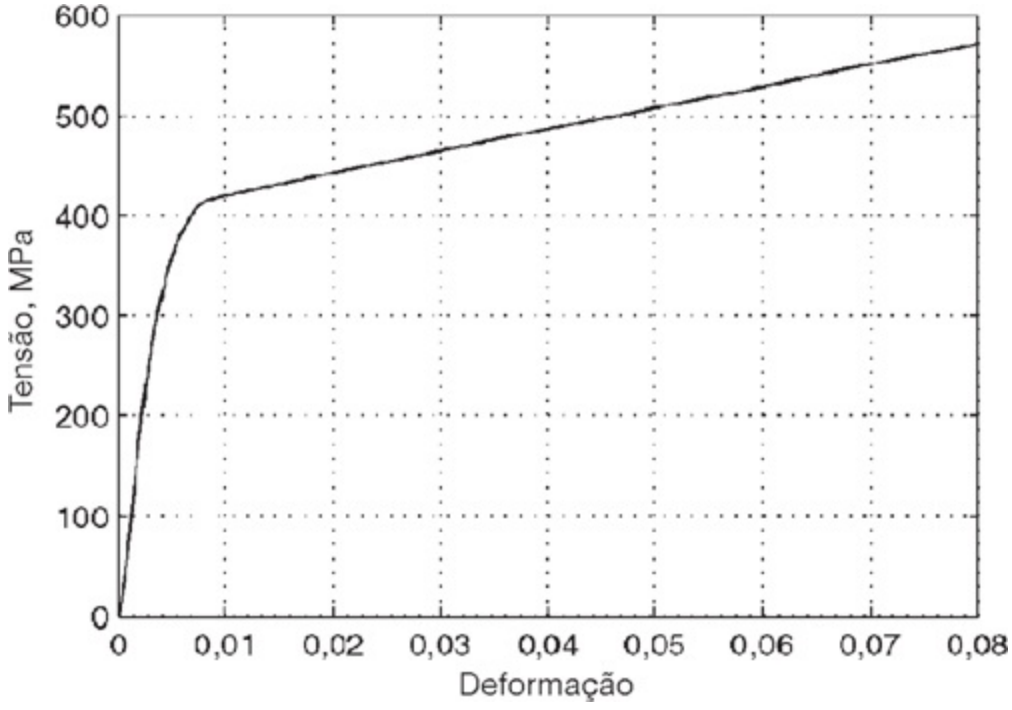
Determine a variação de comprimento de um cano de alumínio submetido a uma força de compressão de 200 libras. O diâmetro interno do cano é de 2 polegadas e o diâmetro externo é de 2,125 polegadas. O comprimento inicial do cano é de 4 pés.

18. Resistência de um Cilindro de Polietileno

Determine a tensão, a deformação e o módulo de Young de um cilindro de polietileno com 1/2 polegada de diâmetro e 6 polegadas de comprimento. Quando o cilindro é submetido a uma força de tração de 475 libras, seu comprimento aumenta de 1/8 de polegada.

19. Deformação de uma Amostra de Liga de Alumínio

Uma certa liga de alumínio tem a curva tensão-deformação mostrada abaixo. Se uma amostra cilíndrica do material tem 10 cm de comprimento e 0,5 cm de diâmetro, qual é a força necessária para produzir uma dilatação de 2 mm? Esta deformação é elástica?



20. Carga Crítica de Flambagem de uma Viga Retangular

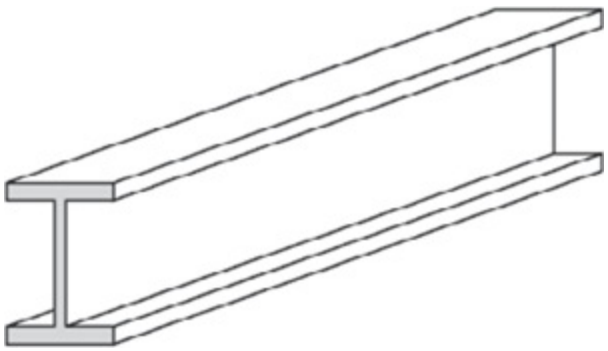
Na Seção 6.3.3, foram fornecidas as informações necessárias para calcular a carga crítica de flambagem de uma viga de seção reta quadrada.

(a) Qual você acha que seria o efeito sobre a carga crítica de flambagem de duplicar a largura da viga sem mudar a espessura (fazendo com que passasse a ter uma seção reta retangular)? Justifique sua resposta. *Sugestão*: Procure na Internet informações a respeito do momento de inércia de área para verificar se suas conclusões estão corretas.

(b) Calcule a força necessária para flambar uma placa de vidro de 1 m $\times$ 1 m $\times$ 5 mm, se a força é aplicada a uma das faces com menor área.

21. Por que Usar uma Viga em I?

Uma viga em I é uma viga cuja seção reta tem a forma da letra I, como mostra a figura. Por que você acha que existem vigas com essa forma?



22. Vigas Maciças e Vigas Ocas

Considere três vigas cilíndricas de alumínio submetidas a compressão, todas com 5 m de comprimento. A primeira é uma barra maciça com 10 mm de diâmetro, a segunda é uma barra maciça com 6 mm de diâmetro, e a terceira é um cano oco com um diâmetro externo de 10 mm e uma espessura de 2 mm. Para

cada uma das vigas, determine:

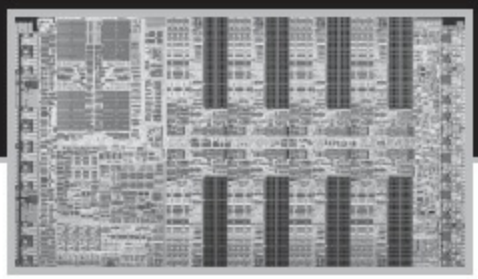
- a massa;
- a força máxima que a viga é capaz de suportar;
- a razão entre a força máxima e a massa.

A parte mais difícil do problema é determinar o momento de inércia de área da seção reta do cano. Pensando um pouco, você pode chegar a uma expressão para este momento de inércia a partir da definição de momento de inércia de área e da fórmula do momento de inércia de área de um círculo, apresentada na Seção 6.3. (Você pode verificar na Internet se suas deduções estão corretas.) Que conclusão você pode tirar deste problema a respeito de vigas maciças e ocas?

23. Escalada de um Poste Telefônico

Suponha que um poste telefônico tem 10 m de altura e 30 cm de diâmetro. Quantos adultos podem escalar simultaneamente o poste sem que ele comece a flambar?

CAPÍTULO 7



Modelagem de Relações entre os Componentes de um Sistema: Circuitos Eletrônicos Digitais

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- descrever a diferença entre a visão lógica e a visão física de um circuito digital e discutir a evolução das duas visões;
- expressar proposições lógicas simples usando equações booleanas e circuitos de comutação;
- usar os conceitos de corrente, tensão e potência, juntamente com a Lei de Ohm e as Leis de Kirchhoff, para analisar um circuito elétrico simples;
- discutir algumas soluções de compromisso entre as visões lógica e física de um circuito digital, como conciliar tamanho e potência.

7.1 INTRODUÇÃO

O modo como os computadores se integraram à sociedade superou todas as expectativas; até mesmo os líderes da indústria cometeram erros grosseiros ao estimar o número de computadores fabricados. Em

1943, o presidente da IBM, Thomas J. Watson, Sr. afirmou que “existe um mercado mundial para talvez cinco computadores”. *Em 1977, o presidente da Digital Equipment Corporation, Ken Olsen, declarou que “não há razão para que alguém queira ter um computador em casa”.[1] Hoje em dia, os computadores estão em toda parte e são usados em aplicações tão diferentes como prever o tempo, controlar a ignição de um motor de automóvel e animar um videogame. O computador é, basicamente, uma máquina que processa informações. Os computadores modernos, em suas várias formas, constituem o último elo de uma cadeia de invenções que começou há milhares de anos. Os MP3 *players* portáteis de hoje, com as músicas armazenadas na forma de pequenos ímãs em um disco rígido ou cargas elétricas em uma memória *flash*, descendem de caixinhas de música em que os sons eram codificados como pequenas saliências em cilindros de metal. Até mesmo a palavra “calculadora” presta homenagem a um dos primeiros objetos que as pessoas usaram para contar: a pedra, que em latim se chama *calculus*.

Durante o século XX, a base dos computadores voltou a ser uma pequena pedra, mais especificamente uma pastilha de silício como a que aparece na Figura 7.1, contendo pequenos comutadores elétricos chamados *transistores*. O objetivo deste capítulo é apresentar uma introdução aos circuitos eletrônicos digitais e mostrar como são usados para realizar cálculos e tomar decisões. Como as estruturas leves chamadas treliças que foram discutidas no Capítulo 6, os circuitos digitais são conjuntos de elementos que trabalham para desempenhar uma certa função. Da mesma forma que uma treliça obedece a certas leis da mecânica, como as Leis de Newton do equilíbrio de forças e a Lei de Hooke da elasticidade, os circuitos digitais obedecem a leis da eletricidade, como a Lei de Ohm e as Leis de Kirchhoff. Nos dois casos, a análise da estrutura leva a um sistema de equações lineares.

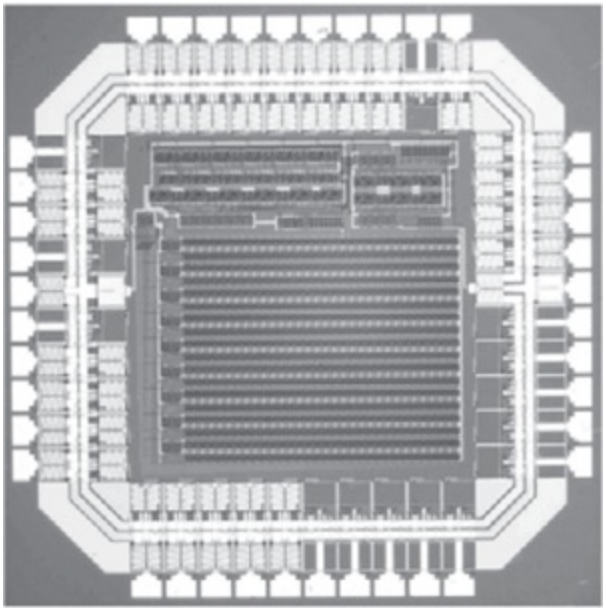


Figura 7.1 Esta pastilha, projetada e fabricada por alunos da Universidade de Notre Dame, toca a "Marcha da Vitória de Notre Dame" e contém mais de 3.000 transistores, cada um com aproximadamente 2 μm de comprimento [BBK + 03].

Neste capítulo, vamos primeiro examinar alguns princípios gerais que norteiam o projeto de qualquer computador e dar uma breve olhada na história dos computadores. Em seguida, examinaremos os computadores do ponto de vista lógico e veremos de que forma novas ideias da matemática, surgidas no final do século XIX e início do século XX, abriram as portas para a computação moderna. Também vamos discutir os computadores do ponto de vista eletrônico e apresentar uma introdução à análise de circuitos elétricos. Finalmente, uniremos os dois pontos de vista para examinar os compromissos envolvidos no projeto de um circuito lógico digital conhecido como *inversor*.

7.2 MÁQUINAS DE COMPUTAÇÃO

7.2.1 Os Pontos de Vista Lógico e Físico

Como fizemos com outros artefatos, vamos analisar as máquinas de

computação do ponto de vista dos produtores e dos consumidores. Neste caso, porém, existem outros dois importantes pontos de vista: o ponto de vista *lógico* ou *simbólico* e o ponto de vista *físico*, como mostra a Figura 7.2.

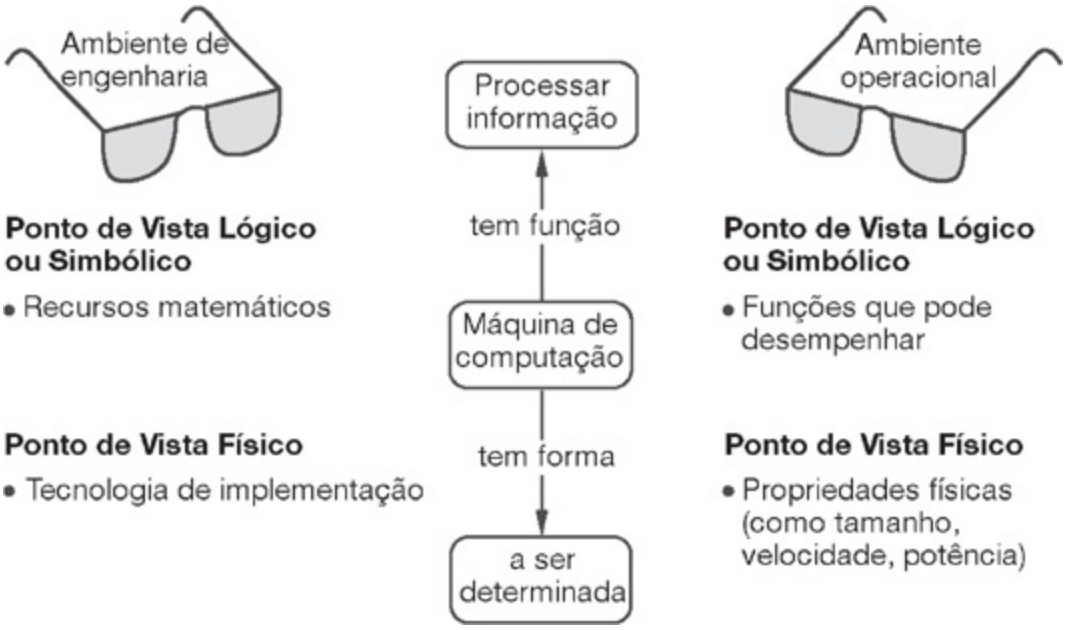


Figura 7.2 Pontos de vista no projeto de uma máquina de computação.

Ponto de Vista Lógico ou Simbólico Podemos pensar no ponto de vista lógico ou simbólico de uma máquina de computação como a visão de um matemático ou de um cientista da computação, desligado do aspecto físico da máquina. Do ponto de vista do consumidor, a visão lógica define as funções que o computador é capaz de desempenhar. Um consumidor que avalia a qualidade de um dispositivo portátil do ponto de vista lógico pode fazer as seguintes perguntas:

- Posso usá-lo como calculadora?
- Posso usá-lo como agenda e lista de endereços?
- Posso usá-lo para tocar música?
- Posso usá-lo para fazer ligações telefônicas?

Na visão do produtor, os recursos disponíveis para projetar a

máquina do ponto de vista lógico são, essencialmente, de natureza matemática. Entre eles estão as formas de representar diferentes tipos de informações e de processar essas informações para obter os resultados desejados. Na matemática e na lógica, as informações são representadas através de um "alfabeto" de *símbolos*. De acordo com o dicionário, símbolo quer dizer, entre outras coisas,

> **1**. Aquilo que, por um princípio de analogia, representa ou substitui outra coisa. **6**. Elemento gráfico ou objeto que representa e/ou indica de forma convencional um elemento importante para o esclarecimento ou a realização de alguma coisa; sinal, signo. (Dicionário Aurélio – Século XXI.)

Existem muitos tipos de símbolos. Os naipes de um baralho de cartas, ♣, ♢, ♡ e ♠ são símbolos; as letras, algarismos e todos os outros caracteres que podemos digitar em um teclado de computador também são símbolos. Usando os símbolos apropriados, podemos representar informações de todos os tipos, como textos, números, imagens e sons.

Do ponto de vista lógico, as operações de um computador são definidas por um sistema de regras matemáticas e lógicas. As escolhas feitas durante o projeto lógico de uma máquina podem afetar profundamente o projeto físico. Considere, por exemplo, a questão de escolher os símbolos a serem usados para representar números em uma máquina de somar. Duas escolhas possíveis são os algarismos arábicos e os algarismos romanos, mostrados na Figura 7.3. Se representamos os números por algarismos arábicos, podemos usar as regras convencionais para somar números coluna por coluna, usando o "vai um" sempre que necessário. Entretanto, não é possível somar algarismos romanos por colunas, de modo que as regras de adição são bem mais complicadas, o que torna mais complicado o projeto físico de uma máquina para implementá-las.

Ponto de Vista Físico O ponto de vista físico de uma máquina de computação é a visão da pessoa encarregada de construí-la. Do ponto

de vista do consumidor, as características físicas de uma máquina são as propriedades sensíveis. Um consumidor que avalia a qualidade de um dispositivo portátil do ponto de vista físico pode fazer as seguintes perguntas:

Figura 7.3 A escolha dos símbolos a serem usados para representar informações pode afetar profundamente o projeto físico de uma máquina de computação. As regras para somar algarismos arábicos são muito mais simples que as regras para somar algarismos romanos.

- Quanto pesa? É muito grande?
- Gasta muita energia? Quanto tempo duram as baterias? Esquenta muito quando está ligado?
- É rápido?
- É confiável?

Do ponto de vista do produtor, os recursos disponíveis para desenvolver a máquina física são as tecnologias de projeto e de fabricação. Através dos séculos, essas tecnologias avançaram, das pedras para os ábacos e para os microcircuitos, passando pelos sistemas mecânicos de precisão.

Dizemos que a máquina de computação física é uma *implementação* da máquina lógica; para construir uma, são necessárias duas coisas importantes. Em primeiro lugar, precisamos de um modo de representar as informações para que a máquina física possa "compreendê-las". Um CD ou DVD, por exemplo, codifica as informações simbólicas na forma de pequenos picos e vales na superfície do disco, enquanto um microprocessador codifica informações na forma de tensões em circuitos elétricos. Em segundo lugar, precisamos de um "truque" para que os componentes físicos interpretem os símbolos codificados e os processem usando meios

estritamente físicos, mas de modo a *emular* uma operação aritmética ou lógica. Esse "truque", dependendo da técnica usada, pode empregar componentes mecânicos, como engrenagens, dispositivos elétricos, como transistores, ou mesmo componentes moleculares ou biológicos.

Exemplo: Máquina de Somar Burroughs e Sony PlayStation 3 Para ilustrar essas ideias, vamos considerar o projeto de uma máquina de somar, mecânica, e comparar seu desempenho com o do Cell Broadband Engine, o processador da Sony Playstation 3. A Figura 7.4 mostra a Borroughs Classe 1/ Modelo 9, construída entre 1905 e 1914.[2] Do ponto de vista lógico, a máquina é capaz de realizar uma única operação, que é somar um número de nove algarismos ao número armazenado na memória. Uma versão avançada da máquina, o Modelo 12, podia lidar com números de 12 algarismos. Do ponto de vista físico, cada posição decimal é representada por uma coluna de 10 botões numerados de "0" a "9". Para entrar com um número, o operador aperta um botão em cada coluna. Quando a alavanca é puxada, a máquina acrescenta o número à soma que está na memória. O "truque" usado para emular a adição por meios físicos é a rotação de engrenagens. Como mostra a Figura 7.4, cada algarismo dispõe de uma engrenagem de contagem de dez dentes que gira quando a alavanca é puxada, e os botões acionam hastes que limitam a rotação das engrenagens.

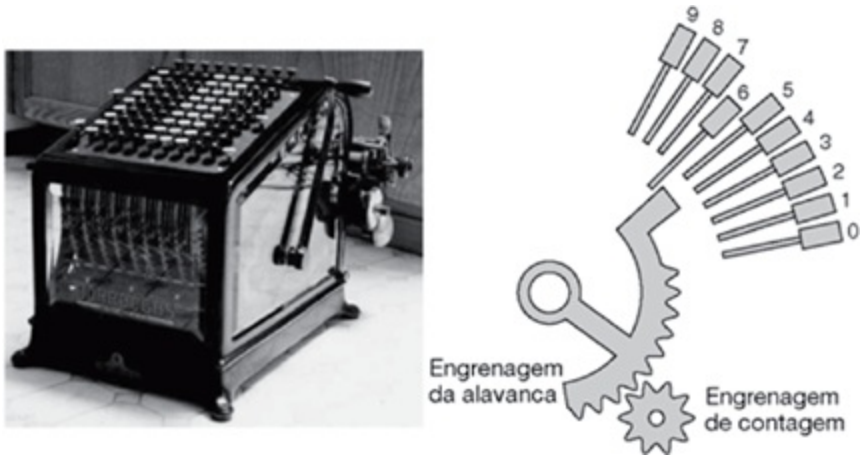


Figura 7.4 A máquina de somar Burroughs Classe 1, 1905-1914. Copyright David G. Hicks.

Tamanho Com 50 cm de profundidade, mais de 30 cm de altura e 28 kg de peso, a Burroughs Classe 1/Modelo 9 é bem maior que uma "máquina de somar" moderna, de 2006, como a de Cell Broadband Engine [Hof05], o microprocessador da Sony Playstation 3, mostrado na Figura 7.5.

Velocidade Um operador experiente podia talvez entrar com um número de nove algarismos e puxar a alavanca da máquina de somar Burroughs uma vez a cada 5 segundos. O Cell Broadband Engine, por sua vez, é capaz de realizar mais de 256 bilhões de operações aritméticas por segundo.

Energia e Potência A máquina de somar Burroughs tem algo em comum com a bomba manual que analisamos no Capítulo 4: produzir um resultado toda vez que o usuário puxa uma alavanca. Assim, podemos analisar o consumo de energia da máquina Burroughs como fizemos no caso da bomba. Vimos no Capítulo 4 que trabalho é igual a força vezes distância. Supondo que o operador exerce uma força de aproximadamente 5 N para fazer a alavanca percorrer uma distância de aproximadamente 15 cm, o trabalho realizado por soma é

$$\text{Trabalho por soma} = 5\ \text{N} \times 0{,}15\ \text{m}$$

$$= 0{,}75 \text{ J}$$

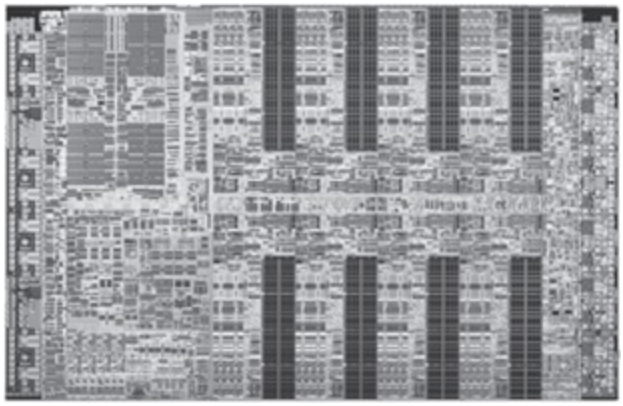


Figura 7.5 O Cell Broadband Engine foi desenvolvido conjuntamente pela IBM, Sony e Toshiba para jogos e outras aplicações de computação de alto desempenho. Mede aproximadamente 10 mm por 20 mm. Pode realizar mais de 256 bilhões de operações aritméticas por segundo e consome aproximadamente 80 watts de potência [Hof05]. Foto cortesia da IBM Corporation.

Potência é a taxa com a qual a energia é consumida por unidade de tempo e é medida em watts (W); 1 watt é igual a 1 joule por segundo. Assim, se o operador é capaz de entrar com um número e puxar a alavanca uma vez a cada 5 segundos, o consumo de potência da máquina de somar Burroughs é dado por

$$\begin{aligned} \text{Potência} &= \frac{\text{Energia por soma}}{\text{Tempo por soma}} \\ &= \frac{0{,}75 \text{ J}}{5 \text{ s}} \\ &= 0{,}15 \text{ W} \end{aligned}$$

O consumo de potência para o microprocessador Cell, por sua vez, foi estimado em 80 W. Como é capaz de realizar 256 bilhões de somas por segundo, a energia por soma é

$$\begin{aligned} \text{Energia por soma} &= \frac{\text{Potência} \times \text{Tempo}}{\text{Número de somas}} \\ &= \frac{(80 \text{ W})(1 \text{ s})}{256 \times 10^9} \\ &= 0{,}3 \times 10^{-9} \text{ J} \end{aligned}$$

o que representa um consumo de energia por soma 2 bilhões de vezes menor que o da máquina de somar Burroughs. A máquina Burroughs não esquenta muito quando está funcionando a uma velocidade máxima, se estiver bem lubrificada. O Cell Broadband Engine, embora tenha uma potência relativamente baixa para um circuito tão complexo, pode ficar muito quente. Como mostra a Figura 7.6, a Sony PlayStation 3 dispõe de um sofisticado sistema de resfriamento para evitar que o Cell superaqueça.

Confiabilidade Como tinha peças móveis, a máquina de somar Burroughs estava sujeita a desgaste. Se os dentes das engrenagens quebravam ou uma das molas se soltava, podia produzir respostas erradas. De forma geral, quanto maior o número de peças e mais estreitas as tolerâncias, mais difícil se torna construir uma máquina que funcione de forma confiável. O Cell tem 234 milhões de transistores, cada um com 90 nanômetros de comprimento.

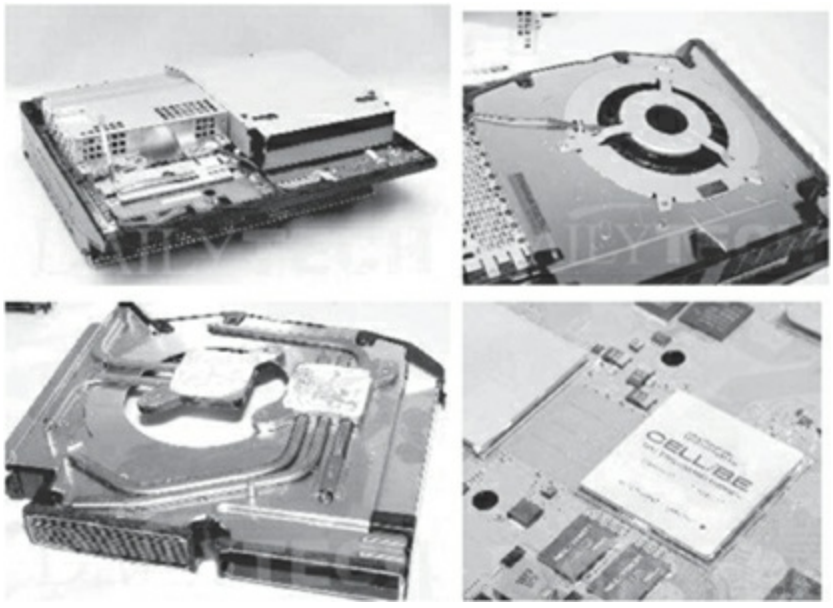


Figura 7.6 Algumas vistas de um Sony PlayStation 3, cortesia de Kristopher Kubicki e Marcus Yam, do *Daily Tech* [KY06]. Sem a caixa (no alto, à esquerda). Uma ventoinha de 160 mm é responsável pela ventilação forçada (no alto, à direita). Um grande dissipador de calor preso à ventoinha dispõe de condutores térmicos diretamente ligados aos microcircuitos de maior potência da placa-mãe,

o Cell Broadband Engine e um “Sintetizador de Realidade” NVIDIA RSX (embaixo, à esquerda). O Cell montado na placa-mãe, com o NVIDIA RSX à esquerda (embaixo, à direita).

7.2.2 História e Fundamentos

Da Contagem à Computação A trajetória da máquina de somar Burroughs Classe 1/Modelo 9 até a IBM/Sony/Toshiba Cell Broadband Engine envolve um avanço tão grande do conhecimento matemático quanto da tecnologia de implementação. Quando o modelo Burroughs Classe 1 foi criado, na virada do século XX, o ambiente de engenharia para máquinas de computação não tinha mudado muito desde o século XVII. Blaise Pascal construiu uma máquina de somar e subtrair baseada no princípio de engrenagens, em 1642, e Gottfried Leibniz propôs uma máquina que também seria capaz de multiplicar e dividir, em 1694. Foi apenas no século XIX que as técnicas de fabricação avançaram a ponto de permitir que essas máquinas fossem fabricadas em série. Entretanto, não foi só a tecnologia de implementação que manteve máquinas como a Burroughs Classe 1 em um estágio primitivo. Em 1900, os projetistas de máquinas de computação ainda se restringiam à matemática da *contagem*; seriam necessárias décadas de inovações introduzidas por uma nova geração de matemáticos para que essa visão mudasse.

Em 1854, o matemático inglês George Boole publicou uma monografia que, depois que os engenheiros perceberam suas implicações, teve uma enorme influência no projeto de máquinas de computação. Intitulado *Uma investigação das Leis do Pensamento, nas quais se baseiam as Teorias Matemática da Lógica e das Probabilidades*, o trabalho de Boole estabeleceu, pela primeira vez, uma ligação entre álgebra e lógica, apresentando uma forma de determinar, através de manipulação de símbolos, se uma combinação de proposições era verdadeira ou falsa, do mesmo modo como é possível determinar o valor numérico de uma incógnita na álgebra “comum”. Outros matemáticos, como Alfred North Whitehead, Bertrand Russell, Kurt

Gödel, Alan Turing, Alonzo Church e John von Neumann, construíram a ponte entre lógica e *programação*, que constitui a base lógica dos computadores atuais.

Em 1937, mais de 80 anos depois da publicação das *Leis do Pensamento*, um aluno de pós-graduação do MIT, de 21 anos, escreveu uma tese de mestrado que é considerada a mais importante do século XX [Sha37]. Nela, Claude Shannon, de Petosky, Michigan, descreveu a forma de construir uma máquina de computação usando chaves eletromagnéticas chamadas *relés* e o sistema lógico de Boole. Além disso, Shannon estabeleceu uma ligação entre a lógica booleana e a aritmética binária (aritmética que utiliza apenas os algarismos 1 e 0), o sistema numérico usado em praticamente todos os computadores modernos. Claude Shannon não foi a única pessoa a perceber as vantagens do uso de relés em máquinas de computação: mais ou menos na mesma época em que Shannon estava lançando suas ideias, Konrad Zuse na Alemanha, George Stibitz no Bell Labs, em Nova York, e John Atanasoff, no Iowa State College, estavam construindo protótipos de máquinas que executavam cálculos aritméticos no sistema binário usando relés. Shannon, porém, foi o primeiro a estabelecer uma abordagem rigorosa que tornava possível, ao mesmo tempo, usar chaves para resolver problemas lógicos complexos e usar a matemática para simplificar o projeto de máquinas de computação. O moderno computador digital programável, com memória, controle automático e funções aritmética e lógica, tomou forma por meio de uma série de projetos independentes executados no início da década de 1940, como o Z3 de Zuse, apresentado em 1941, o computador ABC, construído por Atanasoff e seu aluno Clifford Berry em 1941, o Colossus, desenvolvido em 1943 pelo engenheiro inglês Tommy Flowers e uma equipe de matemáticos para decifrar códigos alemães durante a Segunda Guerra Mundial, o Mark I da IBM/Harvard, projetado em 1944 por um grupo liderado por Howard Aiken, e o ENIAC, projetado por John Mauchly e J. Presper Eckert na

Universidade da Pensilvânia em 1944. Todas essas máquinas usavam circuitos de comutação, às vezes em combinação com engrenagens e outros componentes mecânicos, para implementar operações lógicas complexas.

Circuitos Digitais e Confiabilidade O arranjo de chaves que Claude Shannon descreveu em sua tese de mestrado continua a ser até hoje a base para o projeto de circuitos lógicos; é difícil imaginar como seria possível projetar um computador eletrônico moderno, com bilhões de transistores, usando outra abordagem. Isso acontece não só por causa da relação entre os circuitos chaveados e a matemática da computação, mas também porque o método assegura que os computadores funcionem de forma *confiável*. Como mostra a Figura 7.7, podemos codificar informações de dois modos usando sinais eletrônicos: na abordagem *analógica*, o sinal pode ter qualquer valor dentro de uma faixa contínua; na abordagem digital, o sinal pode assumir apenas um certo número de valores, que na prática quase sempre se reduzem a apenas dois. No sistema analógico, o valor do sinal elétrico apresenta uma correspondência direta ou *analogia* com a informação que está sendo representada. Assim, por exemplo, um sinal de 2,33 V pode corresponder a uma temperatura de 23,3°C medida por um sensor analógico de temperatura. No sistema digital, dois valores possíveis do sinal, chamados “alto” e “baixo” ou 1 e 0, constituem o “alfabeto” de símbolos ou *dígitos* usados para escrever a informação, seja ela constituída por números, palavras, sons ou qualquer outro tipo de dado. Um dígito binário isolado, ou seja, um 1 ou um 0, é chamado de *bit*, termo popularizado por Shannon.

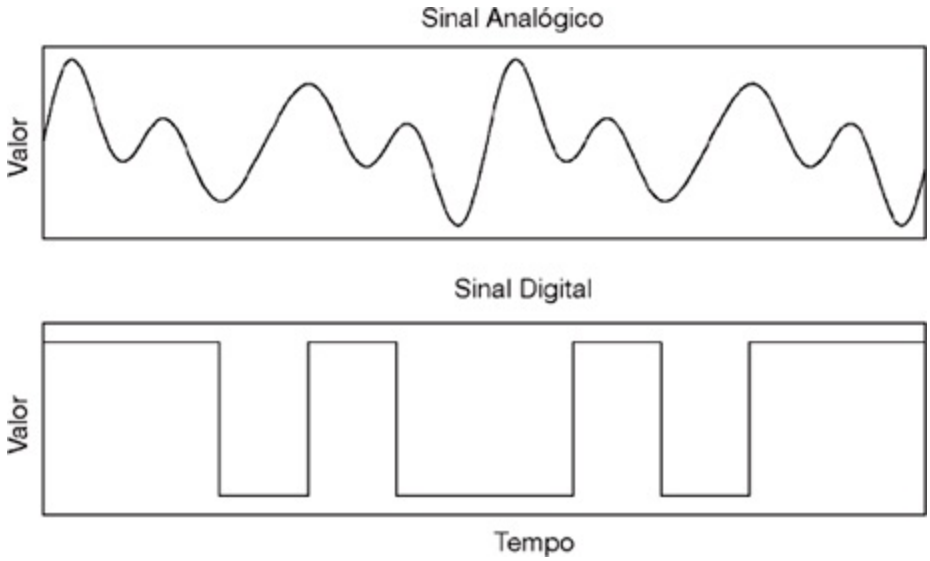


Figura 7.7 Os sinais analógicos podem assumir qualquer valor dentro de uma certa faixa, enquanto os sinais digitais podem assumir um número limitado de valores, em geral apenas dois.

Quando usadas em circuitos lógicos, as chaves codificam naturalmente dois valores distintos: estão fechadas ou abertas, ou seja, conduzem eletricidade ou não. Do ponto de vista físico, a vantagem principal de usar a codificação digital em vez da codificação analógica é que é *mais fácil* construir uma máquina capaz de distinguir dois estados diferentes do que construir uma máquina capaz de determinar um valor específico de um parâmetro. Considere, por exemplo, os picos e vales que codificam a informação em um CD ou DVD. No método digital, basta determinar se um pico ou um vale está presente, enquanto no método analógico seria necessário determinar precisamente o tamanho do pico ou do vale. Além disso, mesmo que haja algumas irregularidades ou imprecisões no disco, como arranhões, ou no aparelho, como o alinhamento do laser, é provável que o disco ainda possa ser lido. Como mostra a Figura 7.8, os picos e vales de um DVD ideal teriam bordas abruptas e superfícies planas, enquanto, na prática, algumas imperfeições são inevitáveis. Mesmo assim, se as imperfeições não forem muito grandes, continuará a ser possível distinguir um pico de um vale.

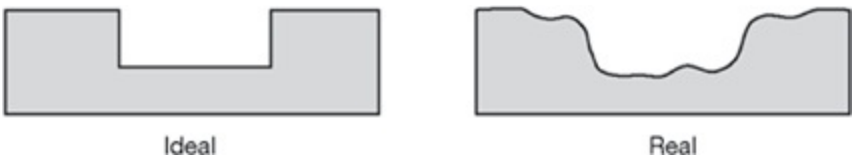


Figura 7.8 Comparação entre os picos e vales ideais e reais em um CD ou DVD. Uma das grandes vantagens da codificação digital em relação à codificação analógica é que os sinais digitais podem ser interpretados corretamente, mesmo quando existem imperfeições na gravação ou transmissão dos dados.

O nome que os engenheiros usam para as imperfeições de um sinal, como as flutuações nos picos e vales de um DVD, é *ruído*. Existem muitas causas possíveis de ruído em um sistema eletrônico, incluindo tudo que pode causar estática em um receptor de rádio ou televisão, como uma tempestade elétrica ou a interferência de um eletrodoméstico. No projeto de um computador, é importante que os uns sejam interpretados como uns e os zeros como zeros, mesmo na presença de ruído; imagine o que aconteceria se o circuito digital de uma bomba de insulina injetasse a quantidade errada sempre que caísse um raio! Em geral, quanto maior a diferença entre os valores alto e baixo, maior a tolerância do sistema a ruídos. Mesmo assim, existe uma possibilidade real de que os dados sejam corrompidos, especialmente no caso de comunicações a longa distância. Em 1948, quando trabalhava no Bell Laboratories, Shannon publicou outro artigo revolucionário chamado *Uma Teoria Matemática da Comunicação* [Sha48], no qual usou métodos estatísticos e probabilísticos para calcular a probabilidade de que bits de dados fossem perdidos em uma comunicação, estabelecendo assim as bases para sistemas de detecção e correção de erros baseados na transmissão de bits adicionais. Hoje em dia, esta ideia é usada rotineiramente em todas as formas e armazenamento e transmissão de dados digitais. As pesquisas de Shannon no campo da teoria da informação levaram a outros sucessos: juntamente com a esposa Betty e colegas do MIT e do Bell Labs, Shannon ganhou uma fortuna em Las Vegas jogando *blackjack* e roleta e também em Wall Street, investindo

na bolsa de valores [Pou05].

Chaves Melhores, Menores e Mais Rápidas Quando Claude Shannon escreveu sua tese de mestrado, as chaves que imaginou para a construção de máquinas de computação eram *relés* eletromecânicos do tipo usado nos circuitos de telefonia da época. Como mostra a Figura 7.9, o relé é formado por uma peça móvel, uma peça fixa, uma mola e um eletroímã. Quando uma tensão elétrica é aplicada ao eletroímã, ele atrai a peça móvel, que encosta na parte fixa, fechando o circuito. Quando a tensão elétrica é retirada, a mola faz a peça móvel voltar à posição inicial, abrindo o circuito. Como os relés têm peças móveis, sofrem os efeitos do desgaste; além disso, são volumosos e relativamente lentos. Logo que os engenheiros começaram a construir máquinas de computação, no início da década de 1940, teve início uma busca de chaves melhores, mais rápidas e menores, uma evolução ilustrada na Figura 7.9.

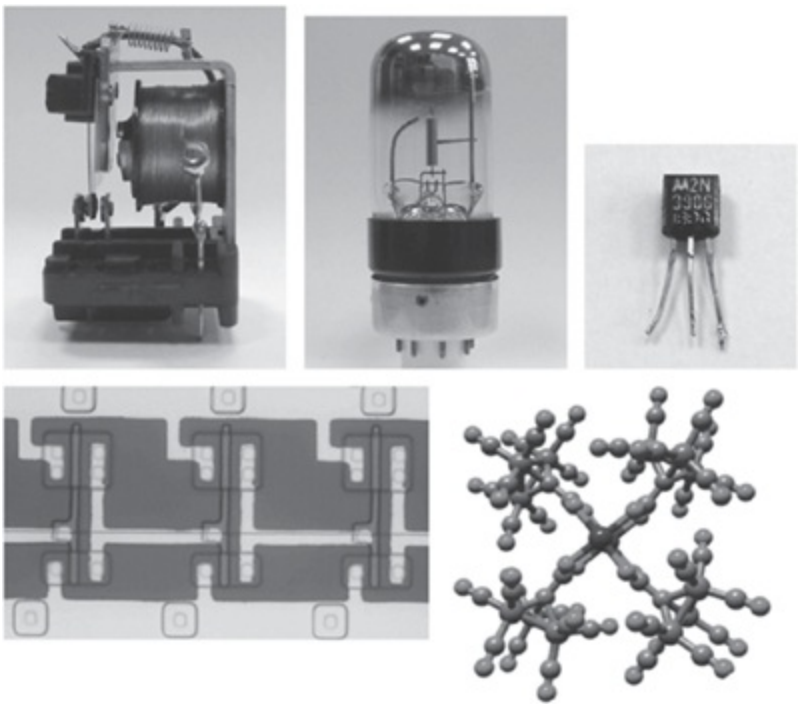


Figura 7.9 Evolução da tecnologia das chaves elétricas. No alto, da esquerda para a direita: relé eletromecânico, válvula, transistor. Embaixo, da esquerda para a direita: seis transistores ligados em um circuito integrado, fabricado por alunos de

graduação da Universidade de Notre Dame (foto cortesia de Greg Snider); uma possível chave molecular, constituída por quatro átomos de rutênio que podem girar em torno de um eixo (desenho cortesia de Olaf Wiest).

Inicialmente utilizadas para amplificar sinais elétricos em aparelhos de rádio, as *válvulas eletrônicas* passaram a ser usadas como chaves em substituição aos relés. Como mostra a Figura 7.9, as válvulas eletrônicas se parecem com lâmpadas incandescentes, com um filamento no interior de um bulbo de vidro; a diferença é que existem outros terminais dentro do bulbo. Quando o filamento é aquecido pela passagem de uma corrente elétrica, produz uma corrente no dispositivo, que pode ser controlada através de tensões aplicadas aos outros terminais. Os circuitos lógicos do Computador ABC, do Iowa State College, do Colossus inglês e do ENIAC, da Universidade da Pensilvânia, usavam válvulas eletrônicas como chaves. Similarmente às lâmpadas incandescentes, as válvulas eletrônicas queimam e precisam ser substituídas. O ENIAC tinha mais de 17.000 válvulas eletrônicas; segundo uma entrevista de 1989 com Presper Eckert, "uma válvula queimava a cada um ou dois dias, e levávamos menos de 15 minutos para localizar o problema" [Bos06]. As válvulas são tão volumosas quanto os relés, e consomem muita energia; o ENIAC pesava cerca de 30 toneladas, consumia 150 kW de potência e podia realizar aproximadamente 5000 somas de números de 10 algarismos por segundo.

Em dezembro de 1947, alguns meses antes de Shannon publicar *Uma Teoria Matemática da Comunicação*, outro grupo de pesquisadores do Bell Labs inventou um novo tipo de chave que revolucionaria a eletrônica. John Bardeen e Walter Brattain, trabalhando no laboratório de William Schockley, conseguiram produzir um dispositivo feito de germânio com contatos de metal chamado *transistor* [RH97]. O germânio é um tipo de elemento conhecido como *semicondutor*, que, dependendo da temperatura e da presença de impurezas, pode se comportar como um condutor ou como um

isolante. Os primeiros transistores comerciais eram encapsulados individualmente, como mostra a Figura 7.9, e tinham três terminais, um dos quais podia ser usado para controlar a corrente nos outros dois. Os primeiros computadores com transistores em lugar de válvulas eletrônicas foram fabricados no início da década de 1950, como o protótipo construído na Universidade de Manchester, Inglaterra, em 1953, o IBM Modelo 604, de 1953, e o TRADIC, do Bell Labs, de janeiro de 1954.

Em 1958 e 1959, Jack Kilby, da Texas Instruments, e Robert Noyce, da Fairchild Semiconductor Corporation, trabalharam de forma independente na mesma ideia: integrar muitos componentes eletrônicos em uma única pastilha de material semicondutor. Kilby terminou primeiro o seu protótipo, mas Noyce recebeu a primeira patente. Hoje em dia, ambos são considerados os inventores do circuito integrado. Mais tarde, em 1967, Kilby inventou a calculadora eletrônica portátil. O tipo de circuito integrado projetado por Noyce, mostrado na Figura 7.9, que é feito de silício em vez de germânio e usa vidro como isolante e alumínio como condutor, se tornou o padrão da indústria. Noyce deixou a Fairchild e, em 1968, fundou a Intel Corporation com Gordon Moore e Andy Grove.

Qual será o próximo passo? Como vimos no Capítulo 1, o número de transistores em um circuito integrado vem dobrando a cada dois anos e os dispositivos se tornaram menores e mais rápidos, como Gordon Moore previu em 1965. Já foi previsto, algumas vezes, que esta tendência em breve chegaria ao fim, mas novas invenções ajudaram a mantê-la. Agora, finalmente, existem sinais de que o progresso está se tornando mais lento, e a maioria dos especialistas acredita que os métodos de fabricação atuais atingirão o seu limite entre 2015 e 2020. Em anos recentes, muito tempo e dinheiro vem sendo investido na nanoeletrônica, que envolve a construção de máquinas de computação de dimensões moleculares. A Figura 7.9 mostra uma chave proposta por Marya Lieberman, Craig Lent e

colaboradores da Universidade de Notre Dame [Len00][LIL03]. A chave é formada por átomos de rutênio dispostos em torno de um eixo central. Dependendo das cargas mais próximas, a molécula pode girar em um sentido ou no sentido oposto. Da mesma forma como as máquinas de computação do início do século passado eram feitas de engrenagens rotativas, os computadores do próximo século talvez sejam feitos de moléculas rotativas.

7.3 CIRCUITOS DIGITAIS DO PONTO DE VISTA SIMBÓLICO E LÓGICO

O ponto de vista simbólico ou lógico de um computador é a visão matemática da máquina. Nesta seção, vamos ver como os computadores digitais usam chaves para fazer operações aritméticas. Começaremos com uma introdução ao sistema de lógica matemática desenvolvido por George Boole em meados do século XIX, que recebeu o nome de *lógica booleana*. Em seguida, examinaremos o sistema para implementar expressões lógicas usando chaves, criado por Claude Shannon. Depois, apresentaremos a *aritmética binária*, que usa apenas os algarismos 1 e 0, e explicaremos a relação entre esta aritmética e a lógica booleana. Finalmente, discutiremos o projeto de um circuito de comutação simples para somar dois números binários.

7.3.1 Lógica Booleana

Em meados do século XIX, na Inglaterra, muitos acreditavam que, quando alguém adoecia, o melhor tratamento era fazer algo que se parecesse com a causa da doença. Assim, quando o marido se sentiu mal depois de andar até o Queen's College debaixo de chuva e dar aulas o dia inteiro com a roupa molhada, Mary Everest Boole – sobrinha do geógrafo em cuja homenagem foi batizada a montanha mais alta do mundo – o pôs na cama e despejou baldes de água

gelada no marido, apressando assim a morte do inventor da lógica matemática. Quando George Boole publicou *As Leis do Pensamento* em 1854, certamente não fazia ideia de que seu sistema de álgebra serviria de base para o projeto de máquinas que um dia seriam capazes de derrotar grandes mestres do xadrez. A álgebra elementar que estudamos no segundo grau tem como base o uso de símbolos para estudar grandezas numéricas. Usamos símbolos chamados *variáveis* para representar números, símbolos chamados *operadores* para representar formas de combinar números, e símbolos chamados *relações* para representar formas de compará-los. Além dos símbolos, existe um conjunto de regras, propriedades ou *axiomas* que se referem às proposições formadas com esses símbolos. Assim, por exemplo, de acordo com a propriedade comutativa da adição, a ordem de duas variáveis separadas pelo símbolo '+' não altera o resultado. O sistema criado por Boole, conhecido como *álgebra booleana*, envolve regras para manipular proposições simbólicas que representam os valores lógicos "verdadeiro" e "falso" e operações que envolvem esses valores. Por convenção, usamos o símbolo "1" para representar "verdadeiro" e o símbolo "0" para representar "falso".

Variáveis e Operadores Enquanto na álgebra comum as variáveis são usadas para representar números, na álgebra booleana as variáveis são usadas para representar a verdade de proposições. Assim, por exemplo, na álgebra comum a proposição "a tensão de uma bateria é de 1,5 volt" é representada por uma expressão como

$$V = 1{,}5$$

De modo análogo, na álgebra booleana, a proposição "as luzes estão acesas" é representada por uma expressão como

$$L = 1$$

e a proposição "as luzes estão apagadas" é representada por uma

expressão como

$$L = 0$$

Na álgebra comum, as expressões são escritas combinando variáveis por meio de operações como adição (operador '+'), subtração (operador '−') e multiplicação (operador '×'). Na álgebra booleana, as expressões são escritas combinando variáveis por meio de operações (e operadores) como AND, OR e NOT. Esses operadores também podem ser representados por símbolos, "∧", "∨", e "¬", respectivamente, mas neste livro, vamos usar a primeira notação.

Operação NOT O operador NOT significa negação lógica. Suponha, por exemplo, que a proposição "alguém está em casa" seja representada pela equação lógica

$$C = 1$$

Usando o operador NOT, podemos expressar a proposição "ninguém está em casa" como

$$\text{NOT } C = 1$$

Se A representa uma variável lógica cujo valor é "verdadeiro", o valor de NOT A é falso, e vice-versa. Podemos representar todos os casos da operação NOT em um tipo de tabela conhecido como *tabela de verdade*:

A	NOT A
0	1
1	0

Operação AND Se A e B são variáveis lógicas, a expressão

$$A \text{ AND } B$$

será verdadeira apenas se A e B forem verdadeiros. A tabela de verdade da operação AND cobre todas as combinações possíveis de

valores de A e B:

A	B	A AND B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Usando a operação AND podemos, por exemplo, escrever a proposição “as luzes estão acesas e ninguém está em casa” como

$$(L = 1) \text{ AND } (\text{NOT } C = 1)$$

O valor “padrão” das variáveis lógicas é tomado como sendo o valor “verdadeiro”; assim, quando escrevemos expressões que combinam variáveis, não há necessidade de escrever que são iguais a “1”. Por isso, a expressão acima é normalmente escrita simplesmente como

$$L \text{ AND } (\text{NOT } C)$$

Operação OR A expressão

$$A \text{ OR } B$$

será verdadeira se A for verdadeiro, se B for verdadeiro, ou se A e B forem verdadeiros. A tabela de verdade da operação OR é a seguinte:

A	B	A OR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Assim, a proposição “as luzes estão acesas ou ninguém está em casa” pode ser escrita como

$$L \text{ OR } (\text{NOT } C)$$

Propriedades Como na álgebra comum, a álgebra booleana tem várias leis e propriedades que se aplicam a operações. Para nos familiarizarmos com a ideia, vamos primeiro rever algumas

propriedades básicas da álgebra comum.

Propriedade comutativa da adição:	$A + B = B \times A$
Propriedade comutativa da multiplicação:	$A \times B = B \times A$
Propriedade associativa da adição:	$(A + B) + C = A + (B + C)$
Propriedade associativa da multiplicação:	$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
Propriedade de inversão da adição:	$A + (-A) = 0$
Propriedade distributiva da multiplicação:	$A \times (B + C) = (A \times B) + (A + C)$

Na álgebra booleana, as operações AND e OR são comutativas e associativas:

Propriedade comutativa da operação AND:	A AND $B = B$ AND A
Propriedade comutativa da operação OR:	A OR $B = B$ OR A
Propriedade associativa da operação AND:	(A AND B) AND $C =$ AND A (B AND C)
Propriedade associativa da operação OR:	(A OR B) OR $C = A$ OR (B OR C)

As operações AND e OR também possuem propriedades inversas:

Propriedade de inversão da operação AND:	A AND (NOT A) $= 0$
Propriedade de inversão da operação OR:	A OR (NOT A) $= 1$

A título de ilustração, considere o exemplo em que L representa a proposição “as luzes estão acesas”. Nesse caso, L AND (NOT L) representa a proposição “as luzes estão acesas e as luzes não estão

acesas", o que, evidentemente, não pode ser verdade. Por outro lado, *L* OR (NOT *L*) representa a proposição "as luzes estão acesas ou as luzes não estão acesas", o que é necessariamente verdade, já que cobre todas as situações possíveis.

Uma forma comum de demonstrar que uma propriedade é verdadeira é construir uma tabela de verdade. A tabela a seguir, por exemplo, mostra todos os casos possíveis da expressão *A* OR (NOT *A*):

A	NOT *A*	*A* OR (NOT *A*)
0	1	1
1	0	1

Existem apenas dois casos possíveis, $A = 0$ e $A = 1$. Nos dois casos, a tabela mostra que o valor de *A* OR (NOT *A*) é 1, de modo que a proposição é *sempre* verdadeira. Vamos usar o mesmo método para demonstrar outra propriedade da álgebra booleana, a propriedade distributiva de AND em relação a OR:

Propriedade

distributiva: *A* AND (*B* OR *C*) = (*A* AND *B*) OR (*A* AND *C*)

Como esta propriedade envolve três variáveis, *A*, *B* e *C*, a tabela de verdade tem $2^3 = 8$ casos. Construímos uma tabela com três partes: as primeiras três colunas mostram os valores das três variáveis, as duas colunas seguintes são usadas para calcular o valor de *A* AND (*B* OR *C*) para cada caso, e as últimas três colunas são usadas para calcular o valor de (*A* AND *B*) OR (*A* AND *C*).

Observe que os valores da quinta e da oitava colunas são iguais para todos os casos, o que mostra que as duas proposições são equivalentes.

Exemplo: Caixa Postal Suponha que, como parte do projeto de um sistema para telefones celulares, estamos interessados em expressar a lógica de encaminhamento de um chamado para a caixa postal de

uma pessoa P. Uma possível regra seria a de que uma chamada deve ir para a caixa postal de P, se o número chamado é o número de P e ninguém atende. Podemos representar esta regra como

$$V = P \text{ AND } N$$

onde

V: condição (verdadeiro/falso) para encaminhar a chamada para a caixa postal de P

P: condição (verdadeiro/falso) de que a chamada é para o número do telefone de P

N: condição (verdadeiro/falso) de que ninguém atende

Além disso, pode haver várias condições que levam à condição "ninguém atende", N = verdadeiro, como "quatro toques sem resposta" ou "telefone fora de área". Podemos expressar essas condições através de uma proposição do tipo OR:

$$N = R \text{ OR } X$$

onde

R: condição (verdadeiro/falso) de que houve quatro toques sem resposta

X: condição (verdadeiro/falso) de que o telefone está fora de área

Podemos combinar essas proposições em uma proposição única:

$$V = P \text{ AND } (R \text{ OR } X)$$

Usando a propriedade distributiva, podemos escrever as condições para encaminhar a chamada para a caixa postal de P na forma

$$V = (P \text{ AND } R) \text{ OR } (P \text{ AND } X)$$

Em outras palavras, a chamada deve ser encaminhada à caixa postal de P se a chamada é para o número de P e houve quatro toques sem resposta, ou se a chamada é para o número de P e o telefone está

fora de área. Neste exemplo, não houve uma simplificação real da condição para encaminhar uma chamada para a caixa postal, mas, em exemplos mais complexos, a aplicação das propriedades da álgebra booleana pode levar a uma simplificação considerável da expressão final.

A	B	C	B OR C	A AND (B OR C)	A AND B	A AND C	(A AND B) OR (A AND C)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

7.3.2 Construção de Máquinas de Computação Usando Chaves

A tese de mestrado de Claude Shannon mostrou que as expressões da lógica booleana podem ser implementadas em máquinas eletrônicas usando chaves [Sha37]. Apesar de revolucionárias, as ideias básicas por trás do arranjo de chaves proposto por Shannon para implementar as operações booleanas são, na verdade, muito simples. Para começar, considere a máquina de computação da Figura 7.10. A máquina dispõe de um botão para a entrada de dados, que representa a variável A. Se o botão está pressionado, A = verdadeiro; se não está, A = falso. A máquina também dispõe de uma lâmpada para a saída de dados, que representa a variável Y. Se a lâmpada está acesa, Y = verdadeiro; se não está, Y = falso. O objetivo da máquina é implementar a proposição booleana (trivial)

$$Y = A,$$

o que significa que Y deve ser verdadeiro (lâmpada acesa) quando A for verdadeiro (botão apertado), e falso (lâmpada apagada) quando A

for falso (botão não apertado).

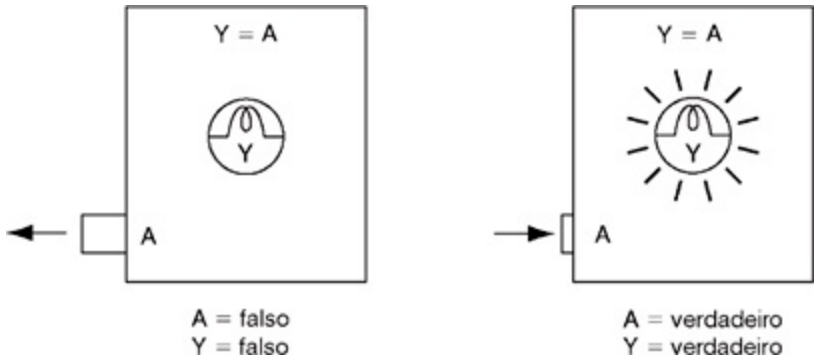


Figura 7.10 Máquina de computação usada para implementar a proposição lógica $Y = A$. A variável de entrada A é representada por um botão que indica o valor "verdadeiro" quando esse botão é apertado. A variável de saída Y é representada por uma lâmpada que indica o valor "verdadeiro" quando está acesa.

Como podemos implementar esta máquina usando chaves? A Figura 7.11 mostra uma solução possível. Quando o botão é apertado, ele fecha uma chave, fazendo uma" corrente elétrica" passar em um circuito e acender a lâmpada. Suponha agora que a máquina deva implementar a proposição booleana

$$Y = \text{NOT } A,$$

de modo que Y seja falso (lâmpada apagada) quando A é verdadeiro (botão apertado), e viceversa. A Figura 7.12 mostra uma implementação possível. Em vez de uma chave normalmente aberta, utiliza-se uma chave normalmente fechada, de modo que, quando o botão é apertado, a chave abre, interrompendo o circuito e apagando a lâmpada. Enquanto o botão não é apertado, a chave permanece fechada e a lâmpada permanece acesa.

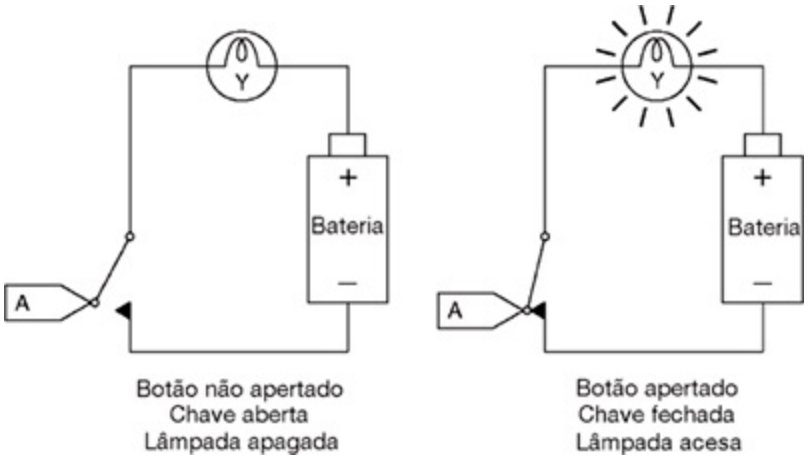


Figura 7.11 As "entranhas" da máquina de computação da Figura 7.10; um circuito com chave que implementa a proposição lógica $Y = A$.

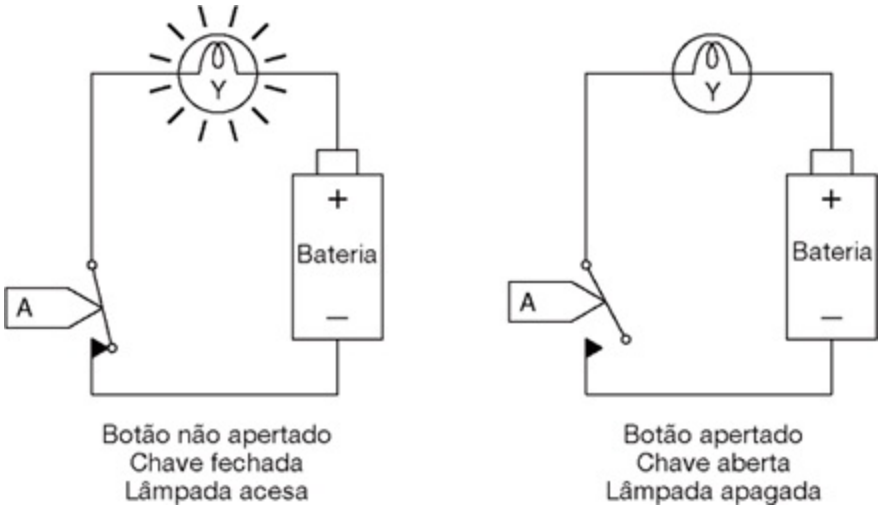


Figura 7.12 Circuito com uma chave usado para implementar a proposição lógica $Y = \text{NOT } A$.

Suponha agora que estamos interessados em construir máquinas que implementem as operações booleanas AND e OR:

$$Y = A \text{ AND } B$$

$$Y = A \text{ OR } B$$

Ambas as máquinas devem ter dois botões, um para a variável de entrada A e outro para a variável de entrada B, além de uma lâmpada para a variável de saída Y. O circuito da esquerda da Figura 7.13 mostra uma implementação da operação AND. Neste circuito, duas

chaves, uma controlada pela variável *A* e outra controlada pela variável *B*, são ligadas em série. A lâmpada só acende se os *dois* botões forem apertados. O circuito da direita da Figura 7.13 mostra uma implementação da operação OR. Neste circuito, as duas chaves são ligadas em paralelo, de modo que a lâmpada acende se o botão *A* for apertado, se o botão *B* for apertado ou se os dois botões forem apertados.

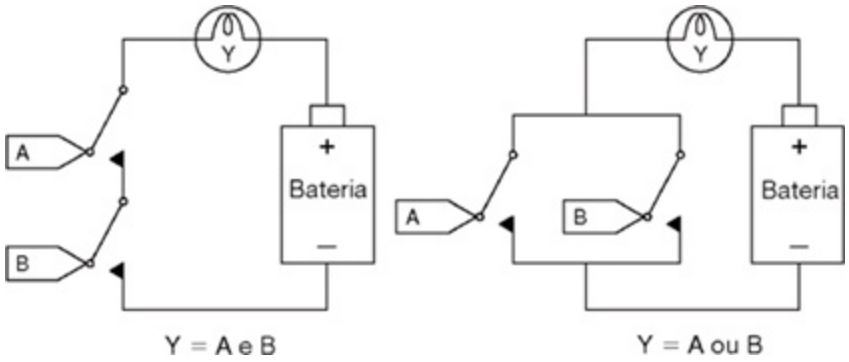


Figura 7.13 Duas chaves ligadas em série podem ser usadas para implementar uma operação AND (esquerda), enquanto duas chaves em paralelo podem ser usadas para implementar a operação OR (direita).

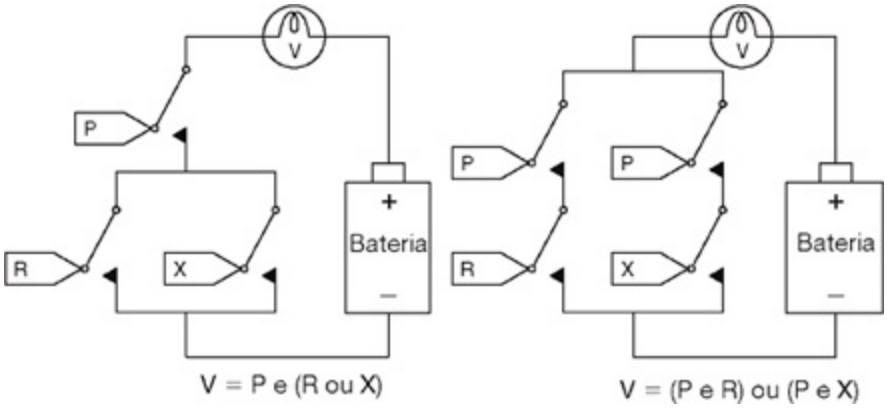


Figura 7.14 Combinações de chaves em série e em paralelo usadas para implementar as proposições equivalentes $V = P$ AND (R OR X) e $V = (P$ AND $R)$ OR (P AND X).

Combinações de chaves ligadas em série e em paralelo podem ser usadas para implementar proposições booleanas mais complexas. Como último exemplo, a Figura 7.14 mostra um circuito com chaves

que implementa duas regras equivalentes para encaminhar uma chamada a uma caixa postal,

$$V = P \text{ AND } (R \text{ OR } X)$$

$$V = (P \text{ AND } R) \text{ OR } (P \text{ AND } X)$$

7.3.3 Representação de Números no Sistema Binário

Como a representação do mundo, especialmente na engenharia, exige frequentemente uma descrição quantitativa, as máquinas de computação precisam de símbolos para representar *números*. A representação dos números que aprendemos no primeiro grau, e continuamos a usar durante toda a vida, é a representação decimal ou base 10. Nesta formulação, o número 142, por exemplo, é interpretado como

$$(1 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (2 \times 10^0)$$

onde "10" significa o número dez, ou seja, o número de dedos que a maioria das pessoas possui nas duas mãos. Para usar esta representação, precisamos de símbolos, chamados "algarismos" ou "dígitos", para representar dez diferentes números inteiros, ou seja, os números de 0 a 9. Esses dígitos indicam os coeficientes usados como fatores das várias potências de 10, e a posição de cada dígito indica por qual potência de 10 esse dígito deve ser multiplicado. De modo mais geral, o número decimal $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ representa o número

$$(a_n \times 10^n) + (a_{n-1} \times 10^{n-1}) + \cdots + (a_1 \times 10^1) + (a_0 \times 10^0),$$

onde cada a_i é um dígito de 0 a 9.

A representação de números na base 10, porém, não é a única representação possível. Se tivéssemos seis dedos em vez de dez, é provável que usássemos uma representação na base 6. Nesse caso, necessitaríamos de símbolos para apenas seis números inteiros, os números de 0 a 5, e a posição de cada dígito indicaria a potência de 6

pela qual esse dígito deve ser multiplicado. Assim, por exemplo, o número na base 6 $(51)_6$ representa[3] o número decimal $(31)_{10}$, já que

$$(5 \times 6^1) + (1 \times 6^0) = (3 \times 10^1) + (1 \times 10^0)$$

A representação de números no sistema binário obedece ao mesmo princípio: cada bit do número é um coeficiente a ser multiplicado por uma potência de 2, e a posição do bit indica qual é a potência de 2. Por exemplo:

$$(110011)_2 = (51)_{10}$$

jà que

$$\begin{aligned}&(1 \times 2^5) + (1 \times 2^4) + (0 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (1 \times 2^1) + (1 \times 2^0)\\ &= 32 + 16 + 0 + 0 + 2 + 1\\ &= (51)_{10}.\end{aligned}$$

Todas as operações aritméticas do sistema decimal (adição, subtração, multiplicação, divisão) podem ser executadas de modo totalmente análogo no sistema binário. Assim, por exemplo, na soma base 10 existe um “vai um” quando a soma dos números é maior ou igual a 10; na soma base 2 existe um “vai um” quando a soma é maior ou igual a 2. Esta correspondência é mostrada a seguir comparando a soma dos mesmos dois números em decimal e em binário.

Soma decimal (base 10)	Soma binária (base 2)
1	1111
27	11011
+ 14	+ 1110
41	101001

Conversão de Binário para Decimal Depois de bem entendida a representação dos números na base 2, é fácil converter os números binários nos equivalentes decimais: basta escrever o “significado” da sequência de bits e executar as operações usando a notação decimal comum. Tudo que é necessário para uma conversão rápida é conhecer

as potências de 2 envolvidas. Assim, por exemplo, $(1110110)_2$ representa o número decimal $64 + 32 + 16 + 4 + 2 = (118)_{10}$. A conversão é "automática", contanto que você conheça as potências de 2; se não conhecer, pode usar uma calculadora. (Talvez, por exemplo, você não saiba de cor quanto é 2^{13}, mas uma calculadora logo lhe dirá que é 8192 no sistema decimal.)

Conversão de Decimal para Binário A conversão no sentido oposto é um pouco mais delicada porque não estamos acostumados com a representação binária. Existe, porém, um algoritmo que podemos usar para facilitar o processo e que será descrito a seguir. Seja x um número inteiro no formato decimal. Nosso objetivo é determinar a representação de x no sistema binário, ou seja, encontrar bits ($b_n b_{n-1}$ … $b_1 b_0$) tais que

$$x = (b_n \times 2^n) + (b_{n-1} \times 2^{n-1}) + \cdots + (b_1 \times 2^1) + b_0.$$

Antes de apresentar o algoritmo, aqui estão algumas observações que ajudam a explicar como funciona:

- $b_0 = 0$ se x for par e $b_0 = 1$ se x for ímpar. Em outras palavras, b_0 é o resto da divisão de x por 2.
- *Conhecendo* b_0, é possível calcular b_1 repetindo o cálculo anterior para $(x - b_0)/2$.
- O processo continua, de modo análogo, até ser obtido o resultado final.

O algoritmo é o seguinte:

1. Dado um número inteiro x, faça $i = 0$ e $x_0 = x$.
2. Divida x_i por 2. Chame o quociente de x_{i+1} e o resto de b_i. Assim, $x_i = 2x_{i+1} + b_i$.
3. Se $x_{i+1} = 0$, pare.
4. Faça $i = i + 1$ e vá para instrução 2.

Exemplo 7.1 Conversão de Decimal para Binário

Converta o número decimal 109 para a forma binária.

Solução A tabela a seguir mostra os valores do quociente x_ie do resto b_i após cada passagem pelas quatro instruções do algoritmo.

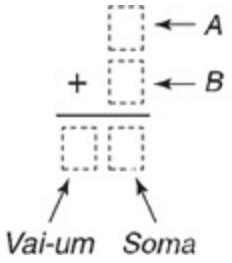
i	x_i	b_i
0	109	1
1	54	0
2	27	1
3	13	1
4	6	0
5	3	1
6	1	1
7	0	–

Assim, a representação de $(109)_{10}$ no sistema binário é 1101101.

7.3.4 Soma de Números Usando Chaves

O "truque" para somar números nos computadores digitais de hoje é muito diferente do "truque" usado na máquina de somar Burroughs: em vez de contar para somar números, os computadores usam a lógica para encontrar o resultado. Nesta seção, vamos primeiro definir um dispositivo chamado *meio somador*, baseado na lógica booleana, que pode ser usado para somar dois bits, e projetar um circuito com chaves para implementar esse dispositivo. Em seguida, vamos generalizar este resultado para projetar um circuito para somar números de qualquer tamanho, conhecido como *somador com vai-um propagado*.

Meio Somador Suponha que A e B sejam números de um bit, ou seja, 0 ou 1. Quando somamos A e B, podemos precisar de 2 bits para guardar o resultado, já que 2 na base 10 é igual a 10 na base 2. Vamos chamar o bit menos significativo do resultado de bit "soma" e o bit mais significativo de bit "vai-um", como na ilustração a seguir:



Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
0	0	1	1
+ 0	+ 1	+ 0	+ 1
00	01	01	10

Cada um dos quatro casos possíveis dá origem a um valor para o bit soma e um valor para o bit vai-um. Podemos reunir esses valores em duas tabelas de verdade:

A	*B*	Vai-um
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	*B*	Soma
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

O passo seguinte consiste em escrever expressões lógicas que produzam os valores de soma e de vai-um que aparecem nas tabelas de verdade. O bit “vai-um” é 1 apenas quando *A* é 1 e *B* também é 1. Assim,

$$\text{Vai-um} = A \text{ AND } B$$

A expressão lógica do bit soma é um pouco mais complicada. O bit soma é 1 quando *A* ou *B* é 1, mas não quando *A* e *B* são 1. Esta relação é conhecida como *ou exclusivo* ou XOR, e pode ser expressa em termos dos operadores AND, OR e NOT:

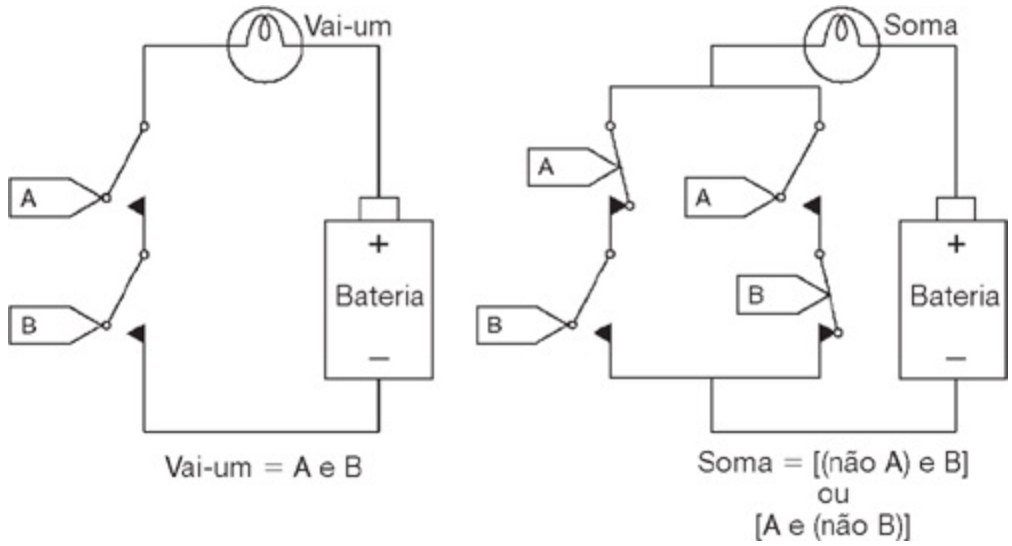


Figura 7.15 Implementação com chaves dos circuitos lógicos de vai-um e soma de um meio somador.

$$\begin{aligned}\text{Soma} &= A \text{ XOR } B \\ &= [(\text{NOT } A) \text{ AND } B)] \text{ OR } [A \text{ AND } (\text{NOT } B)]\end{aligned}$$

O passo final consiste em construir circuitos com chaves para implementar as expressões lógicas da soma e do vai-um. A Figura 7.15 mostra o resultado.

Somador com Vai-um Propagado Um meio somador sozinho não é muito útil. O que realmente queremos é um circuito que permita somar dois números com um número razoável de bits. A Figura 7.16 ilustra a *interface* de um somador de 4 bits, que mostra as entradas e saídas do dispositivo, mas não os detalhes de sua implementação. As entradas A e B do somador têm 4 bits cada uma; A_0 e B_0 são os bits menos significativos e A_3 e B_3 são os bits mais significativos. A soma S tem cinco bits, já que pode haver um vai-um na soma da última coluna.

A implementação mais comum de um somador para números com mais de um bit é o *somador com vai-um propagado*, que aparece na Figura 7.17. O somador com vai-um propagado é um circuito modular

que opera da mesma forma como somamos números no papel, coluna por coluna, do dígito menos significativo para o mais significativo, usando o "vai-um" sempre que necessário. Para construir um somador com vai-um propagado, precisamos de um módulo chamado *somador completo* para cada coluna. Esse tipo de módulo tem três entradas (os bits *A* e *B* da coluna e o vai-um da coluna anterior) e duas saídas (a soma e o vai-um). Como a coluna correspondente ao bit menos significativo não recebe um vai-um, podemos usar nessa coluna um meio somador, com apenas duas entradas. O somador com vai-um propagado tem esse nome por causa do modo como os bits de vai-um se "propagam" de módulo para módulo.

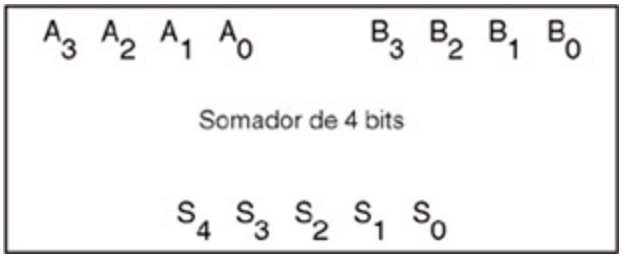


Figura 7.16 Somador de 4 bits.

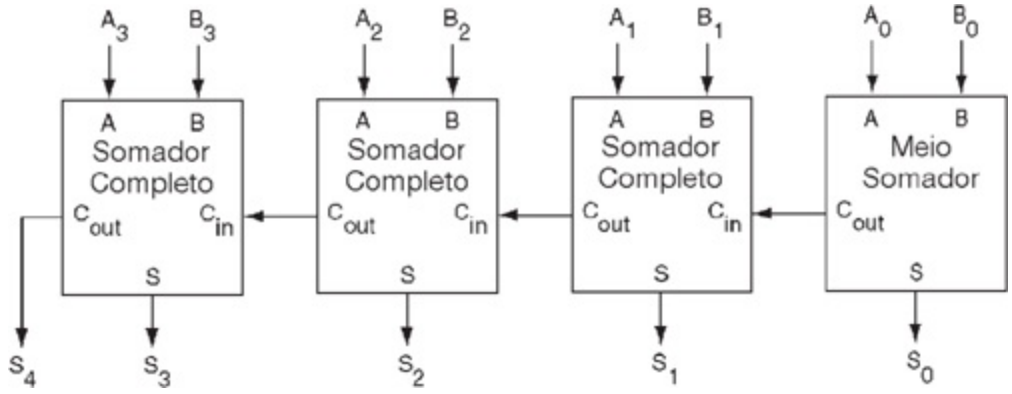


Figura 7.17 Somador com vai-um propagado.

Agora que temos a estrutura básica de um somador com vai-um propagado, o passo seguinte é implementar o circuito lógico correspondente. Começamos por construir uma tabela de verdade que expresse os valores da soma *S* e do vai-um de saída C_{out} para todas as combinações possíveis de A, *B* e o vai-um de entrada C_{in}:

A	B	C_{in}	C_{out}	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

A partir da tabela, podemos determinar expressões lógicas para C_{out} *e S:*

$$C_{out} = (A \text{ AND } B) \text{ OR } (A \text{ AND } C_{in}) \text{ OR } (B \text{ AND } C_{in})$$

$$s = A \text{ XOR } B \text{ XOR } C$$

$$= [(\text{NOT } A) \text{ AND } (\text{NOT } B) \text{ AND } C_{\text{in}}]$$
$$\text{OR } [(\text{NOT } A) \text{ AND } B \text{ AND } (\text{ NOT } C_{\text{in}})]$$
$$\text{OR } [A \text{ AND } (\text{NOT } B) \text{ AND } (\text{ NOT } C_{\text{in}})]$$
$$\text{OR } [A \text{ AND } B \text{ AND } C_{\text{in}}]$$

Deixamos como exercício para o leitor verificar que essas expressões estão corretas. Uma vez conhecidas essas expressões, o passo final é projetar um circuito com chaves para implementá-las. Isso também será deixado como exercício para o leitor.

7.4 CIRCUITOS DIGITAIS DO PONTO DE VISTA ELETRÔNICO

7.4.1 Eletricidade

Os gregos antigos observaram que, se esfregassem um pedaço de uma resina petrificada chamada âmbar (*elektron*, em grego) com uma pele de animal, o âmbar se tornava capaz de atrair objetos leves, como fios de cabelo. Hoje em dia, descrevemos essa atração em termos de

cargas elétricas. Como a massa, a carga é uma propriedade intrínseca dos corpos; não sabemos o que *é*, mas podemos distinguir dois tipos diferentes de carga, que chamamos de positiva e negativa, e dizemos que corpos com cargas de tipos diferentes se atraem e corpos com cargas do mesmo tipo se repelem, com uma força diretamente proporcional à quantidade de carga e inversamente proporcional à distância entre os corpos. Também dizemos que a carga, como a massa, é conservada; não pode ser criada nem destruída, apenas transportada de um local para outro ou transferida de um corpo para outro, como acontece quando esfregamos um pedaço de âmbar com uma pele de animal ou esfregamos os pés em um tapete felpudo.

Átomos e Cargas Elétricas De acordo com a teoria moderna, toda a matéria do universo é feita de átomos. Os átomos, por sua vez, são formados por um núcleo, constituído por prótons de carga positiva (e nêutrons sem carga elétrica), e uma nuvem de elétrons de carga negativa que envolve o núcleo. A unidade de carga é o *coulomb* (C); um próton tem uma carga de $1{,}6 \times 10^{-19}$C, enquanto um elétron tem uma carga de $-1{,}6 \times 10^{-19}$ C. Quando os átomos se unem para formar moléculas, compartilham os elétrons mais afastados do núcleo. Em alguns materiais, como o vidro, todos os elétrons estão presos firmemente aos átomos mais próximos e não podem sair do lugar. Nos metais, alguns elétrons não estão presos a um átomo em particular e podem vagar livremente pelo material, formando uma espécie de "mar" que ocupa o espaço entre os átomos. Graças a esses elétrons livres, os metais são bons *condutores* de eletricidade. Materiais como o vidro, por outro lado, não conduzem eletricidade e recebem o nome de *isolantes*.

Em 1746, na Universidade de Leyden, na Holanda, Pieter van Musschenbroek descobriu que era possível armazenar eletricidade (ele não pensava, como nós, em termos de cargas elétricas) em um tipo primitivo de capacitor chamado garrafa de Leyden. Quando

Benjamin Franklin empinou uma pipa durante uma tempestade em 1752 e armazenou uma descarga elétrica em uma garrafa de Leyden, mostrou que os relâmpagos eram uma manifestação do mesmo tipo de eletricidade que outros investigadores produziam nos laboratórios usando o atrito. Franklin considerava a eletricidade uma espécie de fluido cujo nível tendia a ser mantido em todos os materiais. Quando um material com um excesso de fluido, e, portanto, “positivo”, era posto em contato com um material com falta de fluido, e, portanto, “negativo”, a eletricidade passava de um material para o outro até que os dois estivessem com o mesmo nível de fluido. Embora hoje em dia a eletricidade seja encarada de outra forma, a terminologia de Franklin foi mantida, e ainda é útil usar a analogia do fluido para explicar os conceitos de circuito elétrico, corrente e tensão.

A Figura 7.18 mostra dois sistemas simples: um sistema hidráulico, do lado esquerdo, e um sistema elétrico, do lado direito. No sistema hidráulico, a água de um tanque passa por um cano e faz girar uma roda. No sistema elétrico, as cargas de uma bateria passam por um fio e fazem uma lâmpada acender. Na analogia, a carga positiva é análoga à massa da água. Quando se faz uma analogia, é importante reconhecer as limitações: afinal, a carga e a massa são grandezas físicas diferentes e não existem dois tipos diferentes de massa. Mesmo assim, as semelhanças entre os dois conceitos são tantas que a experiência com água corrente ajuda a compreender a ideia mais abstrata de corrente elétrica.

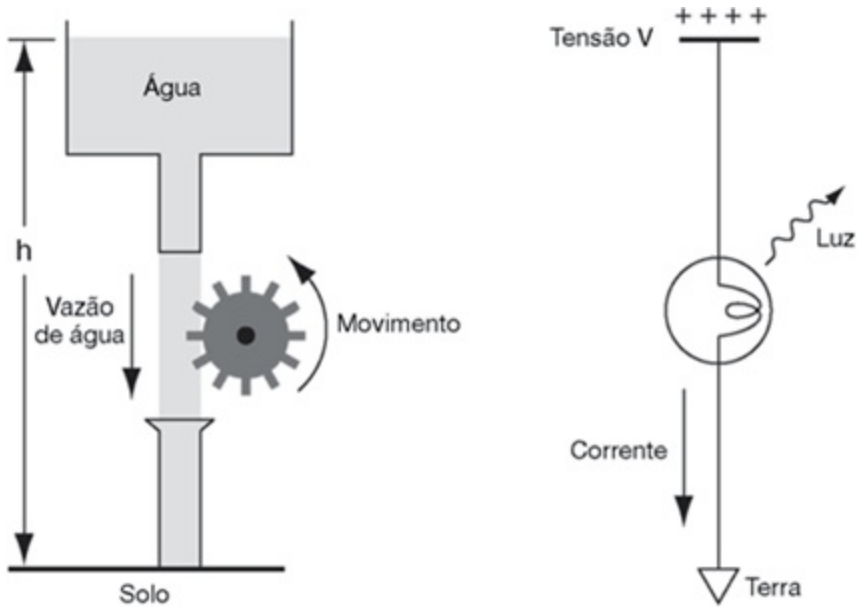


Figura 7.18 Dois circuitos: a água, ao passar por um cano, faz girar uma roda; a eletricidade, ao passar por um fio, acende uma lâmpada.

Energia e Tensão Os dois sistemas usam energia armazenada para realizar um trabalho útil, fazer girar uma roda no sistema hidráulico e acender uma lâmpada no sistema elétrico. Como foi discutido no Capítulo 4, a energia – como a massa e a carga – é uma grandeza física conservada, ou seja, que não pode ser criada nem destruída. Podemos adicionar energia a um sistema, ligando uma bateria a um circuito; a energia pode também deixar um sistema na forma de luz ou calor irradiado. Entretanto, se contabilizarmos a energia que entra, sai ou permanece em um sistema antes e depois de qualquer mudança, o total será sempre o mesmo.

No sistema hidráulico, a energia está armazenada inicialmente como *energia gravitacional*, na forma da água contida no tanque. Energia potencial gravitacional é a energia de um peso W mantido a uma certa altura acima do solo. Se a massa de água no tanque é m e a altura do tanque é h, a energia potencial gravitacional E_g é dada por

$$E_g = Wh$$
$$= (mg)h$$

onde g é a aceleração da gravidade.[4]

No sistema elétrico, a energia está armazenada inicialmente como *energia potencial elétrica* na forma da carga submetida a uma *tensão*, V. Se Q é a quantidade de carga, a energia potencial elétrica E_e *da carga* Q a uma tensão V é dada por

$$E_e = QV$$

É difícil encontrar uma grandeza mecânica que corresponda exatamente à tensão, e o fato de ser conhecida por vários nomes serve apenas para aumentar a confusão.[5] Vamos usar a analogia de que a tensão é semelhante à *elevação*, que está diretamente relacionada à altura do tanque de água. Quanto maior a altura do tanque, maior a vazão da água na saída do cano.

Tanto a elevação como a tensão são grandezas relativas; a elevação e a tensão são sempre medidas em relação a um ponto de referência. A elevação é frequentemente medida em relação ao nível do mar. Nos circuitos elétricos, a tensão costuma ser medida em relação à *terra*. Na maioria dos sistemas elétricos, a terra é definida como a tensão do "solo"; imagine simplesmente ligar um fio à terra do circuito e enterrar a outra ponta do fio no chão.

Corrente Como mostra a Figura 7.19, assim como a água corre de pontos altos para pontos baixos, a carga positiva sempre corre de pontos de alta tensão para pontos de baixa tensão (e a carga negativa corre no sentido oposto). Em um cano, o movimento da água pode ser descrito pela *vazão mássica*, que é medida em quilogramas por segundo (kg/s) e tem um sentido, que, no caso, é de cima para baixo. Em um fio, o movimento da carga pode ser descrito pela *corrente elétrica*, ou, simplesmente, corrente. A corrente é medida em *ampères* (A); um ampère corresponde a um movimento de carga de um coulomb por segundo. A corrente também tem um sentido, que, neste exemplo, também é de cima para baixo. Observe que estamos aplicando a convenção usual de que o sentido da corrente é o sentido

de movimento da carga *positiva*; os verdadeiros responsáveis pelo movimento da carga, que são os elétrons, têm carga negativa e, portanto, se movem no sentido oposto.

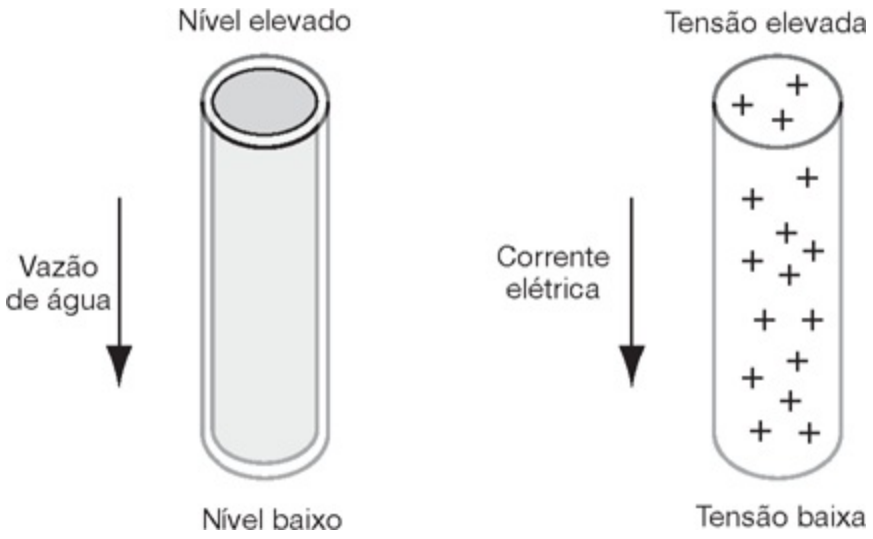


Figura 7.19 A água corre de pontos altos para pontos baixos; a carga elétrica corre de pontos de alta tensão para pontos de baixa tensão.

Potência, Resistência e Dissipação de Calor Quando fazemos a água se mover a partir de um tanque elevado, ou a carga se mover a partir de uma bateria, estamos transformando energia potencial em energia cinética. Quando a água passa pela roda, parte da energia é convertida em rotação da roda (que, por sua vez, pode ser usada para mover uma máquina). Analogamente, quando a corrente elétrica passa pela lâmpada, aquece o filamento, fazendo com que este emita luz. Quando deixamos o sistema operar durante algum tempo, constatamos o uso de certa quantidade de energia do reservatório, na forma de água, no caso do tanque; e na forma de carga, no caso da bateria. A taxa com a qual a energia é usada recebe o nome de *potência consumida*. Podemos calcular a potência consumida medindo a quantidade de energia utilizada e dividindo esse valor pelo intervalo de tempo correspondente:

$$\text{Potência consumida} = \frac{\text{Energia consumida da fonte}}{\text{Intervalo de tempo}}$$

No sistema elétrico, energia é igual à carga vezes tensão. Assim, a potência consumida pode ser expressa na forma

$$\text{Potência elétrica consumida} = \frac{(Q \text{ em coulombs})\,(V \text{ em volts})}{(t \text{ em segundos})}$$

e é medida em watts (W); 1 watt corresponde ao uso de energia de um joule por segundo. Como a quantidade de carga que atravessa um circuito por unidade de tempo é a corrente elétrica, a potência elétrica é igual à corrente vezes a tensão:

$$\text{Potência elétrica consumida} = (\text{I em ampères})\,(\text{V em volts}) \qquad (7.1)$$

Parte da energia recebida da fonte de alimentação é usada para realizar trabalho “útil”, como a rotação da roda e a produção de luz. Outra parte da energia, porém, é desperdiçada. Quando a roda está girando, existe um atrito no eixo da roda. Esse atrito produz calor, que é uma forma de perda de energia. Analogamente, nem toda a energia consumida pela lâmpada é usada para produzir luz visível; na verdade, em uma lâmpada incandescente típica, apenas cerca de 10% da energia é transformada em luz visível, e o resto é perdido na forma de calor.

O atrito no eixo da roda e a geração de calor pelo filamento da lâmpada não são as únicas formas de desperdício de energia nos dois sistemas. No sistema hidráulico, existe um atrito no interior do cano que se opõe à passagem da água. Esse atrito, que depende do diâmetro e do comprimento do cano, seria ainda maior se o interior estivesse parcialmente obstruído, com cascalho, por exemplo. Analogamente, existe uma espécie de “atrito” no interior do fio, chamado *resistência*, que se opõe à passagem da corrente. A unidade de resistência elétrica é o ohm (Ω). Como mostra a Figura 7.20, da mesma forma como o atrito em um cano cheio de cascalho resulta de colisões entre as moléculas de água e o cascalho, a resistência em um fio resulta de colisões entre os elétrons e os íons positivos do metal,

que são produzidos quando os elétrons responsáveis pela corrente se separam dos átomos do metal.

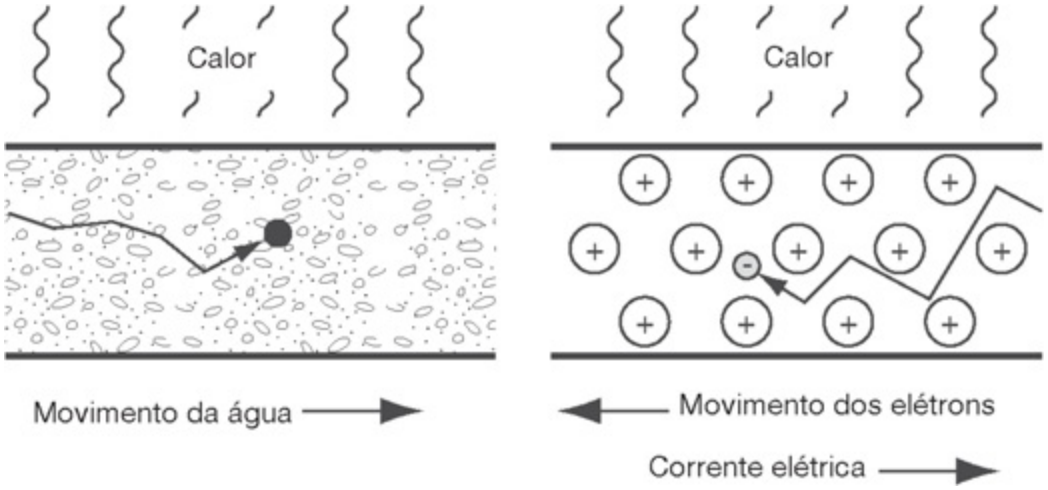


Figura 7.20 Resistência elétrica. Em um cano cheio de cascalho, as moléculas de água colidem com o cascalho, e o atrito resultante dificulta a passagem da água e produz calor. Em um fio, os elétrons negativamente carregados colidem com os íons do metal, positivamente carregados, e a interação resultante dificulta a passagem da corrente e produz calor. Observe que o sentido da corrente elétrica é, por convenção, o sentido oposto ao do movimento dos elétrons.

Assim como o atrito no interior de um cano depende de suas dimensões, a resistência de um fio depende de suas dimensões e do material de que é feito. Quanto mais comprido é um fio, maior é a resistência; quanto maior a área da seção reta, menor a resistência. Assim, analogamente ao que acontece com os canos, fios curtos e grossos têm baixa resistência, e fios compridos e finos têm alta resistência. Na maioria dos casos, a resistência de um fio é diretamente proporcional ao comprimento e inversamente proporcional à área da seção reta. No caso de um fio de comprimento L, largura W e espessura t, a resistência Ré dada por

$$R = \rho \frac{L}{Wt}, \qquad (7.2)$$

onde ρ é uma constante, conhecida como *resistividade*, que depende apenas do material do fio. A Figura 7.21 ilustra esta relação, e o

Exemplo 7.2 mostra o cálculo da resistência de um fio em um circuito integrado.

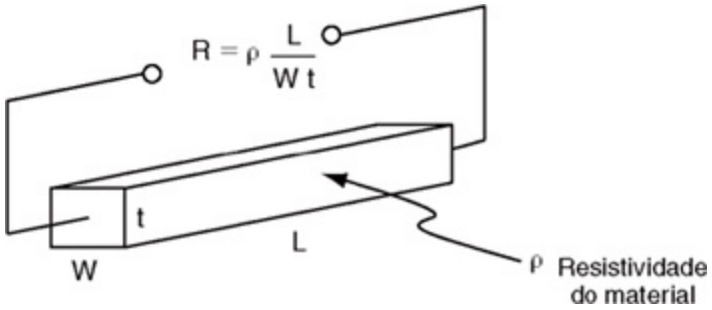


Figura 7.21 Resistência de um fio de comprimento L, largura W, espessura t e resistividade ρ.

Exemplo 7.2 Resistência de um Fio em um Circuito Integrado

Um fio de metal tem o mesmo comprimento que um circuito integrado, 15 mm. O fio tem 150 nm de largura e 200 nm de espessura. Qual é a resistência do fio se ele é feito de alumínio? Qual é a resistência se ele é feito de cobre? A resistividade do alumínio é $2{,}8 \times 10^{-8}\ \Omega$m e a resistividade do cobre é $1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega$m.

Solução Neste problema,

$$L = 15 \times 10^{-3}\ \text{m}\ W = 150 \times 10^{-9}\ \text{m}\ t = 200 \times 10^{-9}\text{m}\ \rho_{\text{Al}} = 2{,}8 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}\ \rho_{\text{Cu}} = 1{,}7 = 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$$

Se o fio é de alumínio, a resistência é

$$\begin{aligned} R_{\text{Al}} &= \rho_{\text{Al}} \frac{L}{Wt} \\ &= 2{,}8 \times 10^{-8} \frac{15 \times 10^{-3}}{(150 \times 10^{-9})(200 \times 10^{-9})} \\ &= 14\ \text{k}\Omega \end{aligned}$$

Se o fio é de cobre, a resistência é

$$\begin{aligned} R_{\text{Cu}} &= \rho_{\text{Cu}} \frac{L}{Wt} \\ &= 1{,}7 \times 10^{-8} \frac{15 \times 10^{-3}}{(150 \times 10^{-9})(200 \times 10^{-9})} \\ &= 8{,}5\ \text{k}\Omega \end{aligned}$$

Observe que esses valores de resistência são bastante elevados. Na prática, os fios usados em circuitos integrados são muito mais curtos.

Quedas de Tensão e a Lei de Ohm Quando a água está correndo por um cano, qualquer atrito ou obstrução provoca uma queda de pressão. Para se convencer de que isto é verdade, pense no que acontece quando você abre parcialmente uma torneira; embora a pressão no interior do cano seja elevada, a água sai com baixa pressão. Analogamente, quando uma corrente elétrica atravessa um material, a resistência do material provoca uma queda de tensão. A relação entre tensão, corrente e resistência é chamada de Lei de Ohm, em homenagem ao físico alemão Georg Ohm, que descobriu esta relação em 1827. De acordo com a Lei de Ohm, a queda de tensão produzida por uma resistência é igual ao produto da corrente pela resistência:

$$\text{Lei de Ohm } V = IR$$

A Lei de Ohm é um exemplo de "lei limitada". Ela não *garante* que a corrente em *qualquer* dispositivo é proporcional à tensão; apenas afirma que isso acontece nos fios e outros dispositivos puramente resistivos. Na verdade, a Lei de Ohm pode ser vista como a definição de um elemento dos circuitos conhecido como resistor: um dispositivo no qual a corrente é proporcional à tensão, com uma constante de proporcionalidade R. Leis como a Lei de Ohm, que definem o comportamento de um certo tipo de componente, são conhecidas como *relações constitutivas*.

É importante reconhecer que existe uma grande variedade de dispositivos elétricos que *não obedecem* à Lei de Ohm. Um desses dispositivos é o diodo, cujo comportamento é análogo ao de uma válvula, pois deixa a corrente passar apenas em um sentido. A Figura 7.22 mostra os gráficos da corrente em função da tensão de um resistor e de um diodo, juntamente com os símbolos dos dois

dispositivos. A curva característica corrente-tensão ou curva IV de um resistor é uma linha reta de inclinação $1/R$. A curva IV de um diodo não se parece com uma reta: quando a tensão é negativa, a corrente é quase zero; quando a tensão é positiva, a corrente aumenta exponencialmente, e não linearmente, com a tensão.

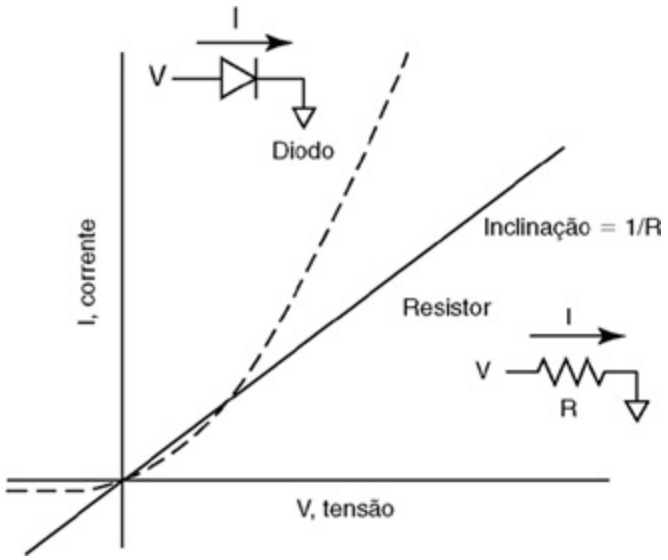


Figura 7.22 Curvas características da corrente em função da tensão para um resistor ideal e um diodo. O resistor obedece à Lei de Ohm, mas o mesmo não acontece com o diodo.

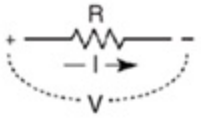
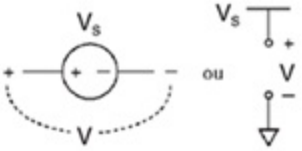
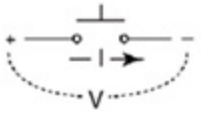
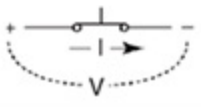
7.4.2 Dispositivos Elétricos

Já falamos de vários dispositivos elétricos, como o fio, a bateria, a lâmpada, o resistor e o diodo. Cada um desses dispositivos tem uma aplicação diferente e apresenta um comportamento diferente quando é atravessado por uma corrente ou submetido a uma tensão. Existem muitos outros tipos de dispositivos elétricos, mas, em nossa análise, vamos precisar de apenas três componentes *ideais*: o resistor, a fonte de tensão e a chave. Chamamos esses componentes de ideais porque as "leis" que descrevem o seu comportamento são modelos teóricos simplificados. Esses modelos podem ser usados separadamente ou podem ser combinados para representar outros dispositivos. Assim, por exemplo, do ponto de vista do cálculo das correntes e tensões em

um circuito, uma lâmpada às vezes pode ser modelada por um resistor; um dispositivo usado nos circuitos eletrônicos digitais, conhecido como transistor, pode ser modelado por uma chave e um resistor.

Resistor, Fonte de Tensão e Chave A Tabela 7.1 mostra os símbolos esquemáticos e as relações constitutivas (valores de corrente e/ou tensão) dos três componentes ideais que serão usados em nossos modelos. Já descrevemos o resistor; sua relação constitutiva é a Lei de Ohm. Uma fonte de tensão é uma bateria ideal; sua relação constitutiva estabelece que a tensão entre seus terminais é constante. Uma chave pode estar aberta ou fechada. Quando está aberta, a corrente que a atravessa é zero. Quando está fechada, a tensão entre seus terminais é zero.

TABELA 7.1 Três componentes ideais dos circuitos

Elemento	Símbolo	Relação Constitutiva (corrente e tensão)
Resistor		$V = IR$
Fonte de tensão		$V = V_s$
Chave (aberta)		$I = 0$
Chave (fechada)		$V = 0$

O MOSFET: Uma Chave Eletrônica Os primeiros circuitos lógicos digitais, construídos no final da década de 1930 e início da década de 1940, usavam relés eletromecânicos desenvolvidos originalmente

para aplicação na rede telefônica. Como mostra a Figura 7.23, um relé é formado por uma peça móvel, uma peça fixa, uma mola e um eletroímã, e dispõe de três contatos, ou terminais, que podemos chamar de “fonte”, “dreno” e “porta”. Quando uma tensão é aplicada à porta, o eletroímã produz um campo magnético que atrai a peça móvel, que encosta na peça fixa, permitindo que a corrente passe da “fonte” para o “dreno”. Quando a tensão é removida da porta, o eletroímã deixa de atrair a peça móvel e esta é puxada pela mola para a posição inicial, interrompendo o circuito.

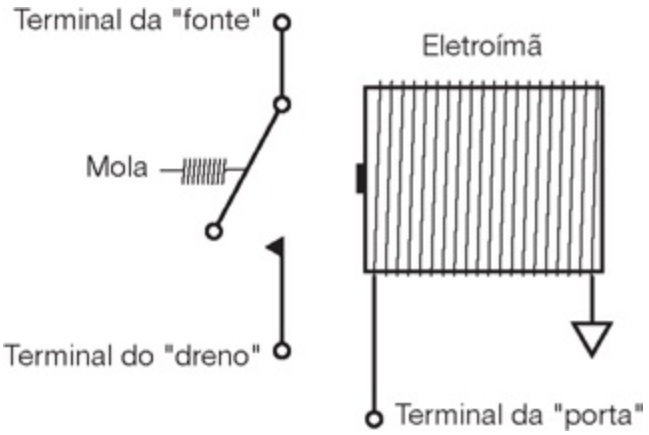


Figura 7.23 Um relé eletromecânico.

Em menos de 20 anos, os relés foram substituídos por válvulas eletrônicas; mais tarde, as válvulas foram substituídas por transistores. Desde que Bardeen e Brattain construíram o primeiro transistor de germânio em 1947, muitos tipos diferentes de transistores foram fabricados. Hoje em dia, a grande maioria dos circuitos integrados digitais utiliza um dispositivo chamado *MOSFET* (*metal-oxide-semiconductor, field-effect transistor*, ou seja, transistor de efeito de campo metal-óxido-semicondutor), feito de silício. A Figura 7.24 mostra o símbolo do MOSFET. Como o relé eletromecânico, o MOSFET possui três terminais: a porta, a fonte e o dreno. A corrente entre a fonte e o dreno é controlada pela tensão da porta.

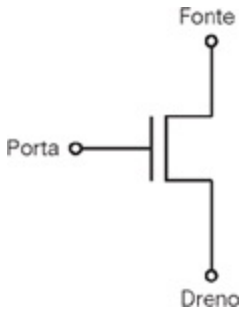


Figura 7.24 Símbolo do MOSFET.

A Figura 7.25 mostra a estrutura interna de um MOSFET. Como se pode ver na vista de perfil, a parte central do dispositivo tem três camadas. A camada de cima é feita de polissilício, uma forma de silício "dopado" para conduzir como um metal; a camada do meio é feita de dióxido de silício (o principal componente do vidro); a camada de baixo é feita de silício. Nas duas extremidades do dispositivo, outro elemento, em geral o fósforo, é implantado no silício. Como o relé eletromecânico, o MOSFET possui três terminais, fonte, dreno e porta, ligados a fios metálicos de alumínio ou cobre. O MOSFET tem duas dimensões de interesse: o comprimento *L*, que é a distância entre a fonte e o dreno, e a largura *W*, que é a largura das regiões da fonte e do dreno.

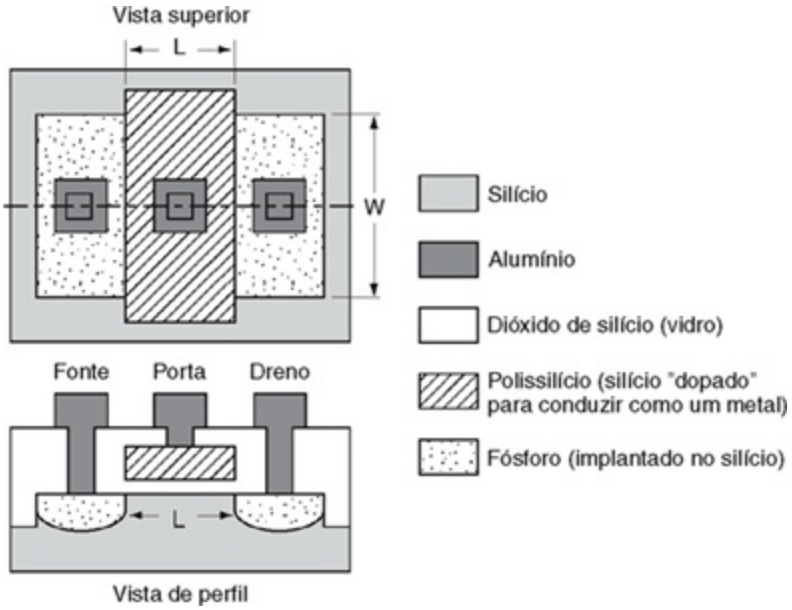


Figura 7.25 MOSFET visto de cima e de perfil.

Discutir aqui em detalhes o princípio de funcionamento de um MOSFET está fora do escopo deste livro, mas podemos explicar a operação do dispositivo, de forma qualitativa, usando o modelo mostrado na Figura 7.26. Nos dois diagramas da Figura 7.26, o terminal do dreno do MOSFET está ligado a uma fonte de tensão e o terminal da fonte está ligado à terra. No diagrama da esquerda, a porta está ligada à terra e a região de silício entre a fonte e o dreno funciona como um isolante, de modo que não há corrente entre a fonte e o dreno. Quando a porta é ligada a uma fonte de tensão, como no diagrama da direita, elétrons são atraídos para perto da porta, formando um canal condutor entre a fonte e o dreno. Isso equivale a fechar a chave, pois permite que elétrons passem da fonte para o dreno (e que, portanto, uma corrente, definida como um movimento de carga positiva, passe do dreno para a fonte).

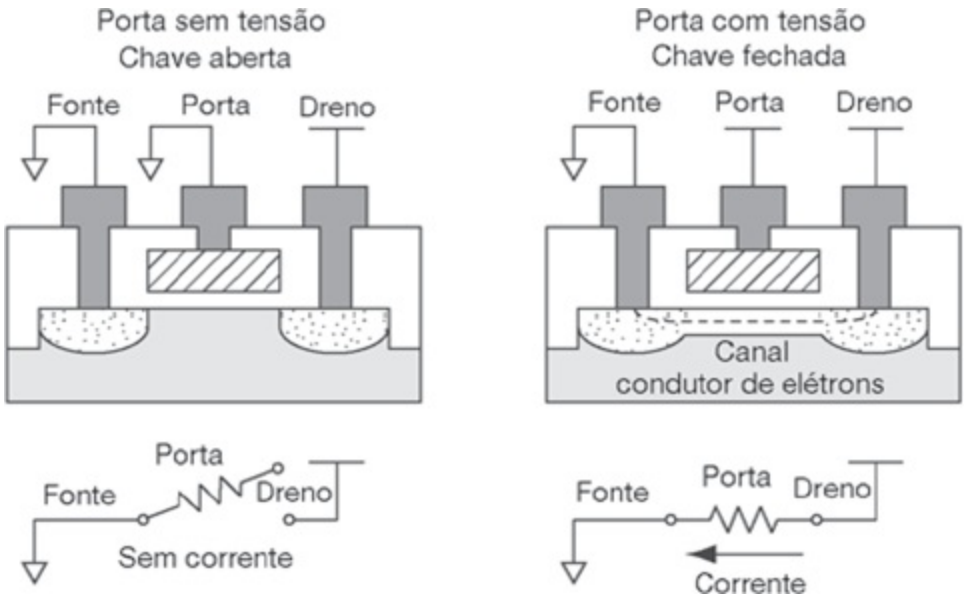


Figura 7.26 Quando a tensão aplicada à porta de um MOSFET ultrapassa um certo valor, passa a existir uma corrente entre fonte e dreno.

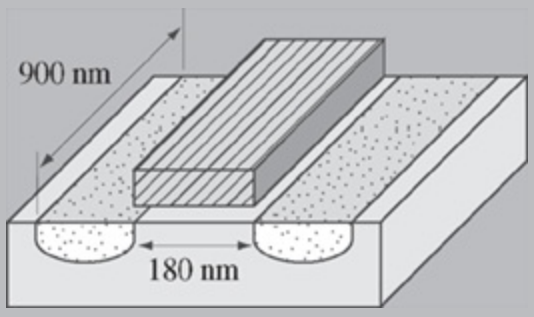
O canal que se forma entre a fonte e o dreno de um MOSFET quando uma tensão é aplicada à porta não é um condutor perfeito. A física do que realmente acontece no canal é complicada demais para ser discutida aqui, mas, para nossos propósitos, podemos modelar o

canal como associação de uma chave e um resistor, conforme mostra a Figura 7.26. Como fizemos com o fio da Figura 7.21 e da Equação (7.2), podemos representar o canal como uma barra com comprimento L igual à distância entre a fonte e o dreno, uma largura W igual à largura da fonte e do dreno, e uma espessura t igual à espessura do canal. A espessura do canal é da ordem de 5 nm, e a resistividade ρ do canal depende da tensão aplicada à porta. O Exemplo 7.3 ilustra o cálculo da resistência de um MOSFET usando este modelo simples.

Exemplo 7.3 Resistência de um MOSFET

Um MOSFET tem um comprimento, da fonte ao dreno, de 180 nm e uma largura de 900 nm, como mostra a figura. Se o canal tem uma espessura de 5 nm quando o MOSFET está conduzindo e a resistividade efetiva do canal é 3×10^{-5} Ωm, qual é a resistência do canal?

Se quisermos mudar a resistência do MOSFET para 600 Ω sem mudar a distância entre a fonte e o dreno, qual terá que ser a nova largura?



Solução Podemos usar a Equação (7.2) para calcular a resistência do canal a partir das dimensões e da resistividade:

$$\begin{aligned} R &= \rho \frac{L}{Wt} \\ &= (3 \times 10^{-5}) \frac{180 \times 10^{-9}}{(900 \times 10^{-9})(5 \times 10^{-9})} \\ &= 1{,}2\ \text{k}\Omega \end{aligned}$$

Para mudar a resistência para 600, basta dobrar a largura para 1800 nm.

7.4.3 Circuitos Elétricos

Ligando dispositivos elétricos de várias formas, podemos montar sistemas elétricos capazes de desempenhar muitas funções diferentes, desde receber sinais de rádio até somar números. Os sistemas formados por dispositivos elétricos são chamados de *circuitos*. A Figura 7.27 mostra o desenho simplificado de um circuito, chamado *diagrama esquemático*, que usaremos para definir alguns termos. Todo circuito é formado por um conjunto de *ramos* ligados entre si em pontos chamados *nós*. Como o leitor talvez tenha percebido, o diagrama esquemático de um circuito é um caso especial de um diagrama conhecido como *grafo*, definido no Capítulo 1. Neste caso, as arestas do grafo são os ramos. Cada ramo do circuito representa um dispositivo elétrico com dois fios ideais (sem resistência) nas extremidades, que podem ser ligados a outros dispositivos. Na Figura 7.27, os nós foram representados por pontos. Uma regra para montar circuitos é que todo nó deve estar ligado a dois ou mais ramos. Em muitos diagramas esquemáticos, os pontos correspondentes aos nós não são desenhados; nesse caso, os nós são simplesmente os pontos do circuito que estão ligados a dois ou mais ramos. O circuito da Figura 7.27 possui cinco ramos, b_1, b_2, b_3, b_4 e b_5, e quatro nós, n_0, n_1, n_2 e n_3. Um dos nós de um circuito é sempre chamado de terra; se os nós são numerados, o nó terra é sempre o nó 0.

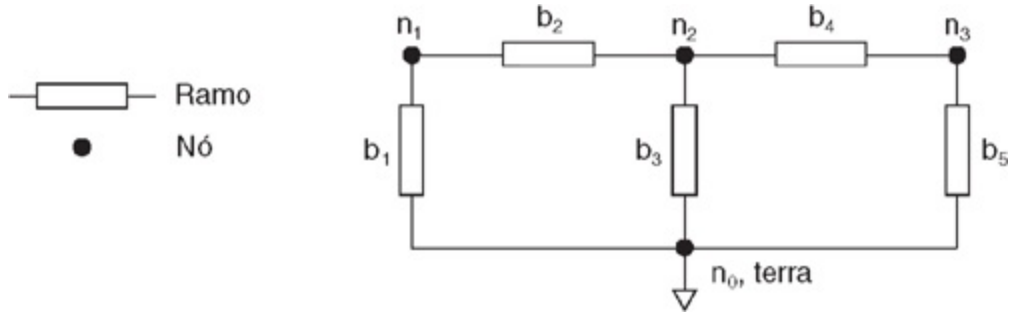


Figura 7.27 Diagrama esquemático de um circuito.

A Figura 7.28 mostra dois diagramas esquemáticos equivalentes de uma lanterna. O circuito contém uma chave, uma fonte de tensão e

uma lâmpada modelada por um resistor, formando uma malha. Quando a chave é fechada, uma corrente atravessa o circuito e faz a lâmpada acender. Embora o diagrama da direita não se pareça com uma malha, observe que, no símbolo alternativo da fonte de tensão, a barra da extremidade superior do diagrama e o triângulo da extremidade inferior fazem parte do mesmo símbolo.

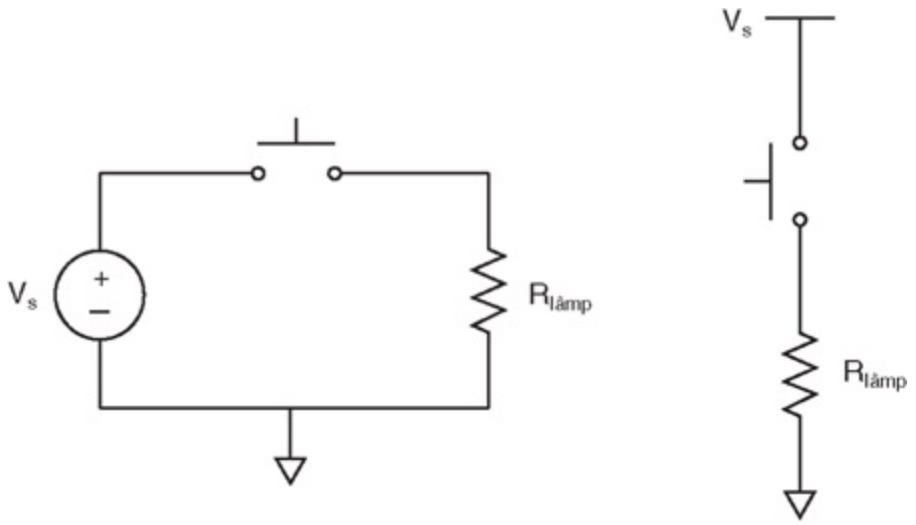


Figura 7.28 Dois circuitos equivalentes de uma lanterna.

As Leis de Kirchhoff e as Relações entre Correntes e Tensões em um Circuito Um passo importante de quase todo problema de projeto de circuitos elétricos é analisar o circuito para determinar as tensões dos nós e as correntes nos ramos. As relações constitutivas dos ramos, como a Lei de Ohm para resistores, fornecem algumas (mas não todas) informações necessárias para essa análise. Considere, por exemplo, o circuito da Figura 7.29. Suponha que estamos interessados em determinar a tensão do nó n_2. Se conhecêssemos a corrente I_2 no resistor R_2, poderíamos calcular a tensão entre os terminais de R_2 usando a Lei de Ohm, e isso nos daria a tensão de n_2, já que o outro terminal de R_2 está ligado à terra, cuja tensão, por definição, é 0 V. O problema é que não conhecemos a corrente em R_2. Além disso, como passa em R_1 antes de chegar a R_2, a corrente I_2 depende dos valores

dos dois resistores. Em outras palavras, neste circuito, “tudo depende de tudo” e precisamos de outras informações para chegar a uma conclusão.

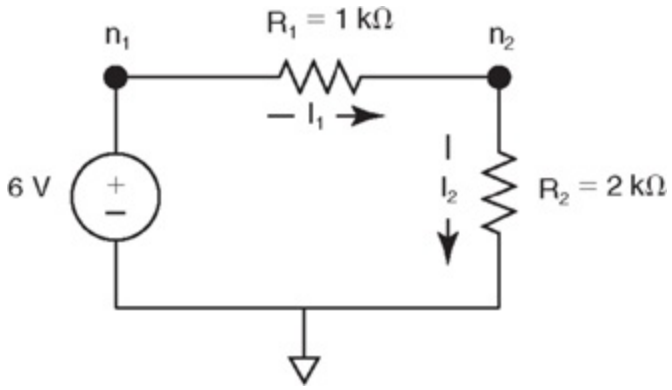


Figura 7.29 Um circuito com dois resistores em série. A corrente I_1 em R_1 deve afetar, de algum modo, a corrente I_2 em R_2.

Até agora, não consideramos em nossa análise duas leis importantes: a Lei de Conservação da Carga e a Lei de Conservação da Energia. De acordo com a Lei de Conservação da Carga, a carga não pode ser criada nem destruída. Vamos analisar de novo a situação do nó n_2 com esse fato em mente. A corrente I_1 entra no nó e a corrente I_2 sai do nó. Suponha que I_1 fosse menor que I_2. Para que isso fosse verdade, uma certa quantidade de carga teria que ser criada no nó n_2, o que é impossível, de acordo com a Lei de Conservação da Carga. Da mesma forma, se I_1 fosse maior que I_2, uma certa quantidade de carga teria que ser destruída no nó, o que também é impossível. A única forma de tornar possível uma dessas situações seria armazenar no nó o excesso de carga e liberá-lo mais tarde. Entretanto, os nós não funcionam desta forma; pense na analogia com um cano d’água. Se a água entrasse em um cano com uma vazão maior que a vazão de saída na outra extremidade, a pressão no interior do cano aumentaria até o cano estourar. Assim, de acordo com a Lei de Conservação da Carga, a corrente I_1 que entra no nó deve ser igual à corrente I_2 que sai do nó.

Esta observação, que é uma consequência da Lei de Conservação da Carga, é conhecida como *Lei das Correntes de Kirchhoff*. Seu enunciado é o seguinte:

> **Lei das Correntes de Kirchhoff (LCK)** A soma das correntes que entram em um nó é sempre igual à soma das correntes que saem do nó. Alternativamente, se consideramos as correntes que entram no nó como positivas e as correntes que saem do nó como negativas, a soma de todas as correntes que entram e saem de um nó é zero.

Kirchhoff propôs uma segunda lei, que é uma consequência da Lei de Conservação da Energia, conhecida como Lei das Tensões de Kirchhoff. Seu enunciado é o seguinte:

> **Lei das Tensões de Kirchhoff (LTK)** Em todas as malhas fechadas de um circuito, a soma das quedas de tensão nos ramos do circuito é igual à soma dos ganhos de tensão. Alternativamente, se consideramos os ganhos de tensão como positivos e as quedas de tensão como negativas, a soma de todos os ganhos e quedas de tensão em uma malha fechada é zero.

Para termos uma ideia de como funciona a LTK, consideremos novamente o circuito da Figura 7.29. O circuito contém apenas uma malha fechada, que vamos percorrer, a partir da terra, no sentido horário. O primeiro ramo que encontramos é a fonte de tensão, que nos leva a n_1. A fonte produz um ganho de tensão de 6 V. Em seguida, passamos por R_1 para chegar a n_2 e passamos por R_2 para chegar à terra, completando o percurso. Como existe uma corrente (desconhecida) na malha, existem quedas de tensão nos dois resistores. Ainda não sabemos os valores dessas quedas, mas, de acordo com a LTK, a soma deve ser igual a 6 V. Para compreender por que isto é uma consequência da Lei de Conservação da Energia, imagine um pacote de carga Q circulando na malha. Com o ganho de tensão introduzido pela fonte de tensão, a energia potencial do pacote aumenta e a cada queda de tensão produzida pelos resistores, a energia potencial do pacote diminui. Como a energia não pode ser criada nem destruída, a energia do pacote ao chegar de volta à terra

deve ser igual à energia inicial; portanto, a soma dos ganhos e quedas de tensão ao longo da malha deve ser zero.

Cálculo das Correntes e Tensões em um Circuito Usando o Método dos Nós Armados com as Leis de Kirchhoff e com as relações constitutivas dos ramos (como a Lei de Ohm), estamos em condições de calcular as correntes e tensões em qualquer circuito. Na verdade, precisamos apenas de *uma* das Leis de Kirchhoff, a LCK ou a LTK, e das relações constitutivas dos ramos; não há necessidade de aplicar as duas leis. Nos cursos introdutórios de análise de circuitos, os alunos são ensinados a trabalhar com as duas leis e a reconhecer qual das duas conduz a um sistema de equações mais simples para o circuito que está sendo analisado. Quando usamos um computador para resolver as equações, porém, não é tão importante descobrir a abordagem mais simples para um *dado* circuito do que usar um método que possa ser aplicado de forma confiável a *qualquer* circuito. Em geral, é mais fácil definir um sistema de equações usando a Lei das Correntes de Kirchhoff, já que é mais fácil localizar os nós de um circuito do que localizar as malhas. Esta formulação das equações de um circuito é chamada de *método dos nós*. Neste método, as equações do circuito são obtidas da seguinte forma:

1. As incógnitas são as tensões dos nós e as correntes nos ramos. Se um circuito possui n nós (sem contar a terra) e r ramos, existe um total de $n + r$ incógnitas.
2. Para cada nó, exceto a terra, aplicamos a Lei das Correntes de Kirchhoff, fazendo a soma das correntes, que entram no nó e saem do nó, igual a zero, o que nos dá n equações.
3. Para cada ramo, usamos uma relação constitutiva para expressar a relação entre as tensões dos nós que ficam nas extremidades do ramo e a corrente que o atravessa. Com isso, obtemos r equações, que, combinadas com as n equações obtidas no passo

anterior, nos dão um total de $n + r$ equações, um número igual ao número de incógnitas.

A título de exemplo, vamos analisar o mesmo circuito com dois resistores em série, repetido na Figura 7.30 para mostrar as incógnitas do problema. Observe que os sentidos das correntes, indicados por setas, foram escolhidos arbitrariamente; se o sentido verdadeiro for o sentido oposto, a corrente calculada terá sinal negativo. Para começar, fazemos uma lista das incógnitas:

$$\begin{aligned} &\text{Tensões dos nós:} && v_1 && v_2 \\ &\text{Correntes nos ramos:} && I_s && I_1 && I_2 \end{aligned}$$

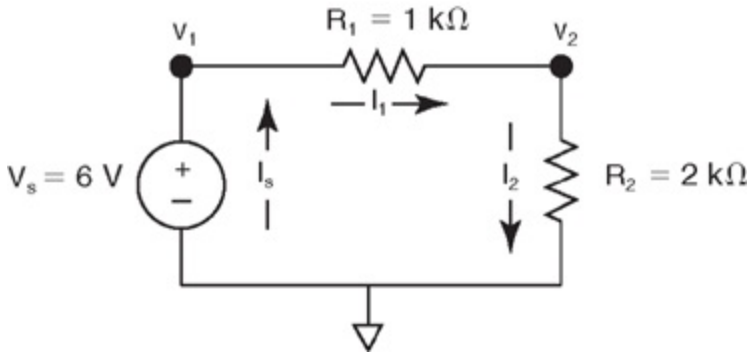


Figura 7.30 Exemplo de análise de um circuito usando o método dos nós.

Em seguida, escrevemos as equações da LCK para cada nó, fazendo a soma das correntes que entram no nó e saem do nó igual a zero:

$$\begin{aligned} &\text{LCK para o nó 1:} && I_s - I_1 = 0 \\ &\text{LCK para o nó 2:} && I_1 - I_2 = 0 \end{aligned}$$

A seguir, escrevemos as relações constitutivas (RC) para cada ramo:

$$\begin{aligned} &\text{RC para } V_s\text{:} && v_1 - 0 = V_s \\ &\text{RC para } R_1\text{:} && v_1 - v_2 = I_1 R_1 \\ &\text{RC para } R_2\text{:} && v_2 - 0 = I_2 R_2 \end{aligned}$$

Isso nos dá um sistema de 5 equações com 5 incógnitas. Existem muitos programas de computador para resolver problemas como este,

e vamos mostrar como resolver um sistema de equações com o MATLAB no Capítulo 11. O sistema que estamos examinando, porém, é fácil de resolver manualmente.

Para começar, de acordo com a equação do primeiro nó, $I_1 = I_s$, e de acordo com a equação do segundo nó, $I_2 = I_1$. Assim, podemos expressar todas as correntes nos ramos em termos de I_s:

$$I_2 = I_1 = I_s$$

A RC da fonte de tensão nos dá $v_1 = V_s$. Substituindo este valor e os valores de I_1 e I_2 em termos de I_s nas outras duas relações constitutivas, obtemos um sistema de 2 equações com 2 incógnitas, I_s e v_2:

$$\begin{aligned} V_s - v_2 &= R_1 I_s \\ v_2 &= R_2 I_s \end{aligned}$$

Substituindo v_2 por $R_2 I_s$ na primeira equação e explicitando I_s, obtemos:

$$\begin{aligned} I_s &= \frac{V_s}{R_1 + R_2} \\ &= \frac{6}{1000 + 2000} \\ &= 2\,\text{mA} \end{aligned}$$

Substituindo I_s por $V_s/(R_1 = R_2)$ na segunda equação, obtemos

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{V_s R_2}{R_1 + R_2} \\ &= \frac{(6)(2000)}{1000 + 2000} \\ &= 4\,\text{V} \end{aligned} \qquad (7.3)$$

Assim, os valores das tensões dos nós e das correntes nos ramos são

Tensões dos nós: $v_1 = 6$ V $v_2 = 4$ V
Correntes nos ramos: $I_s = 2$ mA $I_1 = 2$ mA $I_2 = 2$ mA

O Divisor de Tensão O circuito que acabamos de discutir, além de muito simples, é um dos mais úteis da eletrônica. O passo final da análise, Equação (7.3), permite calcular a tensão entre os dois resistores a partir da tensão da fonte e dos valores dos resistores. Escolhendo valores adequados para os resistores, podemos estabelecer para esta tensão a fração que desejarmos da tensão V_s da fonte. Por este motivo, o circuito é conhecido como *divisor de tensão.*

A Figura 7.31 mostra a análise de um divisor de tensão. O resistor ligado entre a saída e V_s é chamado de *resistor pull-up*, R_{up}, e o resistor ligado entre a saída e a terra é chamado de *resistor pull-down*, R_{down}. A tensão do nó que fica entre os dois resistores em relação à terra, V_{mid}, é igual à queda de tensão no resistor *pull-down*, V_{down}. Generalizando a Equação (7.3), esta tensão é dada por

$$V_{\text{mid}} = V_{\text{down}} = V_s \frac{R_{\text{down}}}{R_{\text{up}} + R_{\text{down}}} \qquad (7.4)$$

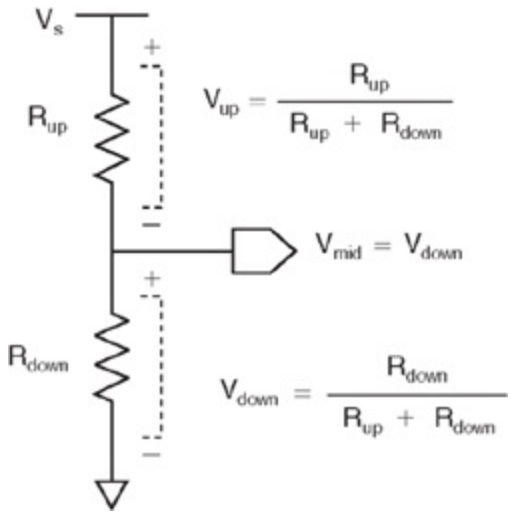


Figura 7.31 Divisor de tensão.

A tensão entre os terminais do resistor *pull-up*, V_{up}, é dada por

$$V_{\text{up}} = \frac{R_{\text{up}}}{R_{\text{up}} + R_{\text{down}}} \qquad (7.5)$$

Em outras palavras, a queda de tensão em cada resistor é igual à

tensão da fonte multiplicada pela razão entre a resistência do resistor e a resistência total, $R_{up} + R_{down}$.

Os projetistas de circuitos usam divisores de tensão para obter tensões menores a partir de tensões maiores. A Figura 7.32 mostra um dispositivo chamado *potenciômetro*, usado como controle de volume nos antigos receptores de rádio. O potenciômetro contém uma placa curva, na qual foi depositada uma película de carbono que se comporta como um resistor, e um cursor, movimentado por um botão, que faz contato com um ponto qualquer da película de carbono. Uma das extremidades da placa é ligada a uma fonte de tensão, e a outra extremidade é ligada à terra. O cursor se comporta como o nó intermediário de um divisor de tensão, e as partes da película de carbono dos dois lados do cursor fazem o papel dos dois resistores. De acordo com a posição do cursor, a tensão no terminal do cursor pode assumir qualquer valor entre 0 e a tensão da fonte.

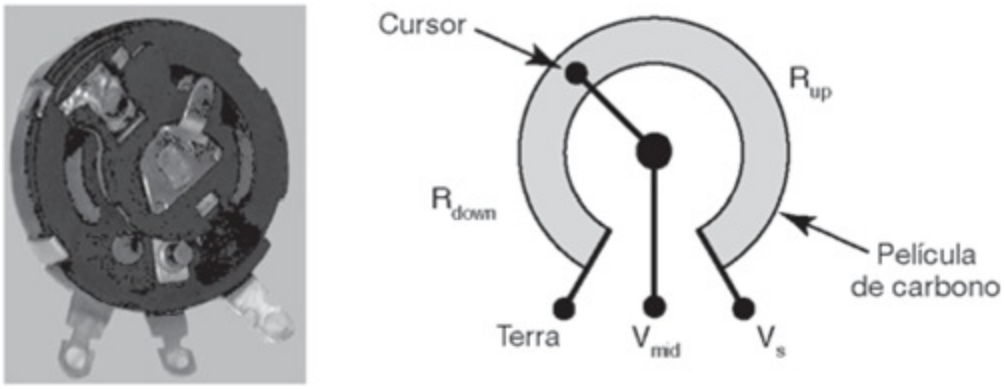


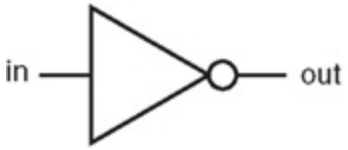
Figura 7-32 Potenciômetro.

7.5 EXEMPLO DE PROJETO: O CIRCUITO INVERSOR

7.5.1 Fundamentos

Agora que já examinamos os circuitos digitais tanto do ponto de vista lógico como do ponto de vista eletrônico, vamos usar os dois pontos de vista para projetar um inversor, que é um circuito que implementa

a operação NOT, usando um MOSFET como chave. A Figura 7.33 mostra o símbolo de um inversor e seu comportamento lógico e elétrico. Do ponto de vista lógico, as entradas e saídas são “uns” e “zeros”, enquanto, do ponto de vista elétrico, são tensões. No caso ideal, a tensão correspondente a 0 seria a menor do circuito, que é a tensão da terra, enquanto a tensão correspondente a 1 seria igual à da fonte, que, por convenção, é representada pelo símbolo V_{DD}. Na prática, porém, a maior tensão de saída é menor que a tensão da fonte, e a menor tensão de saída é maior que a tensão da terra por causa das quedas de tensão no circuito; lembre-se de que, em nosso modelo, o MOSFET é uma chave em série com um resistor. A tensão mais baixa de saída, que pode ser maior que a tensão 0 da terra, é chamada de V_{OL}, e a tensão mais alta de saída, que pode ser menor que a tensão V_{DD} da fonte, é chamada de V_{OH}.



Lógico

in	out
0	1
1	0

Elétrico

in	out
0V (terra)	V_{OH}
V_{DD} (alimentação)	V_{OL}

Figura 7.33 Símbolo do inversor, comportamento lógico e comportamento elétrico.

Como mostra a Figura 7.34, estamos interessados em que V_{OL} seja a menor possível e V_{OH} seja a maior possível para que o circuito inversor produza resultados corretos, mesmo que haja ruído nos sinais na entrada e saída. Como vimos na Seção 7.2.2, flutuações aleatórias do sinal causadas por estática ou outro motivo qualquer reduzem a confiabilidade de um sistema. Quanto maior a diferença entre V_{OH} e V_{OL}, maior a probabilidade de que um sinal seja interpretado corretamente apesar do ruído. Como os valores de V_{OH} e V_{OL} dependem das resistências do inversor, e como as resistências dependem das dimensões do resistor e do MOSFET, existe um compromisso entre a confiabilidade e o tamanho do inversor.

Há várias formas de construir um inversor usando transistores. Neste exemplo, vamos usar uma abordagem semelhante à da Seção 7.3.2, em que usamos uma chave e uma lâmpada, substituindo a chave por um MOSFET e a lâmpada por um resistor, como mostra a Figura 7.35. Qualitativamente, o inversor trabalha da seguinte forma: quando IN está baixo, o MOSFET corta a corrente e a tensão OUT se aproxima da tensão da fonte; quando IN está alto, o MOSFET conduz e a tensão OUT se aproxima de zero. Os valores alto e baixo da tensão OUT dependem do comprimento e da largura do resistor e do MOSFET, que estão indicados na Figura 7.35.

Devemos chamar atenção para o fato de que esta *não é* a configuração mais usada nos circuitos integrados modernos, e apresenta algumas desvantagens, mas essas desvantagens servem para tornar nosso exemplo ainda mais interessante. A configuração *é usada*, porém, em algumas situações, no final da seção, vamos mostrar o circuito mais comum, que utiliza dois MOSFETs em vez de um MOSFET e um resistor.

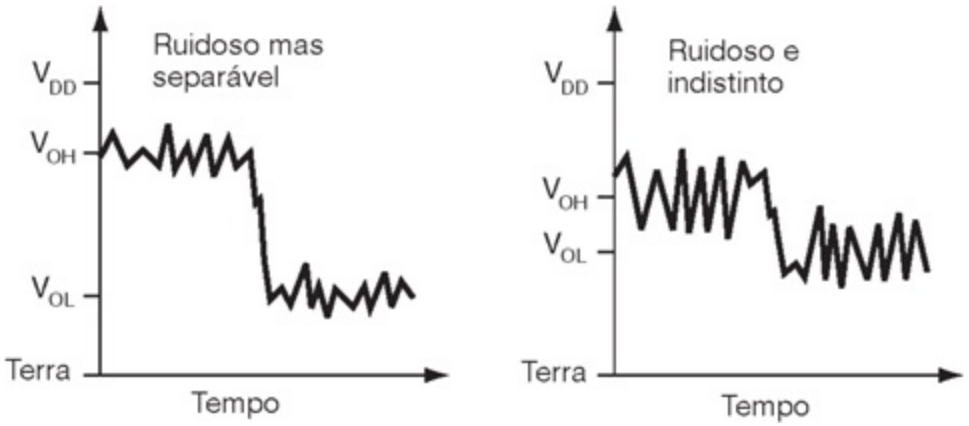


Figura 7.34 Um circuito digital é menos sensível a ruídos quando existe uma grande diferença entre a tensão alta e a tensão baixa.

7.5.2 Definição do Problema e Plano de Ataque

Após esta introdução, estamos prontos para formular o problema de projeto:

Determine os valores do comprimento e largura do resistor e do MOSFET da Figura 7.35 para que $V_{OL} \leq V_{DD}/4$ e $V_{OH} \geq 3V_{DD}/4$, com $V_{DD} = 2$ V. Modele o MOSFET como um resistor e uma chave e use os seguintes parâmetros tecnológicos:

Espessura do polissilício:	t_{poli}	120 nm
Resistividade do polissilício:	Ω_{poli}	$1{,}5 \times 10^{-4}\Omega\cdot$m
Espessura do canal do MOSFET:	t_{canal}	5 nm
Resistividade do canal do MOSFET:	Ω_{canal}	$3 \times 10^{-5}\Omega\cdot$m

Projete o inversor para que o tamanho do MOSFET e do resistor seja o menor possível, respeitando as seguintes restrições:

- o comprimento e a largura das regiões de polissilício não devem ser menores que 180 nm
- a largura das regiões dopadas com fósforo não deve ser menor que 360 nm

Determine a potência consumida pelo dispositivo.

Definir O enunciado do problema pede para determinar as dimensões do resistor e do MOSFET no projeto do inversor para assegurar que a tensão de saída para o dígito 1 seja suficientemente alta e a tensão de saída para o dígito 0 seja suficientemente baixa. São as dimensões desses dispositivos que determinam as resistências do circuito, que, por sua vez, determinam as tensões de saída. A Tabela 7.2 mostra os parâmetros conhecidos e desconhecidos do problema.

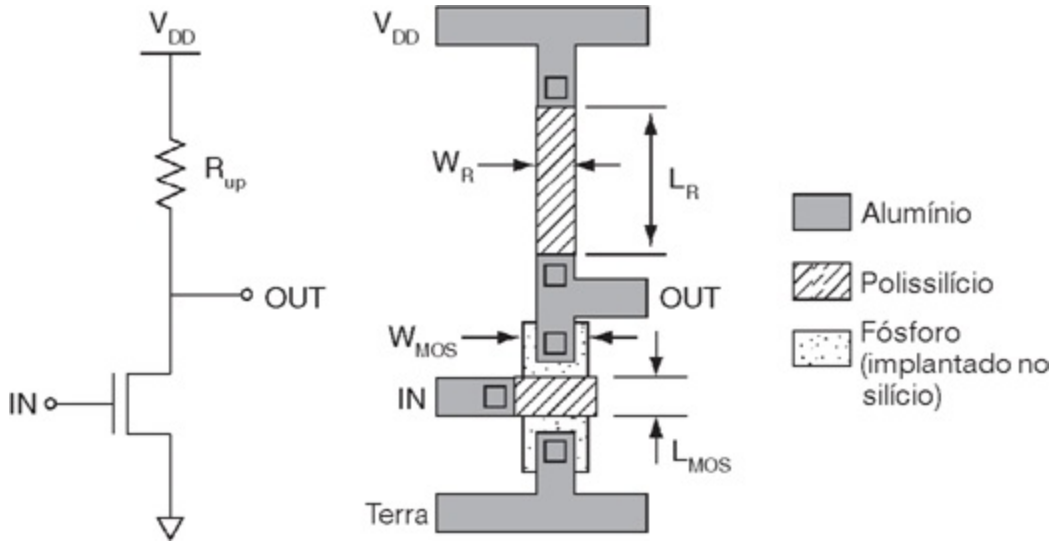


Figura 7.35 Diagrama esquemático e estrutura física de um inversor com um MOSFET e um resistor *pull-up*.

Explorar Como estamos modelando o MOSFET como uma chave com um resistor, quando o MOSFET está conduzindo, o dispositivo como um todo pode ser modelado como dois resistores com a saída entre eles, ou seja, como *um divisor de tensão*. Agora podemos ver mais claramente por que a saída alta pode não ser igual a V_{DD} e a saída baixa pode não ser igual a zero, já que, no caso de um divisor de tensão, a tensão de saída depende dos valores relativos dos resistores *pull-up* e *pull-down*. Na verdade, podemos dizer que o inversor tem algo em comum com o potenciômetro: fazer o MOSFET conduzir é como girar o botão do potenciômetro da Figura 7.32, pois reduz o valor do resistor *pull-down*, o que diminui a tensão de saída.

Planejar Agora que compreendemos que o inversor se comporta como um divisor de tensão, estamos prontos para planejar a solução do problema:

1. Determinar as dimensões do MOSFET e do resistor *pull-up*.
   - **(a)** Desenhar o circuito com o MOSFET modelado como uma chave e um resistor. Com isso, o inversor se transforma em um divisor de tensão quando a chave é fechada.

(b) Usar as equações do divisor de tensão para determinar V_{OH} e V_{OL} em termos dos valores das resistências *pull-up* e *pull-down*.

(c) Determinar os valores das resistências em termos das dimensões do resistor *pull-up* e do MOSFET.

(d) Escolher os menores valores possíveis para o comprimento e largura do MOSFET e para a largura do resistor, e calcular o menor comprimento do resistor que atenda às restrições de V_{OH} e V_{OL}.

2. Calcular o consumo de potência a partir das correntes e tensões do circuito.

7.5.3 Escolha das Dimensões do Dispositivo

O primeiro passo é desenhar o circuito com o MOSFET modelado com uma chave e um resistor. Como mostra a Figura 7.36, existem dois casos possíveis: no primeiro, V_{IN} está baixa e a chave está aberta; no segundo, V_{IN} está alta e a chave está fechada.

TABELA 7.2 Variáveis do inversor

Nome	Descrição	Tipo	Valor
V_{DD}	Tensão de alimentação	Ambiental	2 V
V_{OL}	Tensão de saída baixa	Comportamental	0,5 V ou menos
V_{OH}	Tensão de saída alta	Comportamental	1,5 V ou mais
W_R	Largura do resistor	De projeto	Pelo menos 180 nm
L_R	Comprimento do resistor	De projeto	Pelo menos 180 nm
W_{MOS}	Largura do MOSFET	De projeto	Pelo menos 360 nm
L_{MOS}	Comprimento do MOSFET	De projeto	Pelo menos 180 nm
R_{up}	Resistência *pull-up*	De projeto	Desconhecido

R_{MOS}	Resistência do MOSFET	De projeto	Desconhecido
t_{poli}	Espessura do polissilício	Ambiental	120 nm
ρ_{poli}	Resistividade do polissilício	Ambiental	$1{,}5 \times 10^{-4}\ \Omega - m$
t_{canal}	Espessura do canal do MOSFET	Ambiental	5 nm
ρ_{canal}	Resistividade do canal do MOSFET	Ambiental	$3 \times 10^{-5}\ \Omega - m$

Vamos examinar cada caso separadamente para determinar a tensão de saída V_{OUT}.

Análise Quando V_{IN} Está Baixa O diagrama esquemático da esquerda da Figura 7.36 ilustra o caso em que V_{IN} está baixa e V_{OUT} está alta. As tensões nos terminais do resistor *pull-up* R_{UP}são V_{DD} e V_{OUT}. Com a chave aberta, não há ligação com a terra, e a corrente que sai do nó de saída OUT em direção à terra é zero. Como, de acordo com a Lei das Correntes de Kirchhoff, a corrente que entra no nó OUT deve ser igual à corrente que sai, a corrente que entra no nó OUT através de R_{UP} também é zero. Se a corrente em R_{UP} é zero, a queda de tensão em R_{UP} é zero e V_{OUT}é igual a V_{DD}. Assim, a tensão alta de saída é dada por

$$V_{OH} = V_{DD}$$

Observe que este resultado não depende dos valores dos resistores. Assim, neste caso, a tensão alta de saída é sempre igual à tensão de alimentação V_{DD}, sejam quais forem os valores do resistor de *pull-up* e da resistência do MOSFET.

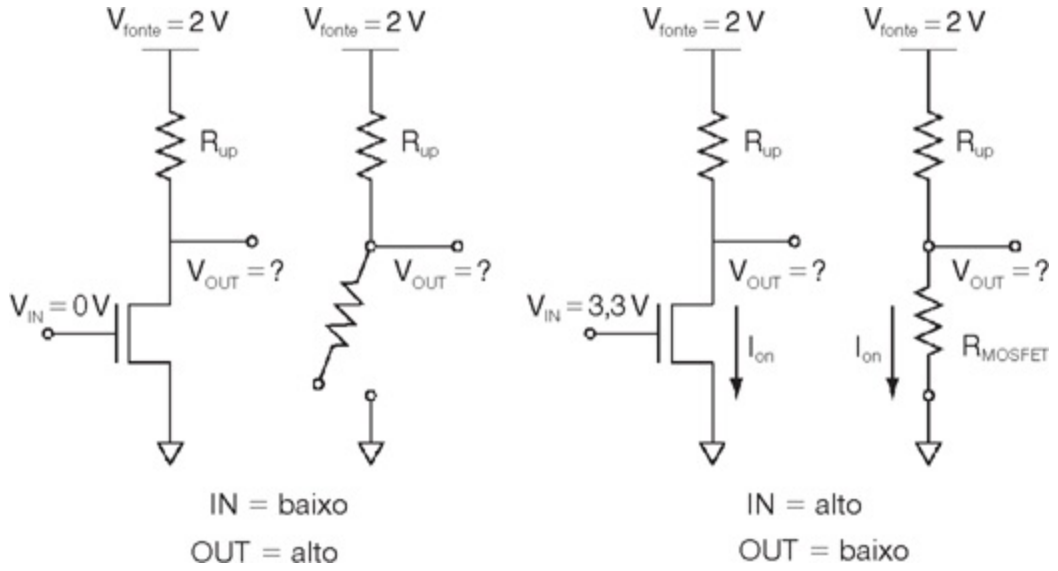


Figura 7.36 Funcionamento de um inversor.

Análise Quando V_{IN} Está Alta O diagrama da direita da Figura 7.36 ilustra o caso em que V_{IN} está alta e V_{OUT} está baixa. A saída é o nó central de um divisor de tensão, ligado a V_{DD} através de R_{UP} e à terra através de R_{MOS}. A tensão do nó depende dos valores relativos dessas resistências. De acordo com a Equação (7.4), o valor de V_{OUT} é dado por

$$V_{OUT} = V_{OL} = V_{DD}\frac{R_{MOS}}{R_{MOS} + R_{UP}}$$

Nesse caso, o requisito de que $V_{OL} \leq V_{DD}/4$ significa que

$$\frac{V_{DD}}{4} \geq V_{DD}\frac{R_{MOS}}{R_{MOS} + R_{UP}}$$

Explicitando R_{UP}, obtemos

$$R_{UP} \geq 3R_{MOS} \qquad (7.6)$$

Assim, para atender ao requisito de que $V_{OL} = V_{DD}/4$, a resistência de R_{UP} deve ser pelo menos três vezes maior que a resistência de R_{MOS}.

Determinação das Dimensões do Dispositivo Existe um número

infinito de combinações de dimensões do resistor e do MOSFET que satisfazem a Equação (7.6). De acordo com o enunciado do problema, devemos escolher a combinação que minimiza o tamanho dos dois dispositivos. Para isso, vamos usar a seguinte abordagem:

1. Determinar a resistência de um MOSFET de tamanho mínimo.
2. Calcular o menor valor do resistor *pull-up* que satisfaz a Equação (7.6).
3. Usar a menor largura possível para o resistor *pull-up* e calcular o comprimento necessário.

Tamanho e Resistência do MOSFET De acordo com a Figura 7.35 e a Tabela 7.2, o comprimento e a largura de um MOSFET de tamanho mínimo são

$$L_{\text{MOS}} = 180\,\text{nm}$$
$$W_{\text{MOS}} = 360\,\text{nm}$$

De acordo com a Equação (7.2), a resistência do MOSFET é

$$\begin{aligned} R_{\text{MOS}} &= \rho_{\text{canal}} \frac{L_{\text{MOS}}}{W_{\text{MOS}} t_{\text{canal}}} \\ &= (3 \times 10^{-5}) \frac{180 \times 10^{-9}}{(360 \times 10^{-9})(5 \times 10^{-9})} \\ &= 3\,\text{k}\Omega \end{aligned}$$

onde os valores de ρ_{canal} e t_{canal} também foram extraídos da Tabela 7.2.

Valor e Tamanho do Resistor Pull-up De acordo com a Equação (7.6), o valor mínimo de R_{UP} é

$$\begin{aligned} R_{\text{UP}} &= 3R_{\text{MOS}} \\ &= 9\,\text{k}\Omega \end{aligned}$$

A resistência R_{UP} será uma faixa de polissilício. De acordo com a Tabela 7.2, a largura mínima desta faixa é

$$W_{\text{R}} = 180\ \text{nm}$$

De acordo com a Equação (7.2), a resistência R_{UP} é dada por

$$R_{UP} = \rho_{poli} \frac{L_R}{W_R t_{poli}}$$

Explicitando L_R, obtemos

$$\begin{aligned} L_R &= \frac{1}{\rho_{poli}} R_{UP} W_R t_{poli} \\ &= \frac{1}{1{,}5 \times 10^{-4}} (9000)(180 \times 10^{-9})(120 \times 10^{-9}) \\ &= 1300\,\text{nm} \end{aligned}$$

7.5.4 Cálculo da Potência Consumida

Como vimos na Seção 7.4.1, a potência consumida é igual ao produto da corrente pela tensão da fonte de alimentação. No inversor, quando a saída está baixa, a corrente sai da fonte de alimentação e atravessa o circuito, mas quando a saída está alta, a corrente é zero. Assim, a potência consumida pelo inversor depende dos dados de entrada. É razoável supor que, para uma grande quantidade de dados, o número de "zeros" e "uns" tende a ser praticamente o mesmo, de modo que a potência consumida pode ser tomada como a média aritmética dos dois casos:

$$\begin{aligned} P_{méd} &= \frac{P_{saída\ baixa} + P_{saída\ alta}}{2} \\ &= \frac{0 + V_{DD} I_{ON}}{2} \\ &= \frac{V_{DD} I_{ON}}{2} \end{aligned}$$

onde I_{ON} é a corrente no circuito quando o MOSFET está conduzindo.

De acordo com a Lei das Correntes de Kirchhoff, a corrente que atravessa a fonte é igual à corrente que atravessa o resistor e à corrente que atravessa o MOSFET. Assim, de acordo com a Lei de Ohm,

$$I_{ON} = \frac{V_{OL}}{R_{MOS}} = \frac{0{,}5\ \text{V}}{3000\ \Omega} = 167\ \mu\text{A}$$

Substituindo o valor de I_{ON} na fórmula da potência média, obtemos

$$P_{méd} = \frac{(2\ \text{V})(167 \times 10^{-6}\ \text{A})}{2} = 167\ \mu\text{W}$$

Assim, na média, nosso circuito inversor consome 167 μW de potência. Isso é muito? Para colocar este número em perspectiva, vamos considerar o número médio de inversores que existe em um circuito integrado para computadores. A Figura 7.37 mostra uma foto do processador Intel Core Duo, projetado para computadores portáteis de baixa potência. Mais de metade da área da pastilha é ocupada por um tipo de memória rápida chamada *cache* que é usada para armazenar os dados solicitados com mais frequência pelo processador. Nesta versão do Core Duo, existem mais de 16 milhões de bits de memória no cache; cada bit contém dois inversores. Assim, a potência consumida por essa parte da pastilha é pelo menos 32 milhões de vezes maior que o consumo de potência de um único inversor. Se cada inversor consumisse 167 μW, a potência total consumida pelo cache seria mais de 5000 W. Este é um consumo *enorme*, cerca de quatro vezes o consumo de uma família da classe média concentrado em uma área de apenas um centímetro quadrado – uma densidade de potência maior que a de um reator nuclear! Na verdade, a potência consumida por esta versão do Core Duo é aproximadamente 21 W com uma tensão de alimentação de aproximadamente 1,3 V, o que significa que os inversores usados consomem uma potência muito menor que o inversor apresentado neste livro.

Figura 7.37 Um processador Intel Core Duo. Metade da área do processador é dedicada à memória cache. Foto cortesia da Intel Corporation.

Nosso inversor apresenta a vantagem de não consumir potência quando a entrada está baixa porque o MOSFET se comporta como uma chave aberta, interrompendo o circuito entre V_{DD} e a terra. Se o resistor *pull-up* for substituído por uma chave que permanece aberta quando a entrada está alta, o consumo de potência também será zero neste caso. Esse tipo de circuito lógico, que usa uma combinação de chaves MOSFET "normalmente abertas" e "normalmente fechadas", conhecido como *MOS complementar* ou *CMOS*, é a base de quase todos os circuitos integrados digitais modernos. A Figura 7.38 mostra um inversor CMOS. A chave "normalmente aberta" que liga a saída ao terminal negativo da fonte de alimentação, ou terra, é o chamado MOSFET tipo *n*, enquanto a chave "normalmente fechada" que liga a saída ao terminal positivo ou V_{DD} é o chamado MOSFET tipo *p*. Como os circuitos CMOS só consomem potência quando a saída está no processo de passar de baixa tensão para alta tensão, ou vice-versa, o consumo de potência é extremamente pequeno.[6] Por outro lado, para construir MOSFETs tipo *p* e tipo *n* na mesma pastilha é preciso usar um processo de fabricação muito mais complexo e o circuito final possui um número duas vezes maior de chaves.

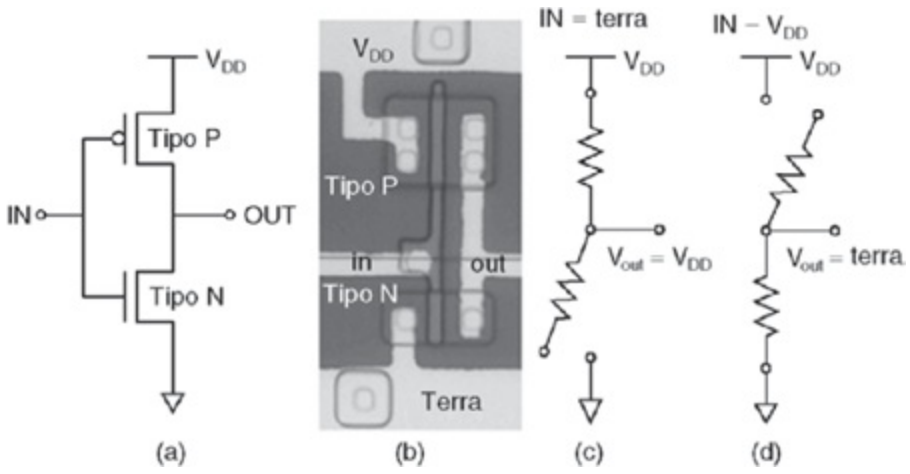


Figura 7.38 Inversor CMOS, (a) Diagrama esquemático, mostrando os símbolos de um MOSFET tipo p e de um MOSFET tipo n. (b) Fotomicrografia de um inversor CMOS em uma pastilha fabricada por alunos de graduação da universidade de Notre Dame. Cortesia de Greg Snider. (c) Quando a tensão de entrada é baixa, o MOSFET tipo n fica aberto e o MOSFET tipo p conduz. (d) Quando a tensão de entrada é alta, o MOSFET tipo p fica aberto e o MOSFET tipo n conduz.

PROBLEMAS

1. Valores de Expressões Lógicas

Dado que $A = 1$, $B = 0$ e $C = 1$, determine os valores das seguintes expressões lógicas:

(a) $(A \text{ AND NOT } B) \text{ AND NOT } C$
(b) $[(A \text{ OR } B \text{ OR } C) \text{ AND } A \text{ AND } C] \text{ OR } (B \text{ AND } C)$
(c) $(A \text{ AND } B) \text{ OR } (\text{NOT } C \text{ AND } A) \text{ OR } A$

2. Lei de DeMorgan

De acordo com a Lei de DeMorgan,

$$\text{NOT}(A \text{ AND } B) = (\text{NOT } A) \text{ OR } (\text{NOT } B)$$
$$\text{NOT}(A \text{ OR } B) = (\text{NOT } A) \text{ AND } (\text{NOT } B)$$

Use uma tabela de verdade para demonstrar as duas partes da Lei de DeMorgan.

3. Equivalência de Expressões Lógicas

Mostre que as expressões lógicas a seguir são equivalentes,

primeiro construindo uma tabela de verdade e depois usando a Lei de DeMorgan.

$$(\text{NOT } A) \text{ OR } (\text{NOT } B) \text{ OR } [(\text{NOT } A) \text{AND} (\text{NOT } B)]$$
$$\text{NOT}(A \text{ AND } B) \text{ OR NOT}(A \text{ OR } B)$$

4. Equivalência de Expressões da Lógica Booleana

Use as propriedades da lógica booleana para provar a seguinte igual-dade:

$$\begin{aligned}((\text{NOT } A) \text{ AND } (\text{NOT } B) \text{ AND } C) \text{ OR} \\ ((\text{NOT } A) \text{ AND } B \text{ AND } C) \text{ OR} \\ (A \text{ (NOT } B) \text{ AND } (\text{NOT } C)) \text{ OR} \\ (A \text{ AND } B \text{ AND } (\text{NOT } C)) \\ = ((\text{NOT } A) \text{ AND } C) \text{ OR } (A \text{ AND } (\text{NOT } C))\end{aligned}$$

5. Projeto de um Circuito para Detectar Números Maiores que 5

Uma caixa tem três botões para entrar com um número binário de 3 dígitos e uma lâmpada vermelha para ser usada como saída. Projete um circuito com chaves que faça a lâmpada acender quando o número da entrada for maior que 5.

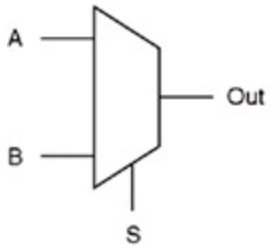
6. Projeto de um Circuito Decodificador

Projete um circuito decodificador cuja entrada seja um número binário de 4 bits e cuja saída seja um único bit. O bit de saída deve ser 1 quando a entrada for 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14 ou 15, e deve ser 0 quando a entrada for qualquer outro número. Escreva uma equação em lógica booleana que descreva a saída em termos da entrada.

7. Projeto de um Multiplexador

O multiplexador é um componente lógico que funciona como uma chave para escolher uma entrada entre muitas. O componente escolhe a entrada que deve ser encaminhada para a saída com base em um sinal de seleção S tal que para $S = 0$, escolhe a entrada A; para $S = 1$, escolhe a entrada B. O símbolo e

a tabela de verdade do multiplexador são mostrados a seguir.



A	B	S	Out
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

(a) Escreva uma expressão em lógica booleana para o multiplexador com base na tabela de verdade.

(b) Se você fosse construir o multiplexador usando circuitos AND, circuitos OR e inversores, quantas chaves seriam necessárias para implementar a equação lógica?

(c) Você é capaz de imaginar uma forma de implementar um multiplexador usando um número de chaves muito menor que o calculado no item anterior? Explique sua solução.

8. Conversão de Números Binários

Converta os seguintes números binários para números hexadecimais e decimais:

(a) 101

(b) 1010

(c) 1100101011111110

9. Conversão de Decimal para Binário

Converta os seguintes números decimais para números binários:

(a) 32

(b) 73

10. Quantos Bits?

Quantos bits são necessários para representar o número decimal 1234 como número binário? Descreva sucintamente uma

abordagem geral para determinar quantos bits são necessários para representar qualquer número inteiro positivo como número binário.

11. Somas em Binário

Calcule as seguintes somas de números binários:

(a) 10 + 10

(b) 111010 + 10111

(c) 1111 + 1101

12. Equações Lógicas de um Somador Completo

Use uma tabela de verdade para demonstrar que as seguintes equações lógicas para executar a função de vai-um C_{out} e a função soma S estão corretas:

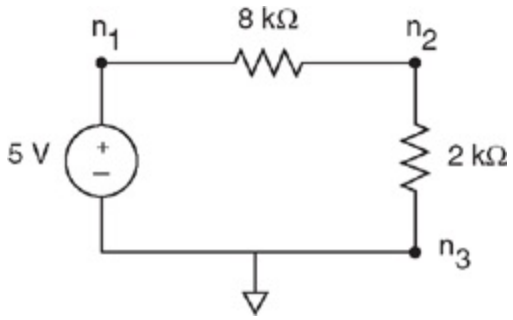
$$C_{\text{out}} = (A \text{ AND } B) \text{ OR } (A \text{ AND } C_{\text{in}}) \text{ OR } (B \text{ AND } C_{\text{in}})$$
$$S = A \text{ XOR } B \text{ XOR } C$$

13. Circuitos de um Somador Completo

Projete circuitos, usando chaves, que implementem as funções de soma e vai-um do somador completo descrito na Seção 7.3.4.

14. Análise de um Circuito Resistivo

Responda às seguintes perguntas para o circuito abaixo:



(a) Qual é a tensão entre os nós n_1 e n_2?

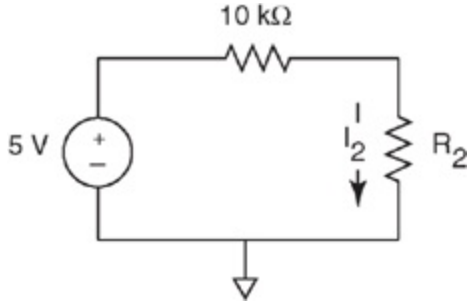
(b) Qual é a tensão entre os nós n_2 e n_3?

(c) Qual é a tensão entre os nós n_3 e n_1?

(d) Qual é a soma das *quedas* de tensão ao longo de todo o circuito?

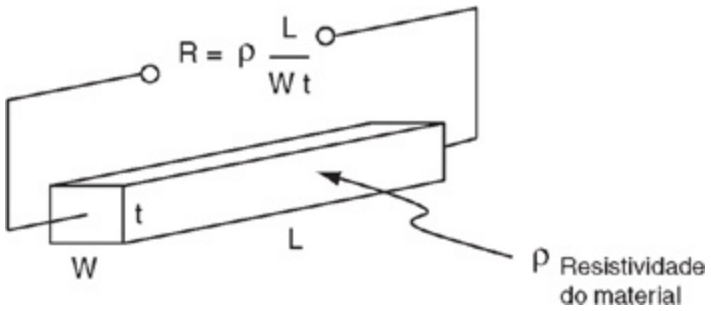
15. Cálculo de uma Resistência Desconhecida

Qual é o valor de R_2 no circuito a seguir, se $I_2 = 12$ mA?



16. Potência Dissipada em um Fio

Como mostra a Figura 7.21 (repetida a seguir), a resistência de um fio é dada pela expressão $R = \rho L/(Wt)$, onde L é o comprimento, Wé a largura, t é a espessura e ρ é a resistividade do material. Suponha que um fio com essas propriedades é usado para ligar dois componentes de um circuito integrado.



(a) Suponha que a queda de tensão no fio é de V volts. Escreva uma equação para a potência dissipada no fio em termos de L, W, t, ρ e V.

(b) Suponha que, para reduzir o espaço ocupado pelos fios e economizar material, os projetistas tenham decidido reduzir a largura e a espessura do fio, dividindo por s o valor desses

parâmetros. Use a equação do item anterior para determinar o efeito dessa redução sobre a potência dissipada.

(c) Qual deveria ser a queda de tensão no novo fio para que a potência dissipada fosse a mesma que no fio antigo, supondo que os dois fios tenham o mesmo comprimento?

17. Resistência e Potência

Você concorda ou discorda da afirmação a seguir? Justifique sua resposta.

> Quando a resistência de um circuito aumenta, a potência dissipada também aumenta, já que uma resistência maior esquenta mais ao ser atravessada por uma corrente que uma resistência menor.

18. Corrente e Potência em uma Lâmpada

A resistência de uma certa lâmpada aumenta de 10Ω, quando está fria, para 144 Ω quando está quente. Suponha que uma tensão de 120 V é aplicada à lâmpada.

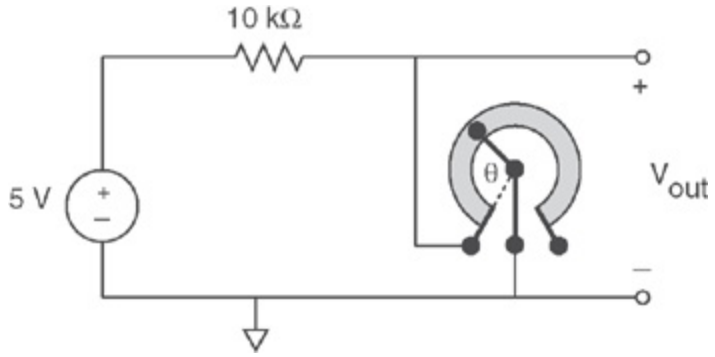
(a) Qual é a corrente que atravessa a lâmpada no instante em que ela é ligada?

(b) Qual é a corrente que atravessa a lâmpada depois que ela esquenta?

(c) Qual é a potência dissipada depois que a lâmpada esquenta?

19. Uso de um Potenciômetro

Considere um potenciômetro cuja resistência varia linearmente com o ângulo a do cursor e cuja resistência é 0 Ω para $\theta = 0^\circ$ e 50 Ω para $\theta = 270^\circ$. O potenciômetro é ligado a um circuito cujo diagrama esquemático aparece a seguir.



(a) Qual é a tensão de saída V_{out} para $\theta = 270°$?

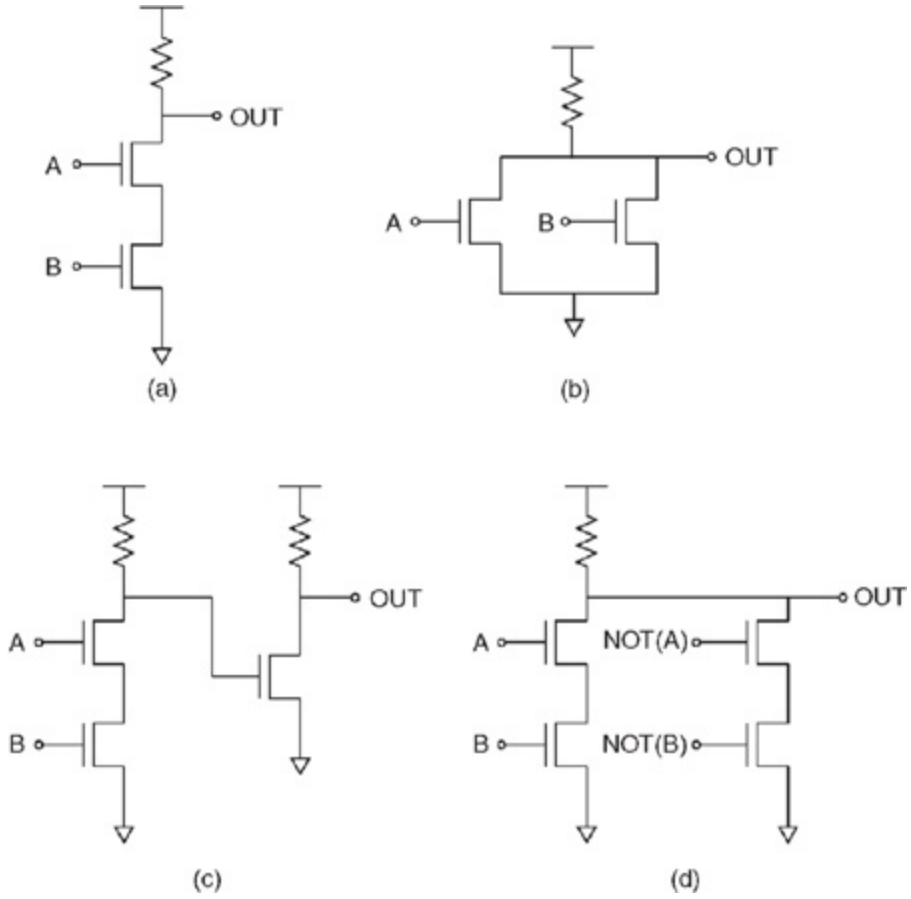
(b) Escreva uma expressão geral para V_{out} em termos de θ.

20. Duração e Tensão das Baterias

Com o aumento da popularidade de aparelhos portáteis como telefones celulares e *notebooks*, a tensão de alimentação V_{DD} dos microprocessadores vem sendo reduzida cada vez mais. Usando as ideias da Seção 7.4.1, apresente pelo menos duas razões pelas quais você acha que existe essa tendência.

21. Circuitos Lógicos com MOSFET

Construa tabelas de verdade e escreva expressões lógicas para os circuitos a seguir.



22. Dissipação de Potência de um MOSFET

Um MOSFET tem 90 nm de comprimento e 500 nm de largura. O canal tem uma espessura de 2 nm e uma resistividade de $3 \times 10^{-5} \Omega \cdot m$.

(a) Qual é a resistência do canal?

(b) Supondo que o MOSFET se comporta como um resistor ideal quando está conduzindo, qual é a corrente no MOSFET quando a tensão entre a fonte e o dreno é de 1,8 V?

(c) Qual é a potência dissipada no MOSFET nessas condições?

(d) Por qual fator seria necessário multiplicar a largura do MOSFET para que a potência dissipada fosse reduzida em 50%?

(e) Por qual fator seria necessário dividir a tensão aplicada ao MOSFET, sem mudar as dimensões do dispositivo, para que a

potência dissipada fosse reduzida em 50%?

23. Um Circuito NAND de Duas Entradas

O circuito NAND implementa a função “NOT AND”, ou seja,

$$A \text{ NAND } B = \text{NOT}(A \text{ AND } B)$$

(a) Desenhe o diagrama esquemático de um circuito NAND de duas entradas usando MOSFETs, semelhante ao circuito inversor da Figura 7.35. Procure tornar o circuito o mais compacto possível, sem mudar os valores das resistências.

(b) Determine a tensão de saída para cada uma das quatro combinações possíveis de sinais de entrada. Suponha que a tensão de alimentação é de 2 V.

(c) A potência dissipada é a mesma em todos os casos? Justifique sua resposta.

(d) Suponha que, quando o circuito está funcionando, qualquer entrada tem uma probabilidade de 50% de ser o bit lógico 1 (ou 0). Qual é, nesse caso, a potência média dissipada?

*Esta história é provavelmente apócrifa; veja http:/en.wikipedia.org/wiki/Thomas_J_Watson (N.T.).

[1]A Digital Equipment Corporation foi comprada pela Compaq Computer em 1998. Hoje parte da Hewlett-Packard, a Compaq foi a segunda maior fabricante mundial de computadores em 2004.

[2]Em 1986, a Burroughs se uniu à Sperry-Univac para formar a Unisys Corporation.

[3]Quando não é óbvio em que base um número está escrito, usamos parênteses e um índice. Por exemplo, o número de meses em um ano é $(12)_{10} = (20)_6$.

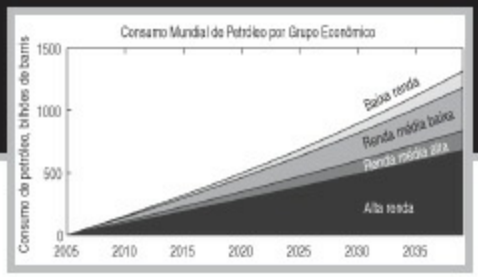
[4]Observe que estamos desprezando a variação de altura da água no tanque.

[5]A tensão também é chamada de “força eletromotriz”, embora não seja uma força; e de “potencial elétrico”, embora não seja uma energia potencial.

[6]Esses circuitos também consomem potência por causa da pequena “corrente de fuga” dos CMOS, que existe mesmo quando as chaves estão supostamente abertas – um problema que está se tornando mais sério quando bilhões de chaves são colocadas em uma única pastilha.

CAPÍTULO

8



Modelagem de Mudanças em Sistemas

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- explicar o que os engenheiros chamam de *estado* de um sistema, reconhecer que o estado de muitos sistemas físicos importantes *muda com o tempo*, e explicar, através de exemplos, por que os engenheiros precisam modelar esses *sistemas dinâmicos;*
- usar uma abordagem simples para modelar a taxa de variação de um sistema como uma razão entre pequenas mudanças finitas;
- usar uma abordagem tabular simples para modelar o acúmulo de mudanças em um sistema somando mudanças finitas ocorridas em intervalos de tempo finitos;
- usar a abordagem tabular para simular sistemas dinâmicos como a trajetória de um projétil e o escoamento de um líquido.

8.1 INTRODUÇÃO

Os engenheiros são frequentemente consultados a respeito do futuro. Às vezes essas previsões são extremamente importantes, como o planejamento de um sistema de diques para Nova Orleans capaz de suportar situações extremas em uma era de grandes mudanças climáticas. A maioria das previsões dos engenheiros, porém, não tem

muita visibilidade, e modelar mudanças em sistemas faz parte da rotina de grande parte dos engenheiros. Muitos problemas de engenharia envolvem a modelagem do aumento ou diminuição de uma grandeza em um certo intervalo. A grandeza pode ser uma entidade física, como um fluido ou uma carga elétrica, um conceito físico, como velocidade ou distância, ou uma abstração matemática como a probabilidade de que um certo evento aconteça. Além disso, o intervalo pode assumir muitas formas, como um intervalo de tempo, uma região do espaço ou mesmo um dos elementos de uma coleção. Todos os problemas a seguir envolvem a modelagem de uma série de mudanças.

- Qual é a distância coberta por uma pessoa que caminha com uma certa velocidade durante um certo intervalo de tempo?
- Qual é a energia armazenada em uma mola quando ela sofre um certo alongamento?
- Qual deve ser a frequência do *clock* de um processador para que os sinais que trafegam nos fios de uma pastilha cheguem ao seu destino a tempo?
- Como varia o nível de água em um tanque quando a vazão da água que entra e a vazão da água que sai são conhecidas?

Uma das formas mais comuns de representar mudanças em um sistema é através de “instantâneos” tomados a intervalos regulares. Esta visão do comportamento de um sistema se assemelha a observar o movimento de um objeto iluminado por uma lâmpada estroboscópica. Cada vez que a lâmpada acende, observamos por um breve instante o estado do sistema, mas não temos um conhecimento direto do que está acontecendo com o sistema nos intervalos em que a lâmpada está apagada. Um modelo que representa o tempo na forma de “clarões” separados por intervalos de “escuridão” é chamado de modelo *discreto*.

Neste capítulo, vamos apresentar uma abordagem para a criação de modelos discretos de mudanças em sistemas. Depois de discutir a abordagem básica, vamos aplicá-la a dois exemplos detalhados:

- modelagem do movimento de um objeto em queda
- previsão da época em que vão se esgotar as reservas de petróleo

8.2 PREVISÃO DO FUTURO: UM ACÚMULO DE MUDANÇAS

8.2.1 O Estado de um Sistema

A primeira questão no que diz respeito à modelagem de um sistema é escolher *o que* vamos modelar. Os engenheiros em geral se referem a mudanças no *estado* de um sistema; o estado é determinado pelos valores combinados das *propriedades* do sistema. Uma propriedade, por sua vez, é qualquer característica do sistema que pode ser medida, pelo menos em princípio. Existem muitas propriedades que podemos atribuir a um sistema, mas, em geral, estamos interessados em apenas algumas. Para ilustrar a forma como os engenheiros encaram as mudanças, vamos voltar ao exemplo, do Capítulo 2, de levantar um peso até uma prateleira. Nesse exemplo, certamente nosso interesse está no peso do objeto e na altura da prateleira. Por outro lado, não estamos interessados na cor do objeto, já que ela é irrelevante para a solução do problema. As propriedades que ajudam a definir o estado são chamadas de *variáveis de estado*. A Figura 8.1 mostra dois estados do problema do objeto na prateleira: *no chão* e *na prateleira*. O exemplo envolve uma única variável de estado, *Y*–a altura da prateleira. Quando o objeto está no estado *no chão*, o valor de *Y* é $Y_{\text{chão}}$, que é igual a 0; quando o objeto está na prateleira, o valor de *Y* é $Y_{\text{prateleira}}$, que é igual a 2.

O estado de um sistema é determinado apenas pelos valores de

algumas de suas propriedades e não tem nada a ver com o modo como o sistema ficou dessa forma. Se um objeto está em cima de uma prateleira em uma certa ocasião, e voltamos uma semana depois e o encontramos exatamente no mesmo lugar e com o mesmo peso, o estado do objeto é o mesmo nos dois instantes, o que quer que tenha acontecido com ele durante a semana. Da mesma forma, dizer que um sistema se encontra em um certo estado equivale a fornecer os valores de todas as propriedades que definem esse estado.

Processo e Trajetória Chamamos de *processo* qualquer atividade que muda o estado de um sistema. Um exemplo simples de processo é levantar o objeto do chão até a prateleira. Damos o nome de *trajetória* à série de estados intermediários pelos quais um sistema passa ao mudar de um estado inicial para um estado final. Se uma pessoa levanta o objeto até a prateleira usando uma talha, esse objeto percorre uma certa trajetória entre os dois estados. Se, por outro lado, alguém coloca o objeto em um caminhão, dá uma volta completa no quarteirão e depois o levanta até a prateleira, o objeto percorre uma trajetória diferente. Os estados inicial e final, porém, são os mesmos nos dois casos.

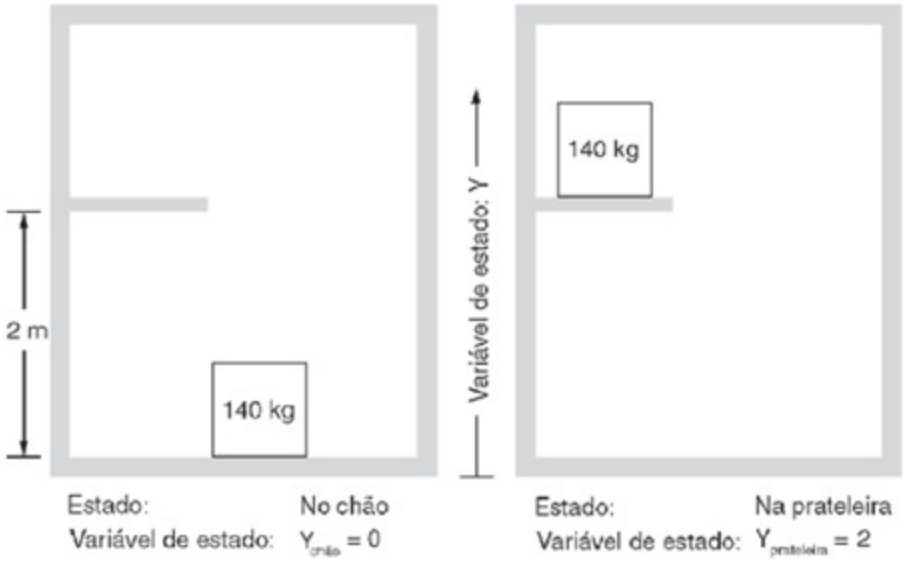


Figura 8.1 Os estados inicial e final do problema do peso e da prateleira.

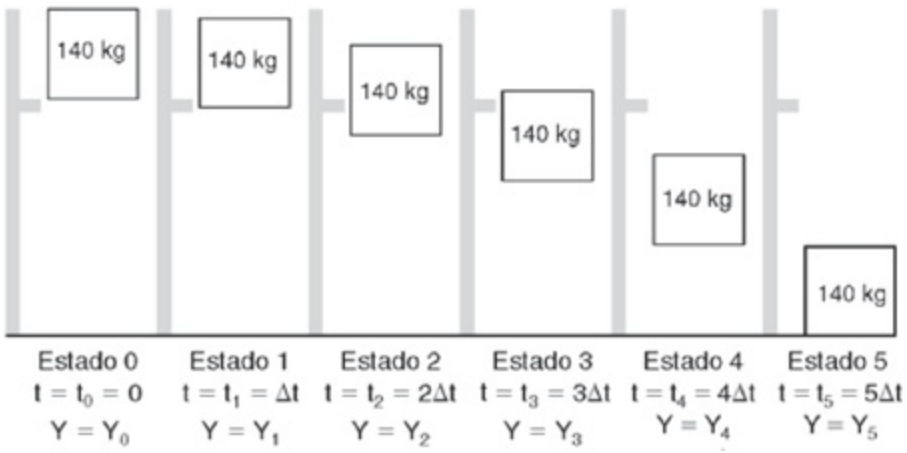


Figura 8.2 Um caixote passa por vários estados no processo de queda de uma prateleira.

Em geral, quando falamos em modelar as mudanças de um sistema com o tempo, estamos nos referindo a estimar a trajetória no tempo das variáveis de estado do sistema. A Figura 8.2 mostra algumas imagens do objeto caindo da prateleira e apresenta a notação usada para descrever a queda. Na figura aparecem seis estados do objeto, rotulados de 0 a 5, com o estado 0 como estado inicial, com o objeto na altura da prateleira. Cada um dos instantâneos foi tomado a intervalos de tempo iguais entre t_0 e t_5, espaçados de um *incremento* Δt; a letra grega Δ (delta) é usada para indicar uma variação pequena, mas finita. As alturas do objeto correspondentes aos diferentes estados são representadas por $Y_0, \ldots, Y_5$.

Também usamos o símbolo Δ para indicar as mudanças dos valores das variáveis de estado quando um sistema passa de um estado para o estado seguinte. Se X é uma variável de estado e i e j são dois estados, a mudança do valor de X quando o sistema passa do estado i para o estado jé dada por

$$\Delta X_{i \to j} = X_j - X_i$$

Assim, no problema do peso na prateleira, para os estados mostrados na Figura 8.1,

$$\Delta Y_{\text{chão} \rightarrow \text{prateleira}} = 2$$
$$\Delta Y_{\text{prateleira} \rightarrow \text{chão}} = -2$$

Para um processo como o mostrado na Figura 8.2, em que um sistema percorre uma trajetória passando por estados numerados sequencialmente, vamos usar uma notação simplificada, apontando, no índice de cada incremento, apenas o primeiro estado da transição. Assim,

$$\Delta Y_0 = \Delta Y_{0 \rightarrow 1} = Y_1 - Y_0,$$
$$\Delta Y_1 = \Delta Y_{1 \rightarrow 2} = Y_2 - Y_1,$$
$$\ldots$$

Taxas de Variação A taxa de variação é uma medida da rapidez com a qual uma grandeza muda em relação a mudanças de outra grandeza. No modelo de intervalos discretos de tempo, a taxa de variação de uma variável de estado em uma certa mudança de estado é igual à variação do valor da variável dividida pelo valor do incremento de tempo. Assim, se X é uma variável de estado e i é o número que identifica o estado, a taxa de variação de X com o tempo no estado i é dada por

$$\frac{\Delta X_i}{\Delta t} = \frac{X_{i+1} - X_i}{\Delta t} \qquad (8.1)$$

No caso do objeto em queda, a taxa de variação de Y com o tempo é a *velocidade* do objeto. O Exemplo 8.1 investiga a velocidade do objeto em vários instantes de tempo.

Exemplo 8.1 Velocidade de Queda de um Caixote

A tabela a seguir mostra a altura Y em que se encontra um caixote em vários instantes de tempo.

Estado	0	1	2	3	4	5
Tempo, s	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Y, m	2.00	1.95	1.80	1.56	1.22	0.78

Determine a velocidade do caixote no instante inicial, em $t = 0{,}1$ s e em $t = 0{,}45$ s.

Solução O incremento de tempo é $\Delta t = 0{,}1$ s. A velocidade do caixote no estado i é dada por

$$v_i = \frac{\Delta Y_i}{\Delta t} = \frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta t}$$

A velocidade inicial é

$$v_0 = \frac{Y_1 - Y_0}{\Delta t} = \frac{1{,}95 - 2{,}00}{0{,}1} = -0{,}5\,\text{m/s}$$

No instante $t = 0{,}1$ s, o caixote se encontra no estado 1 e a velocidade é

$$v_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{\Delta t} = \frac{1{,}80 - 1{,}95}{0{,}1} = -1{,}5\,\text{m/s}$$

No instante $t = 0{,}45$, o caixote se encontra entre os estados 4 e 5. No modelo discreto, o valor de Y não é definido entre os estados; lembre-se de que tudo fica "escuro" entre os clarões. Podemos usar vários métodos para *estimar* o valor de Y em instantes intermediários. Um desses métodos consiste em simplesmente usar o valor do estado 4, outro em usar o valor do estado 5, e um terceiro em calcular a média aritmética desses valores.

8.2.2 Método de Euler: Previsão da Mudança de um Estado para Outro

Como já dissemos, os engenheiros fazem previsões a respeito do comportamento de sistemas. Nesta seção, vamos mostrar como um modelo discreto no tempo pode ser usado para fazer previsões. O raciocínio que está por trás do uso de modelos discretos para "prever o futuro" é o seguinte:

> Se conhecemos o estado de um sistema no momento presente e conhecemos a taxa atual de variação das variáveis do sistema, podemos estimar o estado do sistema em um instante futuro não muito distante.

Antes de aplicar este raciocínio à modelagem de um sistema dinâmico, precisamos responder a duas perguntas importantes:

- Supondo que conhecemos o estado atual e a taxa de variação

atual, como podemos usar essas informações para fazer uma previsão?

- Podemos determinar o estado atual de um sistema através de medições, mas como podemos determinar a taxa de variação atual sem conhecer o futuro?

Previsão dos Valores das Variáveis de Estado no Próximo Estado A resposta da primeira pergunta é simples. Suponhamos que X_i seja o valor atual da variável de estado X e que r_i seja a taxa de variação atual de X. Como

$$r_i = \frac{\Delta X_i}{\Delta t} = \frac{X_{i+1} - X_i}{\Delta t},$$

podemos estimar o valor seguinte de X, X_{i+1} como

$$X_{i+1} = X_i + r_i \Delta t \qquad (8.2)$$

Em outras palavras, o valor da variável de estado no estado seguinte é igual ao valor atual mais a taxa de variação multiplicada pelo incremento de tempo. O Exemplo 8.2 ilustra a aplicação desta regra.

Vamos supor agora que estejamos interessados em prever o comportamento de um sistema no futuro mais distante. Uma boa abordagem é encadear uma série de previsões a curto prazo. Em outras palavras, assim como podemos usar o estado atual e a taxa de variação atual para prever o próximo estado, podemos repetir o processo para calcular o estado seguinte, e assim por diante. Em termos matemáticos, isso significa aplicar várias vezes a Equação (8.2) para obter os valores de X_{i+1}, X_{i+2}, X_{i+3} e outros valores mais remotos da série. Começando pelo estado 0, a série resultante de previsões é

$$
\begin{aligned}
X_1 &= X_0 + r_0 \Delta t \\
X_2 &= X_1 + r_1 \Delta t \\
X_3 &= X_2 + r_2 \Delta t \\
&\ldots
\end{aligned}
\qquad (8.3)
$$

Esta forma de prever o comportamento de um sistema a partir de uma série de mudanças discretas, calculando a variação a cada intervalo de tempo e usando o novo estado para calcular a variação seguinte, conhecida como *Método de Euler*, foi proposta pelo matemático belga Leonhard Euler (o mesmo que criou a teoria de flambagem, discutida no Capítulo 6) em meados do século XVIII. A Figura 8.3 fornece uma ilustração gráfica do Método de Euler. Dado um instante t_i no qual o valor de X é X_i, a taxa de variação r_i é a inclinação de um segmento de reta que liga o ponto (t_i, X_i) ao ponto (t_{i+1}, X_{i+1}). A distância horizontal entre dois pontos sucessivos é um incremento constante Δt, enquanto a distância vertical entre dois pontos sucessivos é um incremento variável ΔX.

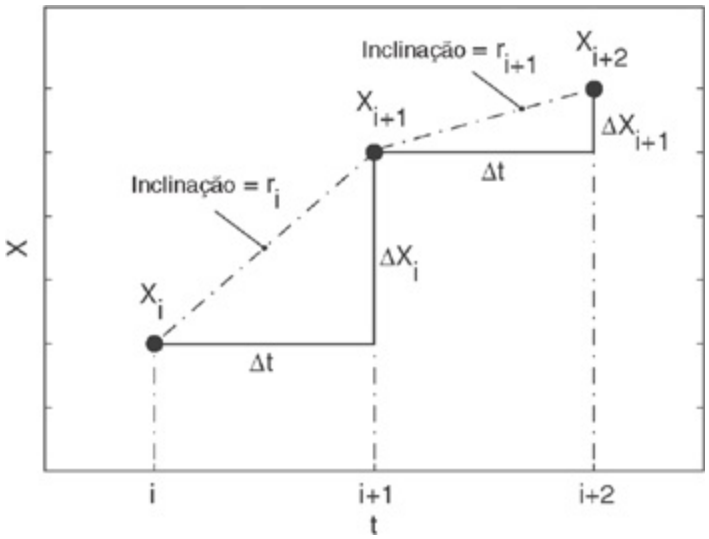


Figura 8.3 O Método de Euler.

O Exemplo 8.2 ilustra o uso do Método de Euler para modelar o problema, muito simples, do movimento de um caixote com velocidade constante.

Exemplo 8.2 Levantamento de um Caixote com Velocidade Constante

Um caixote é levantado do chão (usando, por exemplo, uma talha) com uma velocidade constante v de 0,2 m/s. Suponha que, em um modelo discreto do sistema, o incremento de tempo seja 1 s. A que altura chega o caixote após cada um dos primeiros três incrementos?

Solução Para começar, definimos as variáveis:

$$Y_0 = 0 \text{ m } v = \frac{\Delta Y_i}{\Delta t} = 0{,}2 \text{ m/s } \Delta t = 1 \text{ s}$$

De acordo com a Equação (8.2),

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_0 + v\Delta t \\ &= 0 + 0{,}2(1) \\ &= 0{,}2 \text{ m} \\ Y_2 &= Y_1 + v\Delta t \\ &= 0{,}2 + 0{,}2(1) \\ &= 0{,}4 \text{ m} \\ Y_3 &= Y_2 + v\Delta t \\ &= 0{,}4 + 0{,}2(1) \\ &= 0{,}6 \text{ m} \end{aligned}$$

A Figura 8.4 mostra um gráfico dos resultados.

Leis da Natureza e Taxas de Variação Respondendo à segunda pergunta, existem várias formas de determinar a taxa de variação. Às vezes, como no Exemplo 8.2, a taxa de variação pode ser um dado do problema. Na maioria das vezes, porém, precisamos de um modelo do comportamento *esperado* do sistema para estimar a taxa de variação. Como vimos no Capítulo 4, um modelo pode ser teórico ou empírico; no caso dos modelos teóricos, prevemos o comportamento usando leis da natureza.

A título de ilustração, considere a previsão da velocidade de um

caixote que cai de uma prateleira. No Exemplo 8.1, determinamos *empiricamente* a velocidade do caixote em diferentes instantes de tempo a partir de dados experimentais a respeito da altura do caixote em cada estado. Nos séculos XVII e XVIII, Galileu, Newton e outros realizaram experimentos semelhantes, que levaram ao resultado *teórico* que ficou conhecido como Lei da Gravitação Universal de Newton. Graças a este resultado, hoje sabemos que, desprezando a resistência do ar, todos os corpos próximos da superfície da Terra caem com uma aceleração de aproximadamente 9,81 m/s^2. Como a aceleração é a taxa de variação da velocidade, podemos usar a lei da gravitação para estimar a velocidade em cada estado de um corpo que está caindo sob a ação da gravidade, como ilustra o Exemplo 8.3.

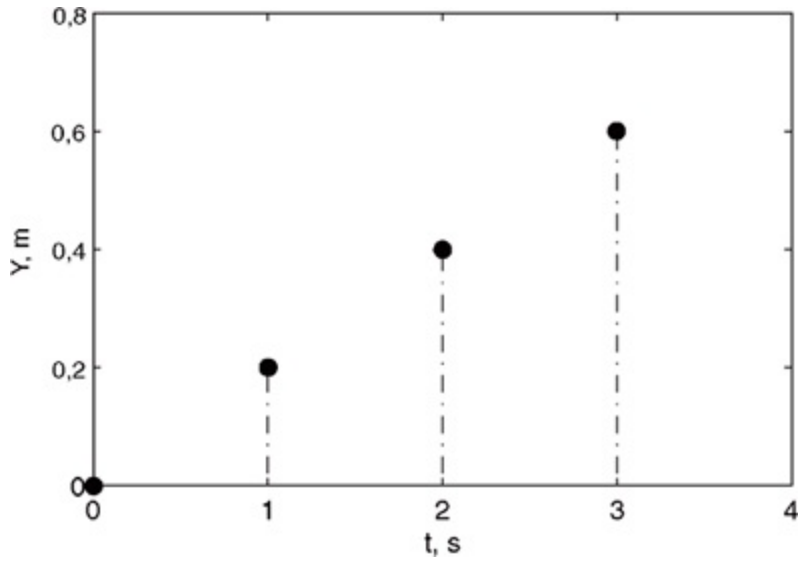


Figura 8.4 Gráfico da altura em função do tempo no modelo discreto de uma caixa que está sendo levantada com velocidade constante, para os dados do Exemplo 8.2.

Exemplo 8.3 Uso da Lei da Gravidade para Prever a Velocidade de um Objeto em Queda

Um caixote de 140 kg cai de uma prateleira situada a 2 m do solo. Use um modelo no tempo, com um incremento de 0,1 s, para estimar a velocidade do caixote 0,1 s após o início da queda.

Solução De acordo com a lei da gravidade, a aceleração do caixote é 9,81 m/s^2. Supondo que o caixote está inicialmente em repouso,

$$v_0 = 0 \text{ m/s } a = 9{,}81 \text{ m/s}^2 \Delta t = 0{,}1 \text{ s}$$

Como a aceleração a é a taxa de variação da velocidade v,

$$a = \frac{\Delta v_0}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t} = -9{,}81$$

Explicitando v_1, obtemos

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 + a\Delta t \\ &= 0 - 9{,}81\ (0{,}1) \\ &= -0{,}981 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Assim, a velocidade prevista para $t = 0{,}1$ s usando o modelo teórico discreto é –0,981 m/s. É interessante comparar este valor com o resultado experimental do Exemplo 8.1, segundo o qual a velocidade no instante $t = 0{,}1$ s é de 1,5 m/s. Por que o caixote parece estar se movendo mais depressa no modelo experimental do que no modelo teórico? *Sugestão*: Compare as velocidades iniciais nos dois modelos.

8.3 LANÇAMENTO DE UMA BOLA DE *SOFTBALL*

No Capítulo 4, discutimos o problema da determinação dos parâmetros de uma atiradeira gigante para lançar uma bola de *softball* contra um alvo. Para fazer previsões, criamos um modelo *empírico* do processo de lançamento, usando dados experimentais obtidos a partir de lançamentos de teste. Nesta seção, vamos considerar alguns dos elementos básicos necessários para criar um modelo *teórico* do sistema de lançamento. Mais especificamente, vamos discutir o seguinte problema:

> Uma bola de *softball* é lançada verticalmente para cima, em um dia sem vento, com uma velocidade inicial de 20 m/s. Qual é a altura máxima atingida pela bola, quanto tempo a bola permanece no ar e qual é a velocidade da bola no momento em que atinge o solo?

Um problema parecido é proposto em muitos livros de física do segundo grau. Para torná-lo tratável, os livros quase sempre supõem que a única força que age sobre a bola após o lançamento é a força da gravidade, ou seja, os livros ignoram todas as outras forças, entre elas a resistência do ar, também conhecida como *força de arrasto*. Essas condições são chamadas de "condições do vácuo"; é como se o lançamento tivesse acontecido no interior de uma câmara de vácuo. Em nosso enunciado do problema, dissemos apenas que o lançamento é executado em um "dia sem vento", ou seja, admitimos implicitamente a existência do ar.

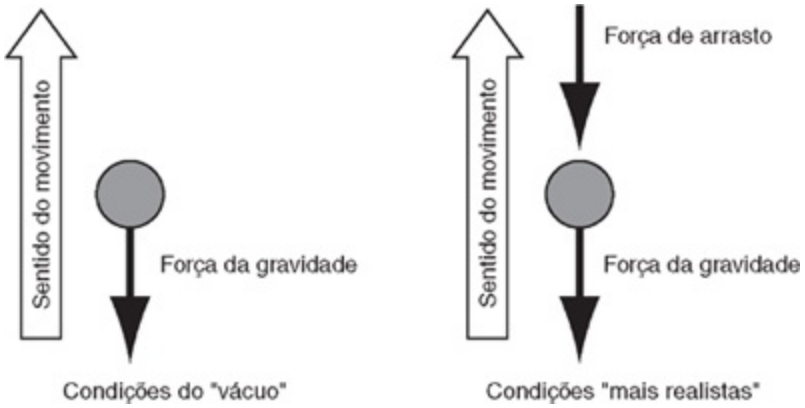


Figura 8.5 As forças que agem sobre uma bola imediatamente após o lançamento. Os livros de física do segundo grau quase sempre supõem "condições de vácuo", nas quais a única força que age sobre a bola é a força da gravidade. Um modelo mais realista inclui a força de arrasto associada à resistência do ar, que tem o sentido contrário ao do movimento da bola.

Vamos criar duas versões do modelo teórico discreto da trajetória da bola, uma em que a resistência do ar é ignorada e outra em que a resistência do ar é incluída (Figura 8.5). O que vamos descobrir é que, embora o modelo discreto seja apenas uma aproximação da trajetória "real", ele permite levar em conta efeitos importantes, como a resistência do ar, que seriam muito difíceis de modelar de outra forma, e, portanto, conduz a uma solução mais realista.

8.3.1 Definição do Problema e Plano de Ataque

Como sempre, vamos resolver o problema usando a abordagem padrão: *definir* o problema, *explorar* as possíveis abordagens, *planejar* um ataque e *implementar* o plano.

Definir O primeiro passo para resolver esse problema é ter certeza de que o compreendemos perfeitamente. Isso significa, entre outras coisas, identificar as grandezas conhecidas e desconhecidas do problema, desenhar um diagrama, definir o problema em termos de variáveis e reformular o problema em termos mais claros ou mais específicos. Basicamente, esse problema diz respeito à modelagem da trajetória (série de estados intermediários) de uma bola de *softball* lançada verticalmente para cima com uma dada velocidade inicial. Uma vez modelada a trajetória, podemos responder a perguntas específicas como a altitude máxima atingida pela bola, o tempo que a bola permanece no ar e a velocidade da bola no momento em que atinge o solo.

O estado de um sistema é definido pelos valores das propriedades de interesse, que, por sua vez, são representadas pelas variáveis de estado. O estado de um objeto em movimento é determinado por três propriedades: posição, velocidade e aceleração. A Figura 8.6 mostra um exemplo de trajetória usando um modelo discreto em termos dessas variáveis, e a Tabela 8.1 mostra as variáveis e seus valores, quando conhecidos. Definimos y_{apogeu} como a altura máxima atingida pela bola, e t_{impacto} e v_{impacto} como o instante em que a bola se choca com o solo e a velocidade da bola nesse instante, respectivamente.

Depois dessa análise preliminar, podemos adotar um novo enunciado para o problema:

> Criar um modelo discreto para a trajetória de uma bola de *softball* lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial $v_0 = 20$ m/s e estudar o modelo do instante $t = 0$ até o instante em que a bola se choca com o solo. Examinando os estados intermediários, determinar a altitude máxima y_{apogeu}, o instante em que a bola se choca com o solo, t_{impacto}, e a velocidade

nesse instante, v_{impacto}.

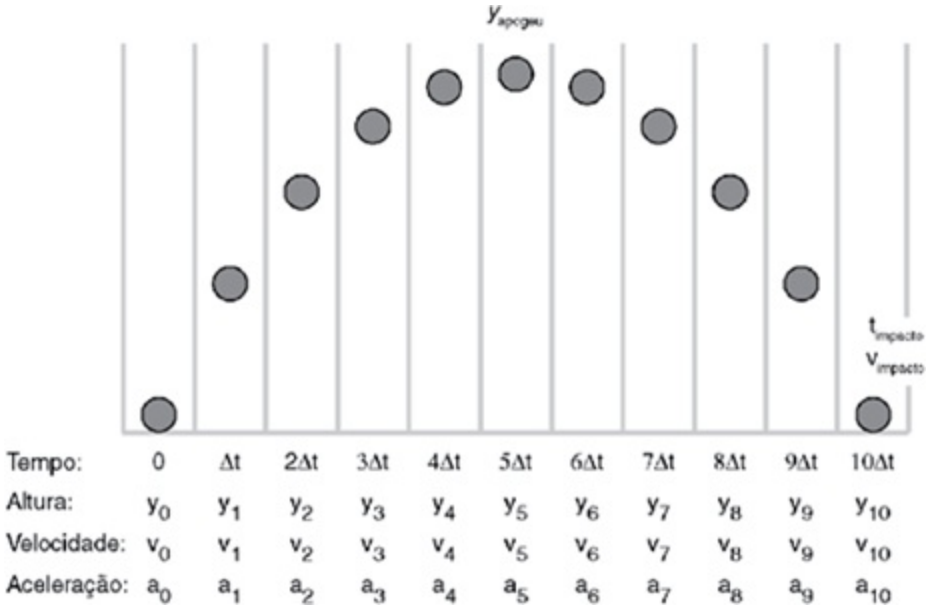


Figura 8.6 Trajetória da bola.

TABELA 8.1 Variáveis de estado para modelar a trajetória de uma bola

Nome	Descrição	Tipo	Valor
t_i	Tempo	Comportamental	Desconhecido
$t_{impacto}$	Instante do impacto	Comportamental	Desconhecido
$V_{(t)}$	Velocidade (função do tempo)	Comportamental	Desconhecido
V_0	Velocidade inicial	Ambiental	20 m/s
$V_{impacto}$	Velocidade no instante do impacto	Comportamental	Desconhecido
$Y_{(t)}$	Altura (função do tempo)	Comportamental	Desconhecido
Y_0	Altura inicial	Ambiental	0 m
Y_{apogeu}	Altura máxima	Comportamental	Desconhecido

Explorar Este estágio é o de pré-planejamento, no qual verificamos se

o problema faz sentido, elaboramos uma lista das suposições que devem ser feitas, identificamos os conceitos importantes e as abordagens possíveis e avaliamos que nível de entendimento é necessário para resolver o problema. A solução desse problema exige a *análise* das forças que agem sobre a bola e a *aplicação* das Leis de Newton e do Método de Euler.

Vamos supor que a bola está sujeita a duas forças ao longo da trajetória: a força da gravidade e a força de arrasto. Como a força de arrasto depende da velocidade, vamos adotar um modelo empírico bastante comum no qual a força de arrasto é proporcional ao quadrado da velocidade.

Planejar A Figura 8.7 mostra, de forma esquemática, o plano para resolver o problema. Vamos criar dois modelos, um ignorando e outro levando em conta a força de arrasto, e comparar os resultados. Nos dois casos, começamos por escrever equações diferença que descrevem as mudanças das variáveis de estado de um estado para o seguinte. Em seguida, analisamos o comportamento da bola desde o momento em que é lançada até o momento do impacto. A partir dos resultados, determinamos os valores de y_{apogeu}, t_{impacto} e v_{impacto}. A forma das equações diferença será discutida com mais detalhes ao estudarmos os dois casos separadamente.

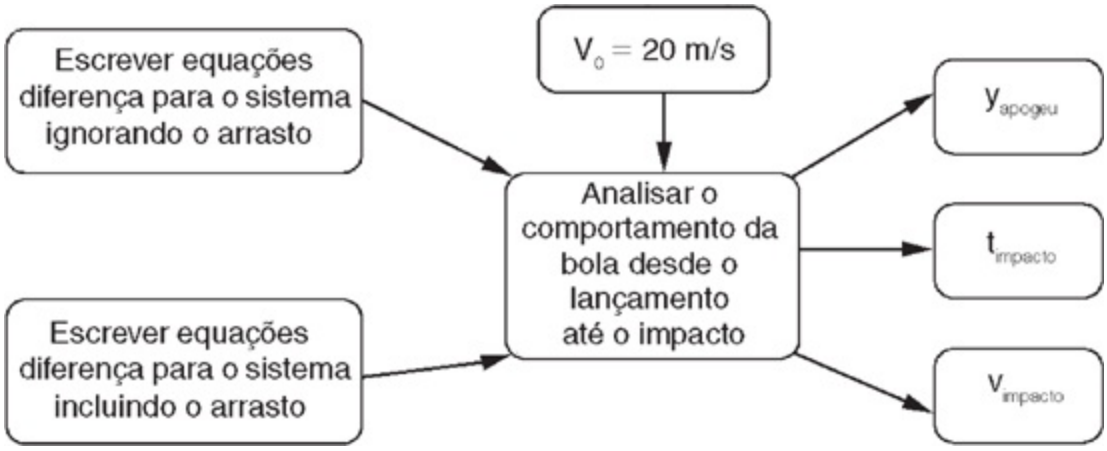


Figura 8.7 Plano para modelar o lançamento de uma bola.

8.3.2 Modelagem da Trajetória da Bola sem Arrasto

Antes de desenvolver um modelo mais preciso, que leva em conta a força de arrasto, vamos formular um modelo simplificado, que considera apenas o efeito da força da gravidade sobre a trajetória da bola, escrever as equações de estado do modelo e usá-las para calcular os valores das variáveis de estado desde o instante do lançamento até o instante do impacto.

Formulação das Equações de Estado O plano para formular as equações de estado tem três etapas:

1. Uma vez conhecida a altura da bola em um estado, podemos determinar a altura no estado seguinte se conhecermos a velocidade da bola, que é a taxa de variação da posição.
2. Analogamente, podemos determinar a velocidade no estado seguinte se conhecermos a velocidade e a aceleração, que é a taxa de variação da velocidade.
3. Finalmente, podemos determinar a aceleração usando as Leis de Newton, que descrevem a relação entre a aceleração de um objeto e as forças a que está submetido.

Para começar, escrevemos a equação de estado para a altura.

$$v_i = \frac{\Delta y_i}{\Delta t} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t}$$
$$y_{i+1} = y_i + v_i \Delta t$$

Em seguida, escrevemos a equação de estado para a velocidade.

$$a_i = \frac{\Delta v_i}{\Delta t} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t}$$
$$v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t$$

Finalmente, precisamos conhecer a aceleração. Como mostra a Figura 8.8, a única força que age sobre a bola após o lançamento é a força da gravidade. De acordo com a Segunda Lei de Newton, no caso

de um objeto de massa constante a força total é igual à massa do objeto vezes a aceleração. A força gravitacional é igual ao peso *mg* do objeto, onde $g = 9{,}81$ m/s^2. Assim, temos:

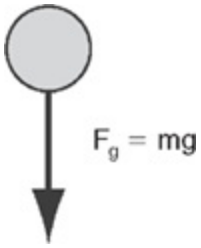


Figura 8.8 A única força que age sobre a bola entre o momento do lançamento e o momento do impacto é a força da gravidade.

$$F = ma = mg$$

e a aceleração a_i em todos os estados é igual à constante g.

Cálculo dos Valores das Variáveis de Estado Nosso modelo agora se resume a três equações de estado, que podem ser usadas para calcular os valores das variáveis de estado em cada estado:

$$y_{i+1} = y_i + v_i \Delta t$$
$$v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t$$
$$a_{i+1} = g$$

Uma forma conveniente de calcular os valores das variáveis de estado é preparar uma tabela na qual as colunas são as variáveis de estado e cada linha corresponde a um estado. A Tabela 8.2 mostra o resultado dos cálculos para os três primeiros estados. Cada linha da tabela contém a fórmula das equações de estado e os cálculos numéricos. A primeira linha da tabela corresponde ao estado inicial da bola, no qual

$$y_0 = 0 \qquad v_0 = 20 \qquad a_0 = g = -9{,}81$$

A segunda linha da tabela corresponde ao estado 1, supondo um incremento do tempo $\Delta t = 0{,}1$ s. Como era de esperar, a altura aumentou em relação ao estado 0 e a velocidade diminuiu. A terceira

linha corresponde ao estado 2. Observe que, no preenchimento da tabela, os valores calculados para cada linha dependem apenas de valores da linha imediatamente acima.

Conceitualmente, seria fácil acrescentar novas linhas à tabela, calculando o estado da bola para incrementos sucessivos de tempo até a bola atingir a altura máxima, começar a cair e, finalmente, voltar à altura zero. Na prática, porém, seria tedioso fazer isso à mão. Esse é o tipo de tarefa ideal para um computador: muitas repetições de cálculos aritméticos simples. Uma forma de executar os cálculos em um computador é usar uma planilha eletrônica, que dispõe as fórmulas em uma tabela parecida com a Tabela 8.2. Uma segunda abordagem é escrever um programa em uma linguagem como MATLAB (ou várias outras) que usa um "loop" para calcular sequencialmente as linhas da tabela.

TABELA 8.2 Resultados dos cálculos para os primeiros três estados da trajetória da bola

Estado	Tempo	Altura	Velocidade	Aceleração
0	t_0	y_0	v_0	a_0
	0	0	20	g
	0	0	20	−9,81
1	$t_1 = t_0 + \Delta t$	$y_1 = y_0 + v_0 \Delta t$	$v_1 = v_0 + a_0 \Delta t$	$a_1 = g$
	$0 + 0{,}1$	$0 + 20(0{,}1)$	$20 - 9{,}81(0{,}1)$	−9,81
	0,1	2,0	19,02	−9,81
2	$t_2 = t_1 + \Delta t$	$y_2 = y_1 + v_1 \Delta t$	$v_2 = v_1 + a_1 \Delta t$	$a_2 = g$
	$0{,}1 + 0{,}1$	$2{,}0 + 19{,}02(0{,}1)$	$19{,}02 - 9{,}81(0{,}1)$	−9,81
	0,2	3,90	18,04	−9,81

TABELA 8.3 Cálculos.

Estado	*t* Tempo, s	y Altura, m	*v* Velocidade, m/s	*a* Aceleração, m/s^2	
0	0,0	0,00	20,00	−9,81	
1	0,1	2,00	19,02	−9,81	
2	0,2	3,90	18,04	−9,81	

…	…	…	…	…	
19	1,9	21,22	1,36	−9,81	
20	2,0	21,36	0,38	−9,81	
21	2,1	21,40	−0,60	−9,81	*Apogeu*
…	…	…	…	…	
40	4,0	3,48	−19,24	−9,81	
41	4,1	1,56	−20,22	−9,81	
42	4,2	−0,46	−21,20	−9,81	*Impacto*

A Tabela 8.3 mostra algumas linhas extraídas do cálculo completo da trajetória de uma bola de *softball*, desprezando a força de arrasto, desde o momento do lançamento até o momento do impacto, com um incremento no tempo Δt de 0,1 s. Os valores da altura e da velocidade para todos os estados estão plotados em função do tempo na Figura 8.9. Na transição do estado 20 para o 21, o sinal da velocidade muda de positivo para negativo, o que significa que a bola chegou ao apogeu e vai começar a descer. O valor máximo de y na tabela é o do estado 21,

$$y_{\text{apogeu}} = 21{,}40\,\text{m}$$

Após o estado 21, a altura diminui constantemente até chegar a zero entre os estados 41 e 42. Tomando o estado 42 como o momento do impacto,

$$t_{\text{impacto}} = 4{,}2\,\text{s}$$
$$y_{\text{impacto}} = -21{,}20\,\text{m/s}$$

Um dos resultados curiosos do modelo é que a velocidade no momento do impacto, – 21,2 m/s, é *maior* que a velocidade inicial de 20 m/s. Fisicamente, isto é impossível; o modelo leva a este valor porque usamos um incremento de tempo finito. O erro diminuirá se usarmos um incremento de tempo menor. Assim, por exemplo, se reduzirmos Δt para 0,001 s, o impacto com o solo ocorrerá entre os

estados 4079 e 4080 e os novos valores no momento do apogeu e no momento do impacto serão

$$y_{\text{apogeu}} = 20{,}40\ \text{m}$$
$$t_{\text{impacto}} = 4{,}08\ \text{s}$$
$$v_{\text{impacto}} = -20{,}01\ \text{m/s}$$

Quanto menor o incremento de tempo, mais próximo o valor de v_{impacto} estará de 20 m/s.

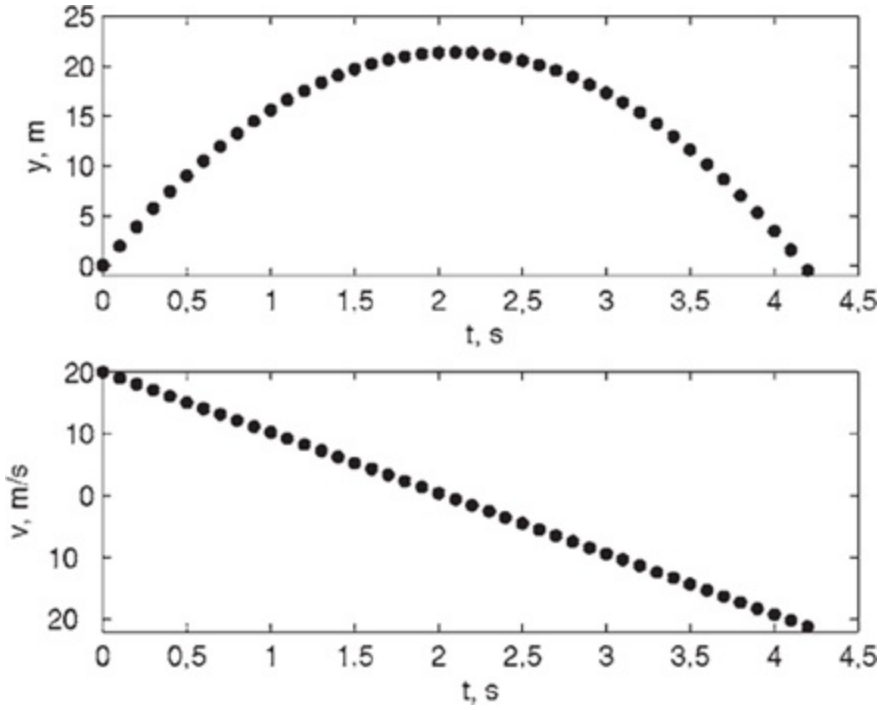


Figura 8.9 Gráficos da altura e da velocidade da bola em função do tempo, desprezando a força de arrasto.

8.3.3 Modelagem da Trajetória da Bola com Arrasto

Vamos agora passar a um modelo mais preciso da trajetória da bola que leva em conta o efeito da força de arrasto. A abordagem básica continua a mesma: considerar a trajetória como uma progressão de estados, usando a altura e a velocidade em um estado para calcular a altura no estado seguinte e a velocidade e aceleração em um estado para calcular a velocidade no estado seguinte. A diferença é que a

aceleração não é mais constante, mas deve ser calculada para cada estado a partir da força total a que a bola está sujeita (a soma da força da gravidade e da força de arrasto) e da Segunda Lei de Newton.

Resistência do Ar e Força de Arrasto Força de arrasto é a força que se opõe ao movimento de um projétil por causa da resistência do ar. Como qualquer pessoa que coloca a mão para fora da janela de um carro em movimento pode perceber, o módulo dessa força depende da velocidade e da forma do objeto. Como as experiências mostram que a força de arrasto é proporcional ao *quadrado* da velocidade, ela é expressa pela equação *empírica*

$$F_{\text{arrasto}} = k_d v^2$$

A constante k_d depende do tamanho e forma do objeto e também das propriedades do fluido (o ar, no caso) através do qual o objeto está se movendo. Normalmente, k_d é expressa através da equação empírica

$$k_d = \frac{C_D}{2}\rho A \qquad (8.4)$$

onde ρ é a massa específica do fluido, A é a seção reta do objeto, e C_D é o *coeficiente de arrasto*, que depende da forma do objeto. O coeficiente de arrasto teórico de uma esfera é aproximadamente 0,5. A Tabela 8.4 mostra as outras constantes físicas necessárias para calcular a força de arrasto a que está sujeita uma bola de *softball.* Substituindo os parâmetros da Equação (8.4) por valores numéricos, obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} F_{\text{arrasto}} &= k_d v^2 \\ k_d &= \frac{C_D}{2}\rho A \\ &= \frac{0{,}5}{2}(1{,}29)(\pi)(0{,}0485)^2 \\ &= 0{,}0024\ \text{kg/m} \end{aligned} \qquad (8.5)$$

TABELA 8.4 Constantes físicas que influenciam a trajetória de uma bola de *softball*,

levando em conta a resistência do ar

Descrição	Valor
Raio da bola	4,85 cm
Massa da bola	0,185 kg
Coeficiente de arrasto	0,5
Massa específica do ar	1,29 kg/m^3

Formulação das Equações de Estado Como no caso anterior, começamos por definir a velocidade como a taxa de variação da altura com o tempo e a aceleração como a taxa de variação da velocidade com o tempo:

$$v_i = \frac{\Delta y_i}{\Delta t} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t}$$
$$a_i = \frac{\Delta v_i}{\Delta t} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t}$$

A partir dessas equações, obtemos as equações de estado para determinar a altura e a velocidade no estado seguinte.

$$y_{i+1} = y_i + v_i \Delta t$$
$$v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t$$

Resta determinar a aceleração em cada estado, o que vamos fazer calculando a força total que age sobre a bola e aplicando a Segunda Lei de Newton. Como mostra a Figura 8.10, a bola está sujeita a duas forças: a força gravitacional F_g e a força de arrasto $F_{a.}$ A força F_g está sempre orientada na direção vertical e aponta para baixo, enquanto a força F_a está sempre orientada na direção do movimento da bola e aponta no sentido contrário ao do movimento. Assim, quando a bola está subindo, F_a aponta para baixo; quando a bola está caindo, F_a aponta para cima. Levando este fato em consideração, podemos escrever a Equação 8.5 na forma

$$F_{\text{arrasto}} = -\text{sign}(v)\, k_d v^2$$

onde sign(v) $=$ $+$ 1 quando o sentido da velocidade v é para cima, e sign(v) $=$ $-$ 1 quando o sentido da velocidade v é para baixo. A força total F é a soma de F_g e F_a:

$$\begin{aligned} F &= F_g + F_{\text{arrasto}} \\ &= mg - \text{sign}(v)\, k_d v^2 \end{aligned}$$

Finalmente, determinamos a aceleração aplicando a Segunda Lei de Newton:

$$\begin{aligned} F &= ma \\ a &= \frac{F}{m} \end{aligned}$$

Assim, a aceleração no estado $i + 1$ é

$$a_{i+1} = \frac{mg - \text{sign}(v_{i+1})\, k_d v_{i+1}^2}{m} \qquad (8.6)$$

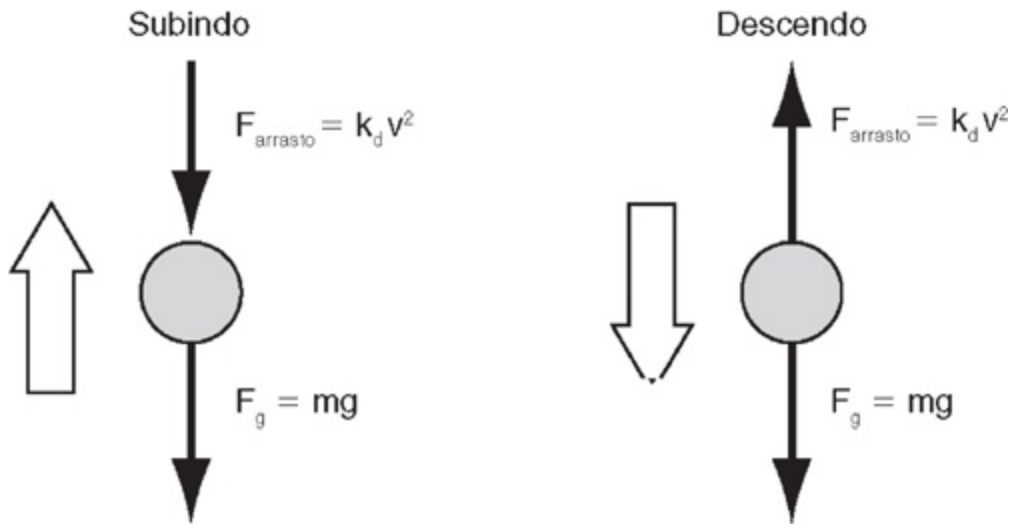


Figura 8.10 Forças que atuam sobre a bola após o lançamento. A força de gravidade F_g aponta sempre para baixo e a força de arrasto F_a aponta no sentido contrário ao do movimento da bola.

De acordo com a Equação (8.6), a aceleração em um dado estado depende apenas da velocidade nesse estado e de algumas constantes físicas. Observe também que, se $k_d = 0$, a aceleração se reduz às condições do "vácuo", nas quais $a = g$ para qualquer valor de i.

Cálculo dos Valores das Variáveis de Estado Como no caso anterior, temos três equações de estado: uma para a altura, uma para a velocidade e uma para a aceleração.

$$y_{i+1} = y_i + v_i \Delta t$$
$$v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t$$
$$a_{i+1} = \frac{mg - \text{sign}(v_{i+1})\, k_d v_{i+1}^2}{m}$$

A Tabela 8.5 mostra o resultado dos cálculos para os três primeiros estados usando os seguintes valores para os parâmetros e constantes:

$$\Delta t = 0{,}1\,\text{s} \qquad v_0 = 20\,\text{m/s}$$
$$m = 0{,}185\,\text{kg} \quad g = -9{,}81\,\text{m/s}^2 \quad k_d = 0{,}0024\,\text{kg/m}$$

Observe que, no preenchimento da tabela, os valores calculados para cada linha dependem apenas dos valores da linha imediatamente acima e da mesma linha.

A Figura 8.11 mostra os gráficos da altura, velocidade e aceleração da bola em função do tempo. Como os gráficos foram feitos usando um incremento Δt de 1 milissegundo, o erro associado ao tamanho finito do incremento é muito pequeno. Os valores obtidos para a altura máxima, o momento do impacto e a velocidade no momento do impacto são os seguintes:

$$y_{\text{apogeu}} = 16{,}39\,\text{m}$$
$$t_{\text{impacto}} = 3{,}66\,\text{s}$$
$$v_{\text{impacto}} = -16{,}20\,\text{m/s}$$

TABELA 8.5 Resultados dos cálculos para os primeiros três estados da trajetória da bola, levando em conta a força de arrasto

Estado	Tempo	Altura	Velocidade	Aceleração
0	t_0	y_0	v_0	$\frac{mg - \text{sign}(v_0)\, k_d v_0^2}{m}$
	0	0	20	$\frac{(0{,}185)(-9{,}81) - (0{,}0024)(20)^2}{0{,}185}$
	0	0	20	−14,96
1	$t_1 = t_0 + \Delta t$	$y_1 = y_0 + v_0 \Delta t$	$v_1 = v_0 + a_0 \Delta t$	$\frac{mg - \text{sign}(v_1)\, k_d v_1^2}{m}$
	$0 + 0{,}1$	$0 + 20(0{,}1)$	$20 - 14{,}96(0{,}1)$	$\frac{(0{,}185)(-9{,}81) - (0{,}0024)(18{,}50)^2}{0{,}185}$
	0,1	2,0	18,50	−14,22
2	$t_2 = t_1 + \Delta t$	$y_2 = y_1 + v_1 \Delta t$	$v_2 = v_1 + a_1 \Delta t$	$\frac{mg - \text{sign}(v_2)\, k_d v_2^2}{m}$
	$0{,}1 + 0{,}1$	$2{,}0 + 18{,}50(0{,}1)$	$18{,}50 - 14{,}22(0{,}1)$	$\frac{(0{,}185)(-9{,}81) - (0{,}0024)(17{,}08)^2}{0{,}185}$
	0,2	3,85	17,08	−13,57

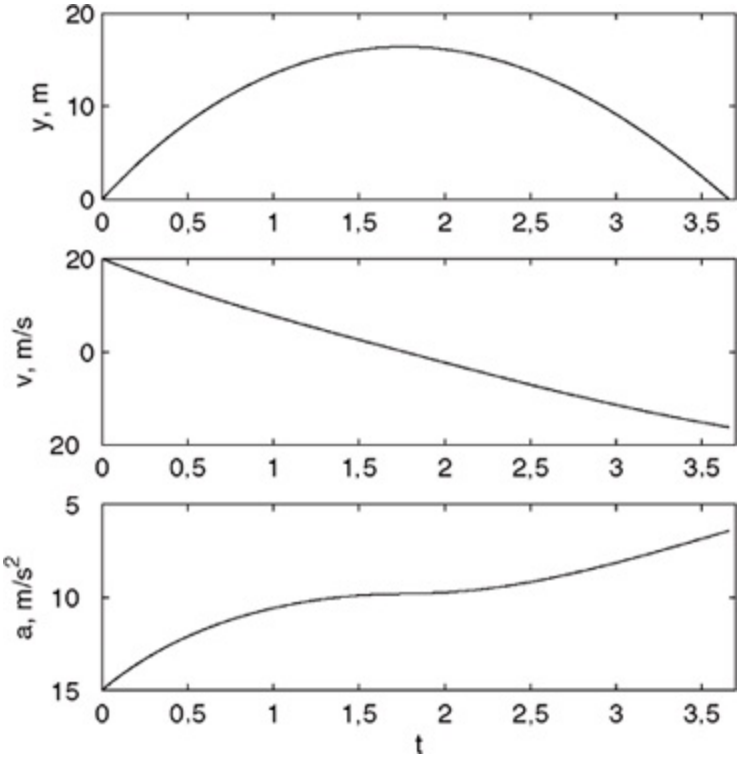


Figura 8.11 Altitude, velocidade e aceleração de uma bola de *softball* em função do tempo, levando em conta a força de arrasto. O modelo supõe que a bola foi lançada com velocidade inicial de 20 m/s e o incremento de tempo utilizado foi $\Delta t = 0{,}001$ s.

Todos esses valores são menores que no caso em que a força de

arrasto é ignorada. Mais especificamente, y_{apogeu} é 20% menor, t_{impacto} é 7% menor e v_{impacto} é 14% menor.

O segredo para entender o comportamento do sistema com a inclusão da força de arrasto é examinar o gráfico da aceleração em função de tempo, que aparece na parte de baixo da Figura 8.11. Na ausência da força de arrasto, a aceleração é constante e igual a *g*, ou 9,81 m/s^2. Na presença da força de arrasto, a aceleração varia de estado para estado. No centro do gráfico, quando a bola está no apogeu e a velocidade é zero, a força de arrasto também é zero e a aceleração é igual a *g*. Quando a bola está subindo, a aceleração é *maior* (em valor absoluto) do que *g* porque a resistência do ar ajuda a "puxar" a bola para baixo, aliando-se à força da gravidade. Quando a bola está descendo, a aceleração é *menor* (em valor absoluto) do que *g* porque a resistência do ar tende a "frear" a bola, combatendo a força da gravidade. Um exemplo extremo é o do paraquedas; nesse caso, a força de arrasto é tão grande que, depois de algum tempo, a velocidade se torna constante. O "efeito paraquedas" é visível no gráfico da velocidade em função do tempo da Figura 8.11; observe que, na extremidade direita do gráfico, a variação da velocidade com o tempo se torna menos acentuada e a velocidade parece tender para um valor constante.

O efeito da força de arrasto é muito maior quando lançamos a bola com uma velocidade inicial elevada. A Figura 8.12 mostra uma comparação entre as trajetórias de duas bolas lançadas com uma velocidade inicial de 50 m/s, uma no ar e outra no vácuo. Quando a resistência do ar está presente, a altura máxima é menos de metade da altura atingida na ausência de ar. Além disso, a bola leva um tempo aproximadamente 30% menor para cair de volta. Mais notável, porém, é o "efeito paraquedas". No gráfico da velocidade em função do tempo, a velocidade da bola, na presença de ar, jamais ultrapassa, em módulo, o valor de 25 m/s. Durante a queda, a força de arrasto aumenta proporcionalmente ao *quadrado* da velocidade até se tornar

igual à força gravitacional. A partir desse ponto, a força total que age sobre a bola é zero e a bola para de acelerar. A velocidade para a qual isso acontece é conhecida como *velocidade terminal*.

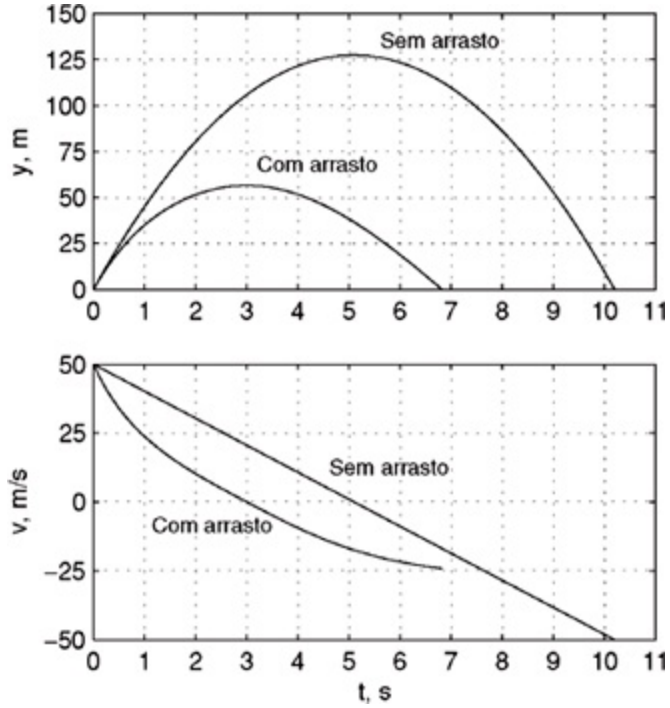


Figura 8.12 Efeito da força de arrasto sobre a altura e velocidade de uma bola lançada com velocidade inicial de 50 m/s.

Para terminar, se olharmos de novo o problema da atiradeira do Capítulo 4, no qual o objetivo é determinar os parâmetros de lançamento para atingir um alvo, é evidente que teríamos que levar em consideração a força de arrasto para criar um modelo teórico preciso.

8.3.4 Modelos Contínuos e Discretos

Você talvez se lembre das fórmulas simples, ensinadas nos cursos de física do segundo grau, que fornecem a velocidade e a distância atingida por um objeto depois de passar um tempo t submetido a uma aceleração a:

$$v = at \qquad (8.7a)$$

$$y = \frac{1}{2}at^2 \qquad (8.7b)$$

Se essas fórmulas existem, por que não foram usadas na seção anterior para calcular a altura máxima atingida pela bola? Antes de explicar a razão, vamos ver como as fórmulas poderiam ser usadas. Para começar, essas fórmulas são válidas apenas nas condições de vácuo, já que não levam em conta a força de arrasto. O primeiro passo para calcular a altura máxima é determinar o intervalo de tempo t necessário para que a bola atinja essa altura. Supondo que a velocidade inicial da bola seja de 20 m/s, a primeira equação nos dá:

$$\begin{aligned} t &= \frac{v}{a} \\ &= \frac{20}{9{,}81} \\ &= 2{,}04\ \text{s} \end{aligned}$$

Se introduzirmos esse valor de t na segunda equação, ela nos fornecerá a distância que a bola percorreria, se a deixássemos cair, até atingir uma velocidade de 20 m/s. Este tempo é igual ao tempo que a velocidade da bola leva para chegar a zero se a bola for lançada com uma velocidade inicial de 20 m/s. Assim,

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}at^2 \\ &= \frac{1}{2}(9{,}81)(2{,}04)^2 \\ &= 20{,}39\ \text{m} \end{aligned}$$

Esse valor está muito próximo do valor $y_{\text{apogeu}} = 20{,}40$ m que obtivemos quando usamos um modelo discreto para a trajetória da bola com um incremento de tempo $\Delta t = 0{,}001$ s, e tivemos muito menos trabalho do que antes.

As Equações (8.7) são modelos *contínuos*. Isso significa que esses modelos são válidos para qualquer instante de tempo, ao contrário dos modelos discretos, que são definidos apenas em certos instantes. O modelo contínuo de um sistema dinâmico pode ser muito útil,

contanto que seja possível encontrar um. Esta é uma das aplicações importantes de um ramo da matemática chamado *equações diferenciais*. Não vamos falar muito a respeito de equações diferenciais neste livro, exceto para dizer que as Equações (8.7) são soluções das seguintes equações diferenciais:

$$\frac{dy}{dt} = v \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = a \tag{8.8}$$

O processo de *formular* uma equação diferencial é muito semelhante ao processo de formular as equações diferença que usamos em nossos modelos. O processo de resolvê-las, porém, é muito diferente. Enquanto as Equações (8.8) têm soluções simples, algumas equações diferenciais que parecem simples podem ter soluções muito complexas, que são extremamente difíceis de obter. Assim, por exemplo, a equação diferencial para a velocidade de uma bola com arrasto é

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - k_d v^2}{m}$$

Note a semelhança com a Equação (8.6). A solução contínua dessa equação diferencial, porém, é muito mais complicada que a solução sem arrasto:

$$v = \frac{\sqrt{mg}\tan\left(\sqrt{gk_d}\left[-\left(\frac{t}{\sqrt{m}}\right) + \frac{\arctan\left(\frac{v_0\sqrt{k_d}}{\sqrt{mg}}\right)}{\sqrt{gk_d}}\right]\right)}{\sqrt{k_d}}$$

Muitas vezes, os cursos introdutórios de cálculo e física simplificam ou “idealizam” os problemas, desprezando, por exemplo, a força de arrasto, para que eles possam ser resolvidos usando técnicas que os alunos conhecem. A desvantagem dessa tática é que os resultados da versão simplificada do problema podem ser muito diferentes dos

resultados do problema original. Assim, por exemplo, se desprezarmos a força de arrasto, um paraquedista chegará ao solo com a mesma velocidade que se o paraquedas não tivesse aberto! Embora os modelos discretos sejam aproximações dos modelos contínuos e apresentem problemas associados à natureza discreta dos estados, eles permitem incluir efeitos que são difíceis de expressar através de fórmulas e em geral podem ser implementados usando apenas cálculos aritméticos.

8.4 VAMOS FICAR SEM GASOLINA?

No Capítulo 1, o mundo foi descrito como uma grande rede de interconexões. Das coisas que nos unem, poucas são mais significativas que os recursos naturais limitados que todos nós temos que compartilhar para sobreviver. Um desses recursos é a água potável. Outro são os combustíveis usados para produzir energia. Nesta seção, vamos aplicar algumas das técnicas de modelagem que usamos para prever o tempo que uma bola leva para cair, para prever o tempo que as reservas de petróleo vão levar para se esgotar.

De todos os tipos de combustível que a sociedade usa para produzir energia, o petróleo é atualmente o mais importante. A Figura 8.13 mostra o consumo de vários tipos de energia nos Estados Unidos entre 1949 e 2005. O petróleo é, de longe, o mais consumido, seguido por outros "combustíveis fósseis", gás natural e carvão, que, juntamente com o petróleo, representaram 86% da energia consumida em 2005. Em seguida vem a energia nuclear, com 8% em 2005. As fontes de energia renováveis, como hidreletricidade, biomassa (etanol), energia geotérmica, energia solar e energia eólica, foram responsáveis por apenas 6% do consumo de energia em 2005. De todo o petróleo consumido, 66% em 2005 foi usado para transporte, enquanto 98% da energia usada para transporte veio do petróleo.

No restante desta seção, vamos, em primeiro lugar, examinar os

fundamentos do problema e alguns padrões de produção e consumo de petróleo em diferentes partes do mundo. Em seguida, vamos definir o problema proposto, que é modelar as reservas mundiais de petróleo como um grande tanque que está sendo drenado a diferentes taxas por diferentes países. Depois, vamos apresentar nossos três modelos principais:

- um modelo baseado na Lei de Conservação da Massa, que relaciona o fluxo de petróleo para diferentes países às reservas restantes;
- um modelo para a quantidade média de petróleo que uma pessoa consome por ano;
- um modelo para o aumento da população em diferentes partes do mundo.

Combinando esses três modelos, vamos prever a quantidade de petróleo consumida, ano após ano, até que as reservas se esgotem.

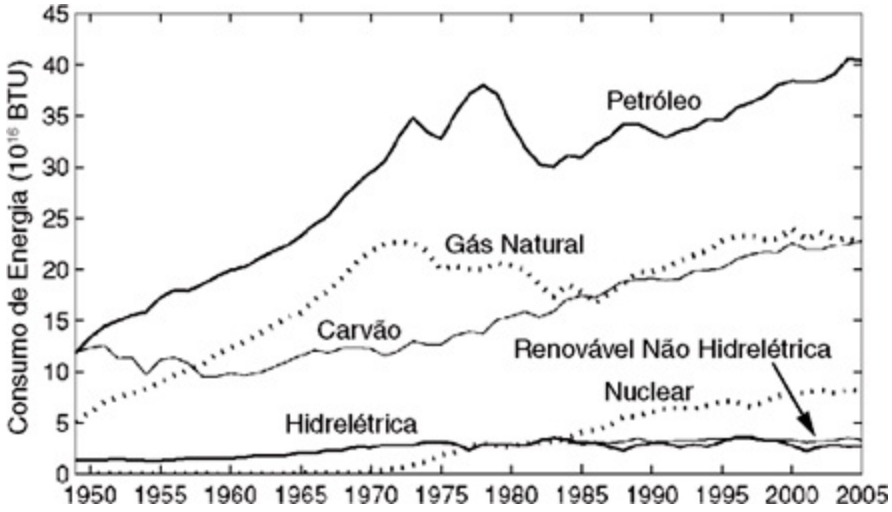


Figura 8.13 Consumo de energia nos Estados Unidos, de 1945 a 2005. Os recursos renováveis não hidrelétricos incluem energia geotérmica, biomassa, energia solar e energia eólica. Fonte: U.S. Energy Information Administration [Ene].

8.4.1 Fundamentos

Nosso modelo básico de consumo de petróleo consiste em considerar as reservas mundiais de petróleo como um grande tanque, com os países retirando petróleo desse tanque a taxas diferentes e com novas descobertas introduzindo petróleo no tanque. Se o petróleo for retirado do tanque mais depressa do que são feitas novas descobertas, que é o que está acontecendo no momento, o tanque irá secar. A questão é quando isso vai acontecer.

Quanto Petróleo Existe no Tanque? Não sabemos exatamente quanto petróleo existe debaixo da terra e com que facilidade pode ser recuperado. Em nosso modelo, vamos supor que o volume inicial de petróleo no tanque são as *reservas provadas*. De acordo com a Administração de Informação sobre Energia, do Departamento de Energia dos Estados Unidos, "reservas provadas são quantidades estimadas que a análise de dados geológicos e de engenharia demonstra, com razoável certeza, que podem ser recuperadas nas condições econômicas e operacionais vigentes" [Ene]. Existem diferentes estimativas para esta quantidade e diferentes opiniões quanto ao que significa ser "economicamente recuperável". Três fontes confiáveis, o *PB Statistical Review* [bp:06], o *Oil and Gas Journal* [oil05] e o *World Oil Magazine*, colocam as reservas provadas no final de 2005 entre 1,1 trilhão e 1,3 trilhão de barris; um barril equivale a 42 galões ou aproximadamente 159 litros de petróleo.[1] Em nosso modelo, vamos ser otimistas e adotar o limite superior de 1,3 trilhão de barris. Naturalmente, a vantagem de ter um modelo é que este número pode ser mudado com facilidade.

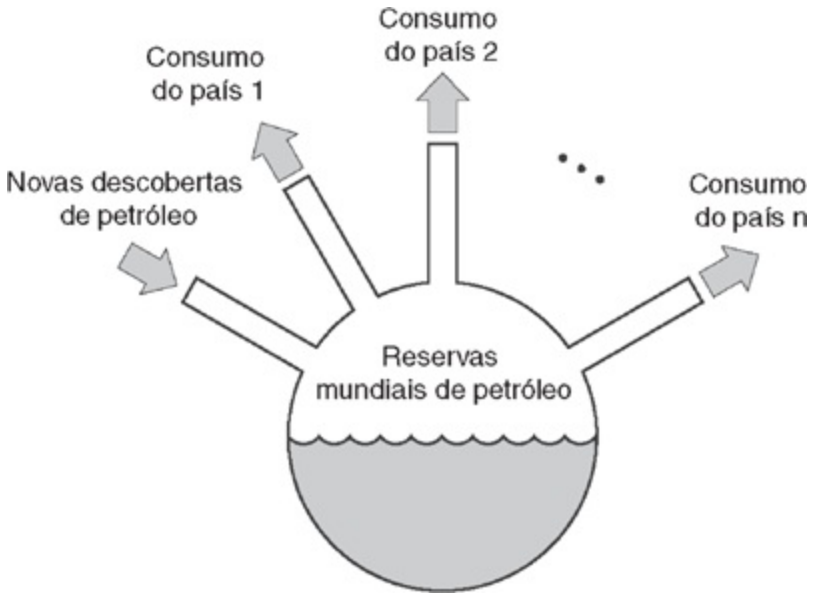


Figura 8.14 Modelamos as reservas de petróleo como um grande tanque, de onde diferentes países retiram petróleo a taxas diferentes.

A Figura 8.15 mostra a distribuição geográfica das reservas provadas, de acordo com o *BP Statistical Review 2006* [bp:06]. Mais de 60% das reservas estão no Oriente Médio e menos de 10% estão nas regiões da América do Norte e Ásia do Pacífico juntas. Como vamos ver na próxima seção, a distribuição do consumo de petróleo é bem diferente.

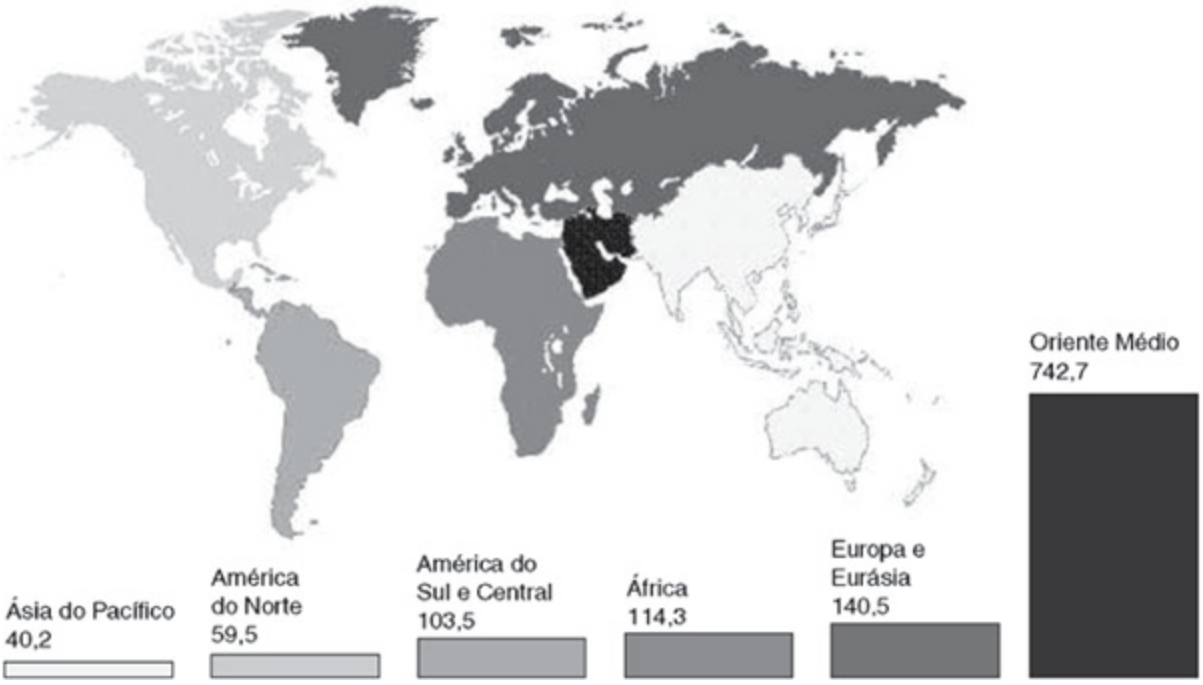


Figura 8.15 Reservas provadas de petróleo no fim de 2005, em trilhões de barris. Fonte: BP Statistical Review 2006 [bp: 06].

Para Onde Vai o Petróleo? A distribuição das reservas de petróleo é uma questão de geologia; a distribuição do consumo de petróleo é uma questão de economia. A grosso modo, a quantidade de petróleo que cada país consome depende de dois fatores: a população e o consumo *per capita*. Por trás desses números está a distribuição de renda em nosso planeta. Para resumir a história, a maior parte do consumo de petróleo está concentrada em um pequeno número de países ricos. A maioria das pessoas, por outro lado, vive em países pobres, com um baixo consumo de petróleo *per capita*. Mesmo assim, como a população total desses "países em desenvolvimento" é muito grande, eles são responsáveis por uma parcela significativa do consumo. Além disso, com o aumento da população e do padrão de vida dos países em desenvolvimento, o consumo de petróleo desses países tende a aumentar.

O Banco Mundial, que presta assistência técnica e financeira aos países em desenvolvimento, classifica a economia dos países em termos da *renda nacional bruta per capita* (RNB *per capita*), que é a

renda total do país dividida pela população. Com base nesse indicador, os países são divididos em quatro grupos:

TABELA 8.6 Classificação dos países quanto à Renda Nacional Bruta, de acordo com o Banco Mundial

Alta Renda (RNB *per capita* U$10.726 ou mais)			
Alemanha	Chipre	Ilha de Man	Macau, China
Andorra	Cingapura	Ilhas Cayman	Malta
Antigua & Barbuda	Coreia do Sul	Ilhas do Canal	Mônaco
Antilhas Holandesas	Dinamarca	Ilhas Faroé	Noruega
Arábia Saudita	Emirados árabes	Ilhas Virgens (EUA)	Nova Caledônia
Aruba	Eslovênia	Inglaterra	Nova Zelândia
Austrália	Espanha	Irlanda	Paraguai
áustria	Finlândia	Islândia	Polinésia Francesa
Bahamas	França	Israel	Porto Rico
Banrain	Grécia	Itália	Qatar
Bélgica	Groenlândia	Japão	Reino Unido
Bermuda	Guam	Kuwait	San Marino
Brunei Darussalam	Holanda	Liechtenstein	Suécia
Canadá	Hong Kong, China	Luxemburgo	Suíça
Renda Média Alta (RNB *per capita* U$3.466-U$10.725)			
África do Sul	Estônia	Lituânia	Rússia
Argentina	Gabão	Malásia	Samoa Americana
Barbados	Granada	Mayotte	Santa Lúcia
Belize	Guiné Equatorial	México	São Cristóvão e Névis
Botsuana	Hungria	Omã	São Vicente e Granadinas

Chile	Ilhas Marianas do Norte	Palau	Seychelles
Costa Rica	Ilhas Maurício	Panamá	Trinidad e Tobago
Croácia	Letônia	Polônia	Turquia
Dominica	Líbano	República Tcheca	Uruguai
Eslováquia	Líbia	Romênia	Venezuela
Renda Média Baixa (RNB *per capita* U$876-U$3.465)			
Albânia	Colômbia	Indonésia	República Dominicana
Angola	Congo	Irã	Samoa
Argélia	Cuba	Iraque	Sérvia e Montenegro
Armênia	Djibouti	Jamaica	Síria
Azerbaijão	Egito	Jordânia	Sri Lanka
Bielorrússia	El Salvador	Kiribati	Suazilândia
Bolívia	Equador	Lesoto	Surimane
Bósnia e Herzegovina	Filipinas	Macedônia	Tailândia
Brasil	Geórgia	Marrocos	Tonga
Bulgária	Guatemala	Micronésia	Tunísia
Cabo Verde	Guiana	Moldávia	Turcomenistão
Camarões	Honduras	Namíbia	Ucrânia
Cazaquistão	Ilhas Fiji	Nicarágua	Vanuatu
China	Ilhas Maldivas	Paraguai	
Cisjordânia e Faixa de Gaza	Ilhas Marshall	Peru	
Baixa Renda (RNB *per capita* U$875 ou menos)			
Afeganistão	Iêmen	Quirguistão	
Bangladesh	Ilhas Salomão	República Centro-Africana	
Benin	índia	República Democrática do	

		Congo
Burkina Faso	Laos	Ruanda
Burundi	Libéria	São Tomé e Príncipe
Butão	Madagascar	Senegal
Camboja	Malawi	Serra Leoa
Chade	Mali	Somália
Comores	Mauritânia	Sudão
Coreia do Norte	Mianmar	Tajiquistão
Costa do Marfim	Moçambique	Tanzânia
Eritreia	Mongólia	Togo Uganda
Etiópia	Nepal	Usbequistão
Gâmbia	Níger	Vietnã
Gana	Nigéria	Zâmbia
Guiné	Papua-Nova Guiné	Zimbábue
Guiné-Bissau	Paquistão	
Haiti	Quênia	

- **Alta Renda** (RNB *per capita* de 10.726 dólares ou mais, 56 países): Neste grupo estão Estados Unidos, Canadá, Europa Ocidental, Japão, Coreia do Sul, Austrália, Nova Zelândia, Cingapura, Israel e alguns países produtores de petróleo do Oriente Médio.
- **Renda Média Alta** (RNB *per capita* de 3466 a 10.725 dólares, 40 países): Neste grupo estão o México e os países mais ricos da América do Sul e Central, os países mais ricos da Europa Oriental e da Eurásia (incluindo a Rússia), a Malásia, a África do Sul e pequenos países insulares com forte vocação turística.
- **Renda Média Baixa** (RNB *per capita* de 876 a 3465 dólares, 58 países): Neste grupo estão a China, país mais populoso do

mundo, e boa parte da América do Sul e da antiga União Soviética, além da maior parte do Oriente Médio e algumas poucas nações africanas, como Marrocos, Tunísia e Angola.

- **Baixa Renda** (RNB *per capita* de 875 dólares ou menos, 54 países): No grupo de países mais pobres, responsável por quase 40% da população mundial, está a maior parte dos países da África, e do Sul e Sudeste Asiático, incluindo a Índia, o segundo país mais populoso do mundo. Também faz parte deste grupo o Haiti, que fica a algumas centenas de quilômetros da costa dos Estados Unidos.

A Figura 8.16 mostra a população e o consumo de petróleo desses quatro grupos econômicos em 2005. Como se pode ver no gráfico de cima, os grupos de alta renda e de renda média alta representavam 25% da população mundial, mas foram responsáveis por quase 75% do consumo. O gráfico de baixo da Figura 8.16 mostra o consumo de petróleo anual *per capita* em cada grupo, obtido dividindo o consumo total de petróleo pela população. O gráfico mostra uma diferença muito grande entre as nações mais ricas e as nações mais pobres no que diz respeito ao consumo de petróleo. Em média, a população dos países de alta renda usa *mais de 25 vezes mais petróleo per capita* que a população dos países de baixa renda. Os Estados Unidos, os maiores consumidores de petróleo do mundo, usam mais de 25 barris de petróleo por pessoa por ano, enquanto a China, o país mais populoso, usa menos de 2 barris.

Tendências Históricas, 1965-2005 A Figura 8.16 apresenta um "instantâneo global" do consumo de petróleo em 2005, mas é importante reconhecer que existem muitos casos particulares por trás dessas estatísticas, que estão associados às circunstâncias naturais e geopolíticas de cada país. A incerteza de eventos, como guerras, secas e desastres naturais, torna impossível prever com exatidão o crescimento da população e do consumo de petróleo. A título de

ilustração, vamos examinar as tendências passadas em três diferentes grupos de nações: alguns países altamente industrializados, os países em desenvolvimento de baixa renda e a Europa Oriental e a antiga União Soviética.

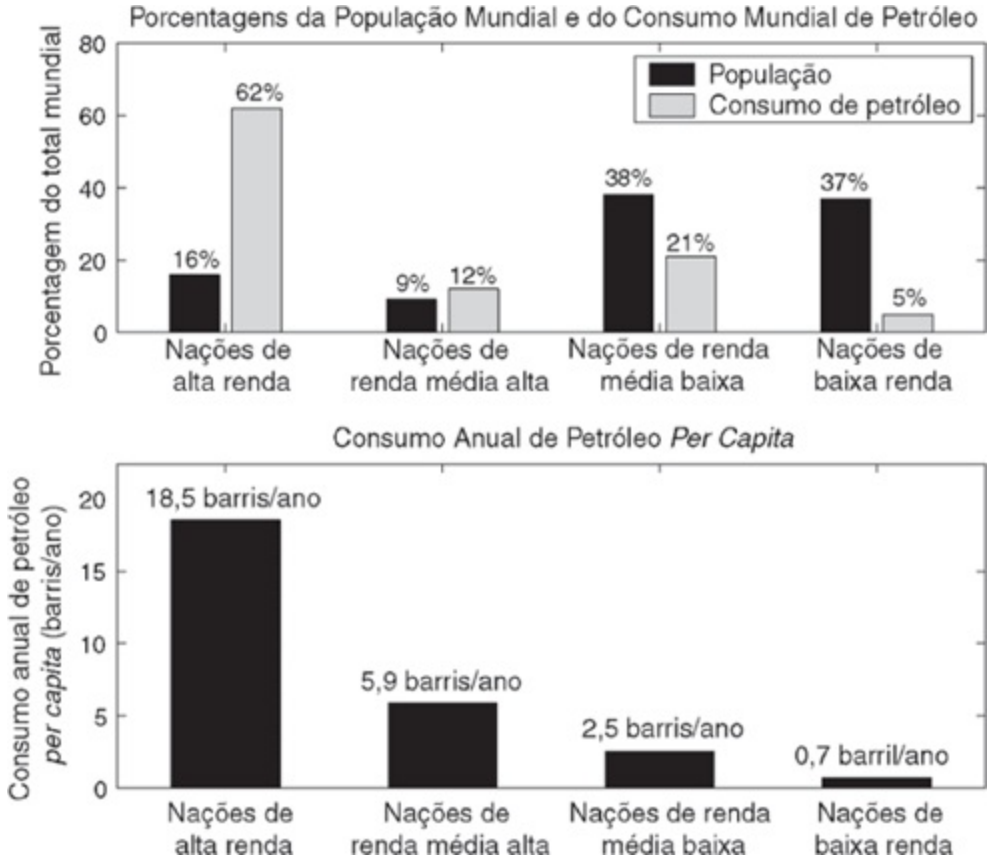


Figura 8.16 População e consumo de petróleo nos países de diferentes grupos de renda. Fontes: *World Bank World Development Indicators* [Ban06], *BP Statistical Review* [bp:06], *CIA World Factbook*[U.S06b].

Países Industrializados: Estados Unidos, Japão, França e Austrália A Figura 8.17 mostra 40 anos de dados de população e consumo de petróleo, de 1965 a 2005, para quatro países industrializados situados em diferentes partes do globo: Estados Unidos, Japão, França e Austrália. Como se pode ver no gráfico de cima, a população dos quatro países aumentou constantemente. A população dos Estados Unidos foi a que cresceu mais depressa em termos de número de pessoas por ano, em parte porque a população era maior para

começar, e também porque o aumento percentual foi maior: a população dos Estados Unidos e da Austrália aumentou a taxas de aproximadamente 1,2% ao ano, enquanto a população do Japão e da França cresceu a taxas de aproximadamente 0,2% e 0,4% ao ano, respectivamente.

O consumo de petróleo *per capita* em todos esses países mostrou as mesmas tendências no período, com picos e vales nas mesmas ocasiões, embora o consumo nos Estados Unidos tenha sido bem mais elevado que nos outros três países. O consumo de petróleo *per capita* aumentou rapidamente (atingindo um máximo histórico de mais de 30 barris por ano nos Estados Unidos) até 1973, quando vários países árabes da OPEP pararam de vender petróleo aos Estados Unidos e outras nações em sinal de protesto pelo apoio dos Estados Unidos a Israel na Guerra do Yom Kippur. O governo americano adotou um plano de racionamento (no qual os carros com placas pares só podiam comprar gasolina nos dias pares e os carros com placas ímpares nos dias ímpares) pela primeira vez depois da Segunda Guerra Mundial. O embargo foi suspenso em 1974 e o consumo voltou a crescer até o final de década, quando a revolução iraniana de dezembro de 1978 e a Guerra Irã-Iraque de 1980 reduziram mais uma vez, de forma drástica, a produção de petróleo do Oriente Médio. Pela segunda vez em seis anos, os carros fizeram fila para comprar gasolina nos Estados Unidos (Figura 8.18).

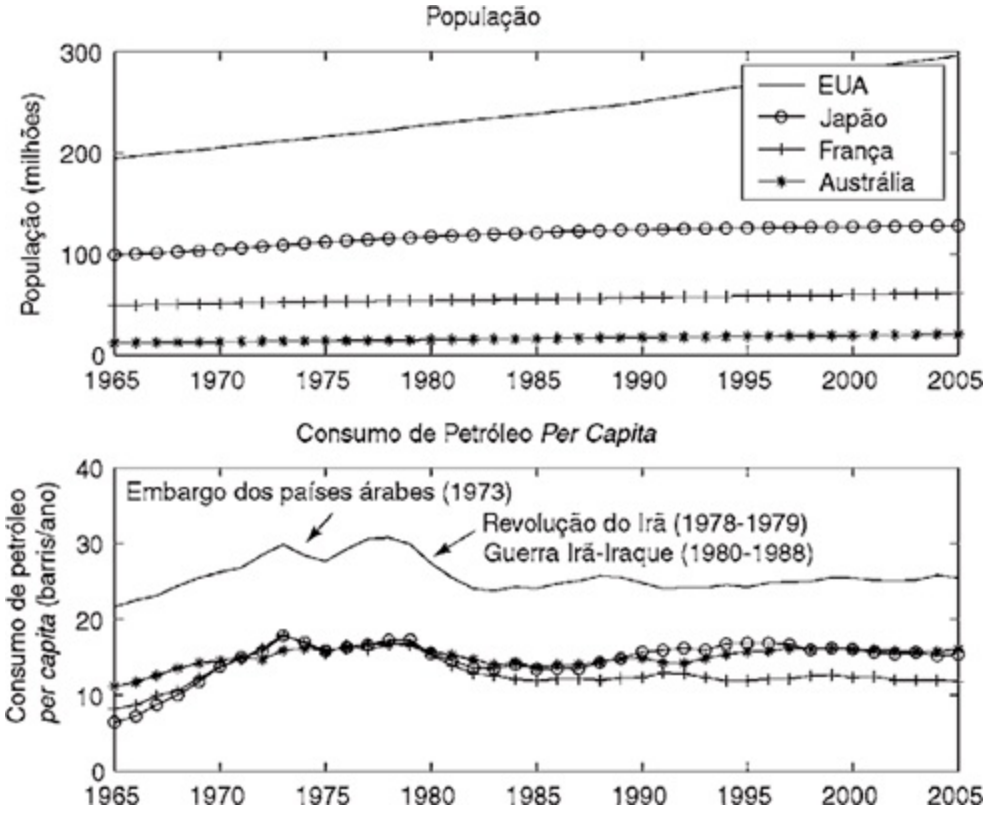


Figura 8.17 População e consumo de petróleo *per capita* nos Estados Unidos, Japão, França e Austrália, entre 1965 e 2005. Fontes: *BP Statistical Review* [bp:06] e U.S. Census Bureau [U.S06a].

Figura 8.18 Filas em um posto de gasolina americano, em 15 de junho de 1979. Foto da Biblioteca do Congresso dos Estados Unidos.

No intervalo entre as crises do petróleo de 1973 e 1979, o governo americano adotou uma série de medidas para aumentar a produção de petróleo no país e reduzir a dependência de petróleo importado,

entre elas a “desregulamentação” do preço do petróleo, para que o preço passasse a ser determinado pela lei da oferta e da procura. Em 1975, o Congresso Americano aprovou a Lei de Política e Conservação de Energia, que criava incentivos para a produção de petróleo em território americano e impunha uma redução do consumo de combustível (em milhas por galão) dos automóveis. Também criava a Reserva Estratégica de Petróleo dos Estados Unidos, um gigantesco depósito em cavernas de sal sob o Golfo do México que podia conter até um bilhão de barris de petróleo para serem usados em situações de emergência. O governo lançou mão da reserva apenas duas vezes: em 1991, durante a operação Tempestade no Deserto, e em 2005, depois da passagem do furacão Katrina.

Depois de passadas as crises de petróleo da década de 1970, ainda existem diferenças sutis entre o consumo de petróleo *per capita* nos Estados Unidos e no Japão, França e Austrália. Enquanto o consumo de petróleo *per capita* nos últimos três países se estabilizou, ou mesmo caiu, em anos recentes, o consumo *per capita* nos Estados Unidos está aumentando novamente. Muitos fatores contribuem para essa tendência, mas as diferenças nos meios de transporte certamente desempenham um papel importante. O Japão e a França, por exemplo, utilizam ferrovias para o transporte tanto de passageiros como de carga, enquanto nos Estados Unidos o uso de automóveis e caminhões é predominante. Além disso, embora o consumo de combustível dos veículos de passageiros nos Estados Unidos tenha diminuído, os americanos estão passando mais tempo ao volante, como mostram as estatísticas do Departamento de Transportes dos Estados Unidos [HrR04]:

- o número médio de veículos por família aumentou de aproximadamente 1 em 1969 para aproximadamente 2 em 2001;
- o número médio de quilômetros rodados por pessoa e por dia

em carros particulares aumentou de 30,8 em 1990 para 35,5 em 2001, enquanto o número de quilômetros rodados em veículos coletivos diminuiu de 0,74 para 0,47 no mesmo período;
- o tempo médio passado ao volante de carros particulares aumentou de 49 para 62 minutos por dia entre 1990 e 2001.

Países em Desenvolvimento: *China*, *Índia e África* Os padrões de crescimento da população e do consumo de petróleo nas nações em desenvolvimento foram muito diferentes dos observados nos países desenvolvidos. A Figura 8.19 mostra os dados de população e consumo de petróleo, de 1965 a 2005, para a China, a Índia e a média dos países africanos. Nos três casos, a população aumentou substancialmente. A taxa de crescimento anual na China foi de 0,9%, menor que a dos Estados Unidos (1,2%), mas incidindo sobre uma população quatro vezes maior. A taxa de crescimento da população na África, por outro lado, é mais de duas vezes maior que a dos Estados Unidos: 2,5%, aproximadamente. Isso apesar de mais de 7% da população da África subsaariana estar infectada com o vírus HIV e a porcentagem de pessoas contaminadas com o vírus em alguns países africanos chegar a 30%, enquanto nas nações de alta renda esta porcentagem não passa de 0,4% [Ban06].

As crises que reduziram o consumo de petróleo nas nações industrializadas na década de 1970 não tiveram muita repercussão nos países em desenvolvimento, os quais consomem muito menos petróleo. Como se pode ver na Figura 8.19, porém, as tendências de consumo de petróleo na China, Índia e África são muito diferentes. Embora a África tenha muito mais petróleo, o consumo *per capita* na China, e, em menor grau, na Índia, tem aumentado, enquanto permanece estacionário na África. Isso é um reflexo direto do progresso industrial dos dois países. Em particular, o consumo de petróleo *per capita* da China ultrapassou o da Índia em 1970, o da África em 1997, e continua a aumentar rapidamente.

A Antiga União Soviética: *Rússia*, *Romênia e Cazaquistão* Quando Mikhail Gorbachev foi nomeado Secretário-Geral em 1985, a economia da União Soviética estava passando por uma séria crise. Décadas de mercado negro, uma corrida armamentista com os Estados Unidos, especialmente durante o governo Reagan, e a guerra do Afeganistão tinham levado a União Soviética a uma situação delicada, e o descontentamento popular era crescente. Quando Gorbachev anunciou sua política de *glasnost* ("abertura política") e *perestroika* ("reforma econômica") em 1986, desencadeou uma série de eventos que culminaram com uma onda de revoluções contra os governos comunistas dos aliados soviéticos na Europa Oriental e levaram à dissolução oficial da União Soviética em 1991.

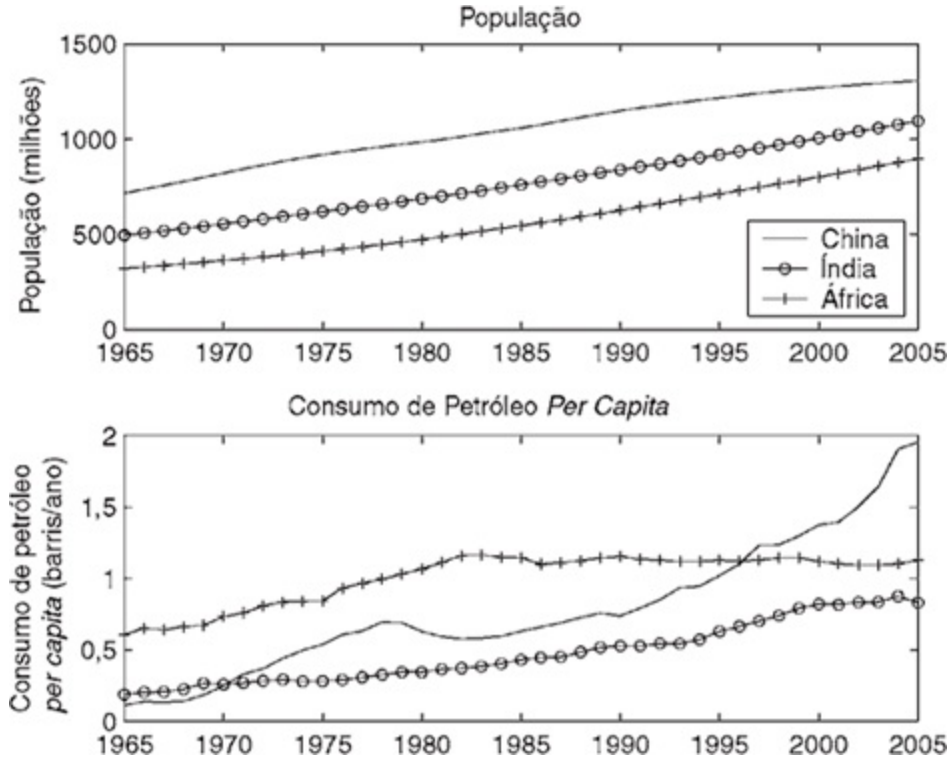


Figura 8.19 População e consumo de petróleo per capita na China, Índia e África, entre 1965 e 2005. Fontes: *BP Statistical Review*[bp:06] e U.S. Census Bureau [U.S06a].

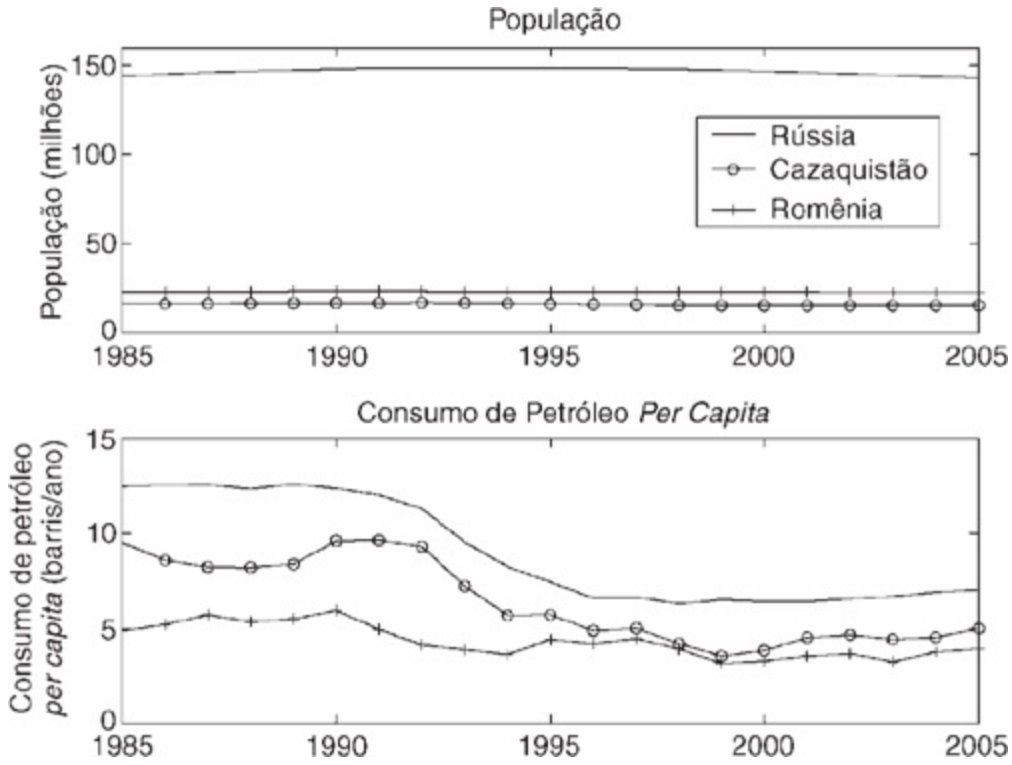


Figura 8.20 População e consumo de petróleo *per capita* na Rússia, Cazaquistão e Romênia, entre 1985 e 2005. Fontes: *BP Statistical Review*[bp:06] e U.S. Census Bureau [U.S06a].

As tensões resultantes das mudanças políticas e econômicas ocorridas na Europa Oriental e nas nações da antiga União Soviética levaram a uma queda da população e do consumo de petróleo *per capita* durante a década de 1990, como mostra a Figura 8.20. Na Romênia, que foi ocupada pelo exército soviético depois da Segunda Guerra Mundial, uma revolução, em 1989, levou à deposição e execução do Presidente Nicolau Ceausescu e a eleições livres no ano seguinte. O Cazaquistão foi conquistado pela Rússia no final do século XVIII e se tornou uma República Soviética em 1936. Depois da *glasnost* de 1986, começaram protestos estudantis contra o sistema comunista e o Cazaquistão se declarou independente em 1991. As reservas provadas de petróleo da Rússia são três vezes maiores que as dos Estados Unidos, mas o consumo de petróleo per capita dos russos é três vezes menor que o dos americanos.

8.4.2 Definição do Problema e Plano de Ataque

Como os exemplos da seção anterior mostraram, existem muitos fatores que afetam o consumo de petróleo, o que torna muito difícil prever o futuro. No entanto, apesar das incertezas, sabemos que o consumo de petróleo tende inexoravelmente a aumentar e depois diminuir. O tanque pode não secar totalmente, mas o petróleo se tornará proibitivamente caro com o esgotamento das reservas provadas. O objetivo de nossa análise, porém, não é prever exatamente quando a última gota de petróleo será extraída. O que procuramos é determinar o grau de urgência do problema: ele acontecerá daqui a alguns anos, algumas décadas ou alguns séculos? Além disso, não estamos aqui tentando profetizar uma catástrofe; pelo contrário, precisamos compreender o que está acontecendo para podermos evitar uma crise futura.

TABELA 8.7 Parâmetros de população e consumo de petróleo usados no modelo

	População		***Consumo de Petróleo População Per Capita***	
	Milhões em 2005	***Taxa de Crescimento Anual***	**Barris por Ano**	**Taxa de Crescimento Anual**
Alta Renda	1.011	0,4%	18,5	0%
Renda Média Alta	599	0,6%	5,9	1%
Renda Média Baixa	2.475	0,8%	2,5	2%
Baixa Renda	2.353	1,7%	0,7	3%

Suposições A Tabela 8.7 mostra os parâmetros principais que serão

usados em nosso modelo. Os dados sobre a população são do U.S. Census Bureau [U.S06a] e dos *World Development Indicators* do Banco Mundial [Ban06]. Os dados sobre o consumo de petróleo são do *BP Statistical Review* [bp:06] e do *World Factbook* da CIA [U.S06b]. De todos os números da tabela, os valores da taxa de aumento do consumo de petróleo *per capita* são os menos confiáveis. No caso das nações de alta renda, por exemplo, consideramos que o consumo de petróleo *per capita* não ultrapassará os valores de 2005; esta parece ser a tendência na Europa Ocidental e no Japão, mas não nos Estados Unidos.

Planejar A ideia básica do modelo é estimar a taxa com a qual o petróleo sai do "tanque" das reservas provadas de petróleo para os "baldes" dos vários grupos econômicos de nações. A quantidade de petróleo consumido em cada grupo é o produto de dois fatores: o consumo de petróleo *per capita* e a população. Para modelar a variação das reservas de petróleo, teremos que modelar a variação da população e a variação do consumo de petróleo *per capita*. Nas próximas seções, as seguintes etapas de criação do modelo serão examinadas:

1. Modelagem da vazão de petróleo do tanque para os baldes, ano após ano, supondo conhecidas as vazões para os baldes individuais. A ideia principal usada na formulação do modelo é a Lei de Conservação da Massa (a massa total de petróleo permanece constante durante a simulação).
2. Modelagem do aumento da população com o tempo. Neste modelo, a *variação percentual* será a mesma ano após ano, mas, com o aumento da população, a da população em termos absolutos será maior a cada ano.
3. Modelagem da variação do consumo de petróleo *per capita*. Será usado um modelo semelhante ao do aumento da população.

4. Finalmente, os submodelos serão combinados para formar um modelo da variação, com o tempo, do consumo de petróleo. Este modelo, por sua vez, será usado para calcular o volume das reservas de petróleo, ano após ano, até o volume de petróleo no tanque chegar a zero.

8.4.3 Vazão de um Líquido e Conservação da Massa

A Figura 8.21 mostra o processo de enchimento de um tanque. A propriedade mais importante para nosso modelo é o volume de líquido, descrito pela variável de estado *V*. Como fizemos no caso da queda de um objeto, podemos representar a variação de volume através de uma série de instantâneos obtidos a intervalos regulares de tempo Δt, chamando de V_0 o volume inicial de líquido, V_1 o volume após um intervalo de tempo Δt, e assim por diante. A variação ΔV de volume do líquido de um estado para o estado seguinte é dada por

$$\Delta V_i = V_{i+1} - V_i$$

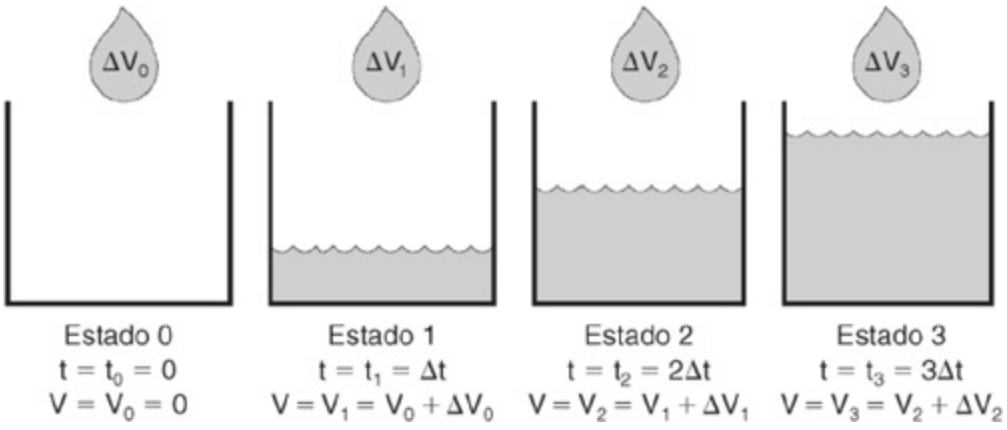


Figura 8.21 Um tanque sendo enchido com "gotas" de líquido.

Podemos imaginar ΔV_i como uma gota de líquido caindo no tanque (mas ainda a caminho) no estado *i*. A *taxa de variação* de volume do líquido no tanque é a variação de volume do líquido dividida pelo incremento do tempo, ou seja:

$$\text{Taxa de variação} = \frac{\text{Variação de volume}}{\text{incremento de tempo}} = \frac{\Delta V_i}{\Delta t}$$

Suponha agora que o líquido seja introduzido no tanque através de um cano, como na Figura 8.22. A *vazão* do líquido no cano, q_{ent}, tem unidades de volume por unidade de tempo. Se o tanque é alimentado apenas através do cano, a taxa com a qual a água sai do cano deve ser igual à taxa de aumento do volume de líquido no tanque. Assim,

$$\text{Taxa de aumento de volume} = \text{Taxa de entrada de água}$$
$$\frac{\Delta V_i}{\Delta t} = q_{\text{ent}}$$

Esse resultado permite calcular a variação do volume de líquido de um estado para o estado seguinte em termos da vazão:

$$\frac{V_{i+1} - V_i}{\Delta t} = q_{\text{ent}}$$
$$V_{i+1} = V_i + q_{\text{ent}}\Delta t \qquad (8.9)$$

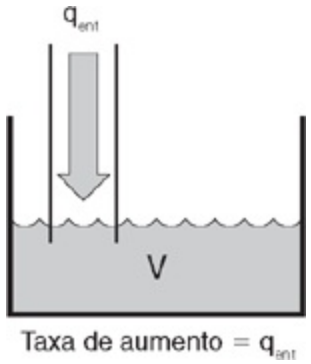


Figura 8.22 Um tanque sendo enchido através de um cano.

Exemplo 8.4 Enchimento de um Tanque

Um tanque contém inicialmente 1,4 L de líquido. Se o líquido está entrando no tanque com uma vazão de 0,2 L/s, qual será o volume de líquido após 5 s?

Solução Definimos as seguintes variáveis conhecidas do problema:

Volume inicial de líquido: $V_i = 1{,}4$ L

Vazão: $q_{\text{ent}} = 0{,}2$ L/s

Incremento de tempo: $\Delta t = 5$ s

e a seguinte variável desconhecida:

Volume final de líquido: V_{i+1}

De acordo com a Equação (8.9), temos:

$$\begin{aligned} V_{i+1} &= V_i + q_{\text{ent}}\Delta t \\ &= 1{,}4\ \text{L} + \left(0{,}2\ \frac{\text{L}}{\text{s}}\right)(5\ \text{s}) \\ &= 2{,}4\ \text{L} \end{aligned}$$

Assim, 1 L de água entra no tanque durante o intervalo de 5 s e o volume final de água no tanque é 2,4 L.

Vamos agora instalar um segundo cano e bombear o líquido para fora do tanque com uma vazão $q_{\text{saída}}$, como mostra a Figura 8.23. Nesse caso, a taxa de variação de volume do líquido no tanque é a diferença entre a vazão de entrada e a vazão de saída:

$$\begin{aligned} \text{Taxa de variação de volume} &= \text{vazão de entrada} - \text{vazão de saída} \\ &= q_{\text{ent}} - q_{\text{saída}} \end{aligned}$$

No caso geral, se existem vários canos alimentando o tanque e vários canos removendo líquido do tanque, a taxa de variação de volume é a soma das vazões do líquido nos canos (considerando a vazão negativa para os canos que removem líquido do tanque). Esta regra simples é consequência da Lei de Conservação da Massa, segundo a qual a matéria não pode ser criada nem destruída. Embora esta regra possa parecer trivial neste problema, constitui uma ferramenta muito útil para analisar problemas de vazão mais complexos, que envolvem misturas de líquidos diferentes e reações químicas entre esses líquidos, como costuma acontecer em fábricas de produtos químicos.

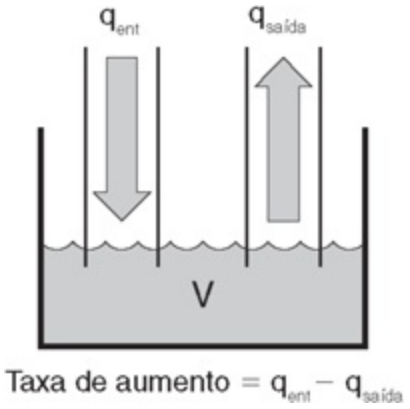


Figura 8.23 Um tanque com um cano de entrada e um cano de saída.

8.4.4 Crescimento a uma Taxa Constante: População e Consumo de Petróleo *Per Capita*

Quando um balde é colocado debaixo de uma torneira que está pingando, a taxa de variação do volume de água no balde é constante. A cada segundo, o volume de água no balde aumenta do mesmo valor. As populações, porém, não aumentam dessa forma. Nas populações, o aumento do número de pessoas é maior a cada ano que passa. Isso acontece porque quanto maior o número de pessoas, maior o número de filhos. Supondo que o número médio de filhos por casal permaneça constante, e ignorando os efeitos de migrações e mudanças na expectativa de vida, a taxa de aumento da população é proporcional ao tamanho da população. Podemos escrever esta lei de crescimento da seguinte forma:

$$\frac{\text{Aumento da população}}{\text{Ano}} = \frac{\text{Taxa de crescimento anual}}{\text{Ano}} \times \text{População}$$

ou

$$\frac{\Delta P_i}{\Delta t} = gP_i$$

onde P_i é a população no ano i e g é a *taxa de crescimento anual*, medida como uma porcentagem da população. Como fizemos antes, podemos escrever esta equação como uma equação diferença com a

seguinte forma:

$$\frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta t} = gP_i$$
$$P_{i+1} = P_i + gP_i\Delta t \qquad (8.10)$$

A título de ilustração, vamos usar este modelo para prever o aumento da população mundial entre 1950 e 2000 e comparar o resultado com o valor real. Em 1950, de acordo com o U.S. Census Bureau, a população mundial era de 2.556.518.868 habitantes. A taxa de aumento naquela época era de aproximadamente 0,18% ao ano. Assim

$$P_0 = 2{,}56 \text{ bilhões}$$
$$g = 0{,}018$$

Como no caso da queda de uma bola, podemos usar uma tabela para calcular os valores das variáveis de estado para estados sucessivos do sistema, como mostra a Tabela 8.8. Na terceira coluna da tabela, a Equação (8.10) é usada para calcular o valor de P correspondente ao estado. Observe que, no preenchimento da tabela, o valor de P calculado para cada linha depende apenas do valor de P na linha imediatamente acima.

TABELA 8.8 Resultados dos cálculos para os primeiros três estados do aumento da população. O incremento de tempo Δt é 1 ano

Estado	Ano	População (bilhões)
0	t_0 1950	P_0 2,56
1	$t_1 = t_0 + \Delta t$ 1950 + 1 1951	$P_1 = P_0 + gP_0\Delta t$ 2,56 + (0,018)(2,56)(1) 2,60
2	$t_2 = t_1 + \Delta t$ 1951 + 1 1952	$P_2 = P_1 + gP_1\Delta t$ 2,60 + (0,018)(2,60)(1) 2,65

A Figura 8.24 mostra os valores da população mundial previstos pelo modelo e os valores levantados pelo U.S. Census Bureau. Os valores previstos pelo modelo estão muito próximos dos valores reais. Observe, porém, que o modelo subestima ligeiramente a população no período que vai de meados da década de 1960 até meados da década de 1990 e superestima a população de meados da década de 1990 em diante. A razão para isso é que a taxa de aumento da população não permaneceu constante em 1,8% durante todo o período. Em meados da década de 1960, a taxa de crescimento da população aumentou para pouco mais de 2%; por volta do ano 2000, diminuiu para aproximadamente 1,25%. Os especialistas acreditam que essa tendência de queda vai continuar, com a taxa de aumento chegando a aproximadamente 0,5% em 2050. Um modelo mais detalhado poderia levar em conta essa "desaceleração" da taxa de crescimento através de outra equação diferença, da mesma forma como usamos equações para a posição em termos da velocidade, e para a velocidade em termos da aceleração no caso da queda de um objeto.

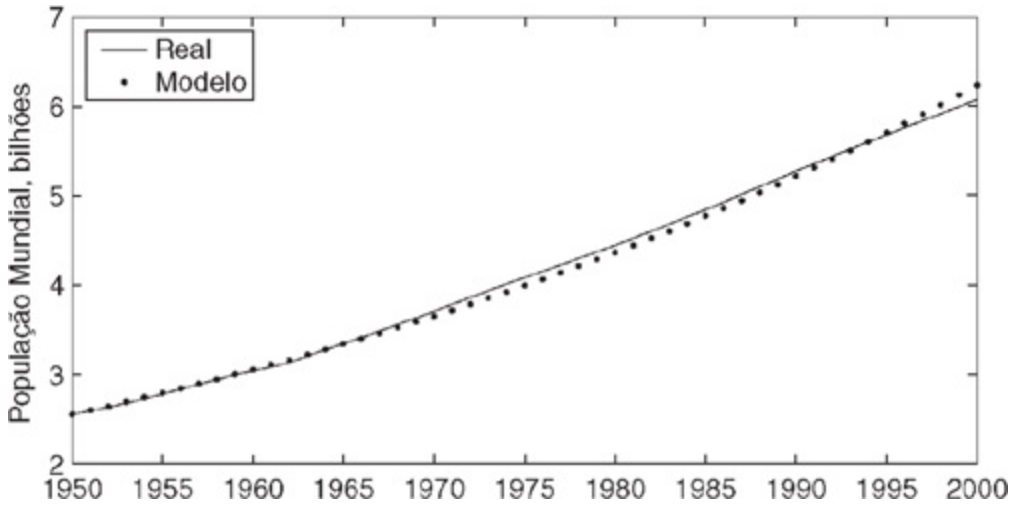


Figura 8.24 Valores teóricos e reais da população mundial entre 1950 e 2000. O modelo supõe uma taxa de crescimento anual de 1,8%.

Como vimos na Seção 8.4.1, o consumo de petróleo *per capita* é muito sensível a eventos mundiais difíceis de prever, como a guerra no Oriente Médio ou o colapso da União Soviética. No caso de longos

períodos de tempo, porém, é possível modelar a tendência do consumo de petróleo *per capita* para cada grupo econômico usando uma taxa de variação constante, como fizemos para a população. Nesse caso, o consumo de petróleo *per capita* pode ser expresso como uma equação diferença:

$$\frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta t} = rC_i$$
$$C_{i+1} = C_i + rC_i \Delta t \qquad (8.11)$$

onde C_i é o consumo de petróleo *per capita* no estado i e r é a taxa de variação.

8.4.5 O Modelo Completo

A Figura 8.25 mostra um diagrama do fluxo de petróleo, de acordo com nosso modelo. Representamos as reservas provadas de petróleo como um grande tanque que abastece quatro grupos de nações através de canos com vazões diferentes. A Tabela 8.9 mostra as variáveis do modelo e os valores iniciais de algumas dessas variáveis.

Vazões e Equações de Conservação da Massa A primeira parte do modelo são as equações de conservação da massa que relacionam as vazões ao volume de petróleo no tanque. Cada um dos quatro grupos de nações é representado por um balde que recebe petróleo com uma certa vazão. As vazões são representadas pelos símbolos Q^{AR}, Q^{MA}, Q^{MB} e Q^{BR}, que representam, respectivamente, os países de alta renda, renda média alta, renda média baixa e baixa renda. Os volumes totais de petróleo nesses tanques em um dado instante são representados pelos símbolos V^{AR}, V^{MA}, V^{MB} e V^{BR}, respectivamente. Aplicando a Equação (8.9), que foi deduzida a partir da Lei de Conservação da Massa, obtemos as seguintes equações de estado:

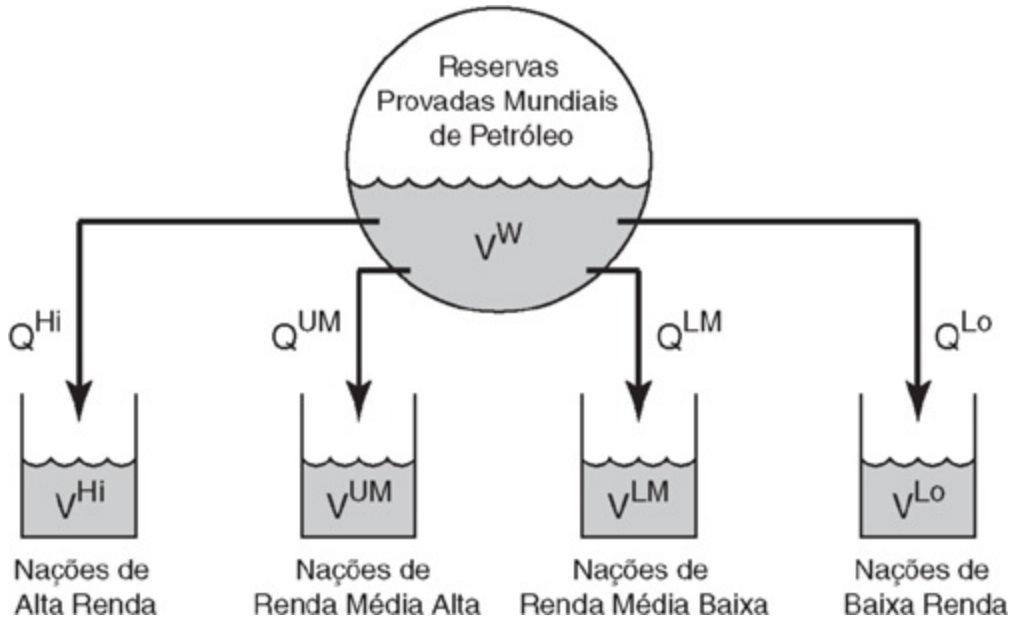


Figura 8.25 Modelagem do consumo mundial de petróleo como um tanque abastecendo quatro baldes, um para cada grupo de nações.

TABELA 8.9 Variáveis usadas no modelo de consumo mundial de petróleo

Valores iniciais: Nome	Descrição	Valor de 2005
V^W	Volume restante de reservas provadas de petróleo no mundo	1,3 trilhão de barris
P^{Hi}	População das nações de alta renda	1,011 bilhão
P^{UM}	População das nações de renda média alta	0,599 bilhão
P^{LM}	População das nações de renda média baixa	2,475 bilhões
P^{Lo}	População das nações de baixa renda	2,353 bilhões
g^{Hi}	Taxa de crescimento da população das nações de alta renda	0,4% ao ano
g^{UM}	Taxa de crescimento da população das nações de renda média alta	0,6% ao ano
g^{LM}	Taxa de crescimento da população das nações de renda média baixa	0,8% ao ano
g^{Lo}	Taxa de crescimento da população das nações de baixa renda	1,7% ao ano

C^{Hi}	Consumo de petróleo *per capita* das nações de alta renda	8,5 barris/ano
C^{UM}	Consumo de petróleo *per capita* das nações de renda média alta	5,9 barris/ano
C^{LM}	Consumo de petróleo *per capita* das nações de renda média baixa	2,5 barris/ano
C^{Lo}	Consumo de petróleo *per capita* das nações de baixa renda	0,7 barril/ano
r^{Hi}	Taxa de crescimento do consumo de petróleo *per capita* das nações de alta renda	0% ao ano
r^{UM}	Taxa de crescimento do consumo de petróleo *per capita* das nações de renda média alta	1% ao ano
r^{LM}	Taxa de crescimento do consumo de petróleo *per capita* das nações de renda média baixa	2% ao ano
r^{Lo}	Taxa de crescimento do consumo de petróleo *per capita* das nações de baixa renda	3% ao ano
Δt	Incremento de tempo	1 ano

Outras variáveis: Nome	**Descrição**	**Valor de 2005**
V^{Hi}	Volume total de petróleo consumido nas nações de alta renda	barris
V^{UM}	Volume total de petróleo consumido nas nações de renda média alta	barris
V^{LM}	Volume total de petróleo consumido nas nações de renda média baixa	barris
V^{Lo}	Volume total de petróleo consumido nas nações de baixa renda	barris
Q^{W}	Taxa mundial de consumo de petróleo	barris/ano

Q^{Hi}	Taxa de consumo de petróleo das nações de alta renda	barris/ano
Q^{UM}	Taxa de consumo de petróleo das nações de renda média alta	barris/ano
Q^{LM}	Taxa de consumo de petróleo das nações de renda média baixa	barris/ano
Q^{Lo}	Taxa de consumo de petróleo das nações de baixa renda	barris/ano
P^{W}	População mundial	Habitantes

$$\begin{aligned}
&\text{Alta Renda:} && V_{i+1}^{\text{AR}} = V_i^{\text{AR}} + Q_i^{\text{AR}}\Delta t \\
&\text{Renda Média Alta:} && V_{i+1}^{\text{MA}} = V_i^{\text{MA}} + Q_i^{\text{MA}}\,\Delta t \\
&\text{Renda Média Baixa:} && V_{i+1}^{\text{MB}} = V_i^{\text{MB}} + Q_i^{\text{MB}}\,\Delta t \\
&\text{Baixa Renda:} && V_{i+1}^{\text{BR}} = V_i^{\text{BR}} + Q_i^{\text{BR}}\Delta t
\end{aligned}$$

A vazão total para *fora* do tanque é igual à soma das vazões para os baldes dos grupos econômicos. Chamando de V^{M} e Q^{M} o volume de petróleo no tanque "mundial" e a vazão de petróleo para fora do tanque, a equação de conservação da massa pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\text{Total mundial:}\quad V_{i+1}^{\text{M}} &= V_i^{\text{M}} - (Q_i^{\text{AR}} - Q_i^{\text{MA}} - Q_i^{\text{MB}} - Q_i^{\text{BR}})\Delta t \\
&= V_i^{\text{M}} - Q_i^{\text{M}}\,\Delta t
\end{aligned}$$

Aumento da População A parte seguinte do modelo é o aumento da população, que é descrito pela Equação (8.10). Aplicando esta equação aos quatro grupos econômicos, obtemos as seguintes equações de estado:

$$\begin{aligned}
&\text{Alta Renda:} && P_{i+1}^{\text{AR}} = P_i^{\text{AR}} + g^{\text{AR}} P_i^{\text{AR}}\Delta t \\
&\text{Renda Média Alta:} && P_{i+1}^{\text{MA}} = P_i^{\text{MA}} + g^{\text{MA}}\, P_i^{\text{MA}}\,\Delta t \\
&\text{Renda Média Baixa:} && P_{i+1}^{\text{MB}} = P_i^{\text{MB}} + g^{\text{MB}}\, P_i^{\text{MB}}\,\Delta t \\
&\text{Baixa Renda:} && P_{i+1}^{\text{BR}} = P_i^{\text{BR}} + g^{\text{BR}} P_i^{\text{BR}}\Delta t
\end{aligned}$$

A população mundial em um dado instante é simplesmente a soma

das populações dos quatro grupos:

$$\text{Total mundial:} \quad P_i^{\mathrm{M}} = P_i^{\mathrm{AR}} + P_i^{\mathrm{MA}} + P_i^{\mathrm{MB}} + P_i^{\mathrm{BR}}$$

Consumo de Petróleo *Per Capita* **e Consumo Total** Como fizemos para a população, vamos supor que o consumo de petróleo *per capita* aumenta a uma taxa constante e, portanto, pode ser descrito pela Equação (8.11). Isso nos dá as seguintes equações de estado para os quatro grupos econômicos:

$$\begin{aligned}
&\text{Alta Renda:} && C_{i+1}^{\mathrm{AR}} = C_i^{\mathrm{AR}} + r^{\mathrm{AR}} C_i^{\mathrm{AR}} \Delta t \\
&\text{Renda Média Alta:} && C_{i+1}^{\mathrm{MA}} = C_i^{\mathrm{MA}} + r^{\mathrm{MA}} C_i^{\mathrm{MA}} \Delta t \\
&\text{Renda Média Baixa:} && C_{i+1}^{\mathrm{MB}} = C_i^{\mathrm{MB}} + r^{\mathrm{MB}} C_i^{\mathrm{MB}} \Delta t \\
&\text{Baixa Renda:} && C_{i+1}^{\mathrm{BR}} = C_i^{\mathrm{BR}} + r^{\mathrm{BR}} C_i^{\mathrm{BR}} \Delta t
\end{aligned}$$

O consumo total de petróleo para cada grupo econômico é igual ao consumo *per capita* vezes a população. Isso também nos dá quatro equações de estado:

$$\begin{aligned}
&\text{Alta Renda:} && Q_i^{\mathrm{AR}} = P_i^{\mathrm{AR}} C_i^{\mathrm{AR}} \\
&\text{Renda Média Alta:} && Q_i^{\mathrm{MA}} = P_i^{\mathrm{MA}} C_i^{\mathrm{MA}} \\
&\text{Renda Média Baixa:} && Q_i^{\mathrm{MB}} = P_i^{\mathrm{MB}} C_i^{\mathrm{MB}} \\
&\text{Baixa Renda:} && Q_i^{\mathrm{BR}} = P_i^{\mathrm{BR}} C_i^{\mathrm{BR}}
\end{aligned}$$

Tabela de Cálculos Uma vez determinadas as equações de estado do modelo, podemos reuni-las em uma tabela e calcular os valores numéricos dos parâmetros para cada estado. Conceitualmente, isso não é mais difícil de fazer que nos exemplos anteriores, mas a tabela é muito maior por causa do número de variáveis envolvidas. Como antes, cada linha da tabela representa um estado, e cada coluna está associada a uma variável. A tabela tem 20 colunas, rotuladas de A a T, que estão separadas por grupo econômico, da seguinte forma:

Ano (Coluna A)
Grupo de Alta Renda (Colunas B a E): população (P), consumo de petróleo anual *per capita* (C), consumo de petróleo anual total (Q), consumo de petróleo acumulado (V)

Grupo de Renda Média Alta (Colunas F a I): população (P), consumo de petróleo anual *per capita* (C), consumo de petróleo anual total (Q), consumo de petróleo acumulado (V)

Grupo de Renda Média Baixa (Colunas J a M): população (P), consumo de petróleo anual *per capita* (C), consumo de petróleo anual total (Q), consumo de petróleo acumulado (V)

Grupo de Baixa Renda (Colunas N a Q): população (P), consumo de petróleo anual *per capita* (C), consumo de petróleo anual total (Q), consumo de petróleo acumulado (V).

Totais Mundiais (Colunas R-T): população (P), taxa de consumo (Q), volume total das reservas de petróleo (V).

A tabela abaixo mostra as duas primeiras linhas da tabela completa. Na primeira linha estão os valores iniciais da Tabela 8.9. A segunda linha foi calculada a partir desses valores, usando as equações de estado. As linhas seguintes seriam obtidas da mesma forma, usando as equações de estado e os valores calculados na linha anterior.

.	Coluna A	Coluna B	Coluna C	Coluna D	Coluna E
		Nações de Alta Renda (AR)			
Estado	Ano	População, P^{AR} (bilhão)	Consumo de Petróleo *Per Capita*, C^{AR} (barris/ano)	Taxa de Consumo de Petróleo do Grupo, Q^{AR} (bilhão de barris/ano)	Volume Total de Petróleo Consumido pelo Grupo, V^{AR} (bilhão de barris)
0	t_0 2005	P_0^{AR} 1,011	C_0^{AR} 18,50	$Q_0^{AR} = P_0^{AR} C_0^{AR}$ (1,011)(18,50) 18,70	V_0^{AR} 0
1	$t_1 = t_0 + \Delta t$ 2005 + 1 2006	$P_1^{AR} = P_0^{AR} + g^{AR} P_0^{AR} \Delta t$ 1,011 + (0,004)(1,011)(1) 1,015	$C_1^{AR} = C_0^{AR} + k^{AR} C_0^{AR} \Delta t$ 18,50 + (0,00)(18,50)(1) 18,50	$Q_1^{AR} = P_1^{AR} C_1^{AR}$ (1,015)(18,50) 18,78	$V_1^{AR} = V_0^{AR} + Q_0^{AR} \Delta t$ 0 + (18,70)(1) 18,70

.	Coluna F	Coluna G	Coluna H	Coluna I
	Nações de Renda Média Alta (MA)			
Estado	População, P^{MA} (bilhões)	Consumo de Petróleo *Per Capita*, C^{MA} (barris/ano)	Taxa de Consumo de Petróleo do Grupo, Q^{MA} (bilhão de barris/ano)	Volume Total de Petróleo Consumido pelo Grupo, V^{MA} (bilhão de barris)
0	P_0^{MA} 0,599	C_0^{MA} 5,90	$Q_0^{MA} = P_0^{MA} C_0^{MA}$ (0,599)(5,90) 3,53	V_0^{MA} 0
1	$P_1^{MA} = P_0^{MA} + g^{MA} P_0^{MA} \Delta t$ 0,599 + (0,006)(0,599)(1) 0,603	$C_1^{MA} = C_0^{MA} + k^{MA} C_0^{MA} \Delta t$ 5,90 + (0,01)(5,90)(1) 5,96	$Q_1^{MA} = P_1^{MA} C_1^{MA}$ (0,603)(5,96) 3,59	$V_1^{MA} = V_0^{MA} + Q_0^{MA} \Delta t$ 0 + (3,53)(1) 3,53

.	Coluna J	Coluna K	Coluna L	Coluna M
	Nações de Renda Média Baixa (MB)			
Estado	População, P^{MB} (bilhões)	Consumo de Petróleo *Per Capita*, C^{MB} (barris/ano)	Taxa de Consumo de Petróleo do Grupo, Q^{MB} (bilhão de barris/ano)	Volume Total de Petróleo Consumido pelo Grupo, V^{MB} (bilhão de barris)
0	P_0^{MB} 2,475	C_0^{MB} 2,50	$Q_0^{MB} = P_0^{MB} C_0^{MB}$ (2,475)(2,50) 6,19	V_0^{MB} 0
1	$P_1^{MB} = P_0^{MB} + g^{MB} P_0^{MB} \Delta t$ $2{,}475 + (0{,}008)(2{,}475)(1)$ 2,495	$C_1^{MB} = C_0^{MB} + k^{MB} C_0^{MB} \Delta t$ $2{,}50 + (0{,}02)(2{,}50)(1)$ 2,55	$Q_1^{MB} = P_1^{MB} C_1^{MB}$ (2,495)(2,55) 6,36	$V_1^{MB} = V_0^{MB} + Q_0^{MB} \Delta t$ $0 + (6{,}19)(1)$ 6,19

.	Coluna N	Coluna O	Coluna P	Coluna Q
	Nações de Baixa Renda (BR)			
Estado	População, P^{BR} (bilhões)	Consumo de Petróleo *Per Capita*, C^{BR} (barris/ano)	Taxa de Consumo de Petróleo do Grupo, Q^{BR} (bilhão de barris/ano)	Volume Total de Petróleo Consumido pelo Grupo, V^{BR} (bilhão de barris)
0	P_0^{BR} 2,353	C_0^{BR} 0,70	$Q_0^{BR} = P_0^{BR} C_0^{BR}$ (2,353)(0,70) 1,65	V_0^{BR} 0
1	$P_1^{BR} = P_0^{BR} + g^{BR} P_0^{BR} \Delta t$ $2{,}353 + (0{,}017)(2{,}353)(1)$ 2,393	$C_1^{BR} = C_0^{BR} + k^{BR} C_0^{BR} \Delta t$ $0{,}70 + (0{,}03)(0{,}70)(1)$ 0,72	$Q_1^{BR} = P_1^{BR} C_1^{BR}$ (2,393)(0,72) 1,73	$V_1^{BR} = V_0^{BR} + Q_0^{BR} \Delta t$ $0 + (1{,}65)(1)$ 1,65

.	Coluna R	Coluna S	Coluna T
	Totais Mundiais (M)		
Estado	População, P^{M} (bilhões)	Taxa de Consumo, Q^{M} (bilhão de barris/ano)	Volume Total das Reservas de Petróleo, V^{M} (bilhão de barris)
0	$P_0^{M} = P_0^{AR} + P_0^{MA} + P_0^{MB} + P_0^{BR}$ $1{,}011 + 0{,}599 + 2{,}475 + 2{,}353$ 6,438	$Q_0^{M} = Q_0^{AR} + Q_0^{MA} + Q_0^{MB} + Q_0^{BR}$ $18{,}91 + 3{,}53 + 6{,}19 + 1{,}65$ 30,27	V_0^{M} 1.300
1	$P_1^{M} = P_1^{AR} + P_1^{MA} + P_1^{MB} + P_1^{BR}$ $1{,}015 + 0{,}603 + 2{,}495 + 2{,}393$ 6,505	$Q_1^{M} = Q_1^{AR} + Q_1^{MA} + Q_1^{MB} + Q_1^{BR}$ $18{,}98 + 3{,}59 + 6{,}36 + 1{,}73$ 30,66	$V_1^{M} = V_0^{M} - Q_0^{M} \Delta t$ $1.300 - (30{,}27)(1)$ 1.270

Resultados A Figura 8.26 mostra os resultados obtidos com o auxílio do modelo. Como visto no gráfico de cima, o volume total de reservas provadas, V^{M}, chega a zero em 2039. Isso significa que nesse ano vamos ficar sem petróleo? Antes de responder a essa pergunta, vamos examinar mais de perto outros aspectos do resultado.

Os dois outros gráficos da Figura 8.26 são *gráficos de área* das populações dos grupos econômicos, P^{AR}, P^{MA}, P^{MB} e P^{BR}, e dos volumes de petróleo acumulados V^{AR}, V^{MA}, V^{MB} e V^{BR}. A vantagem de

usar gráficos acumulados é que eles nos permitem ver o valor total e a contribuição de cada grupo em um único gráfico. Em 2039, a população mundial será de mais de 9 bilhões de habitantes. A porcentagem da população mundial que vive em países de baixa renda continuará a aumentar; em 2039, 45% da população mundial estará em países de baixa renda e apenas 12% em países de alta renda.

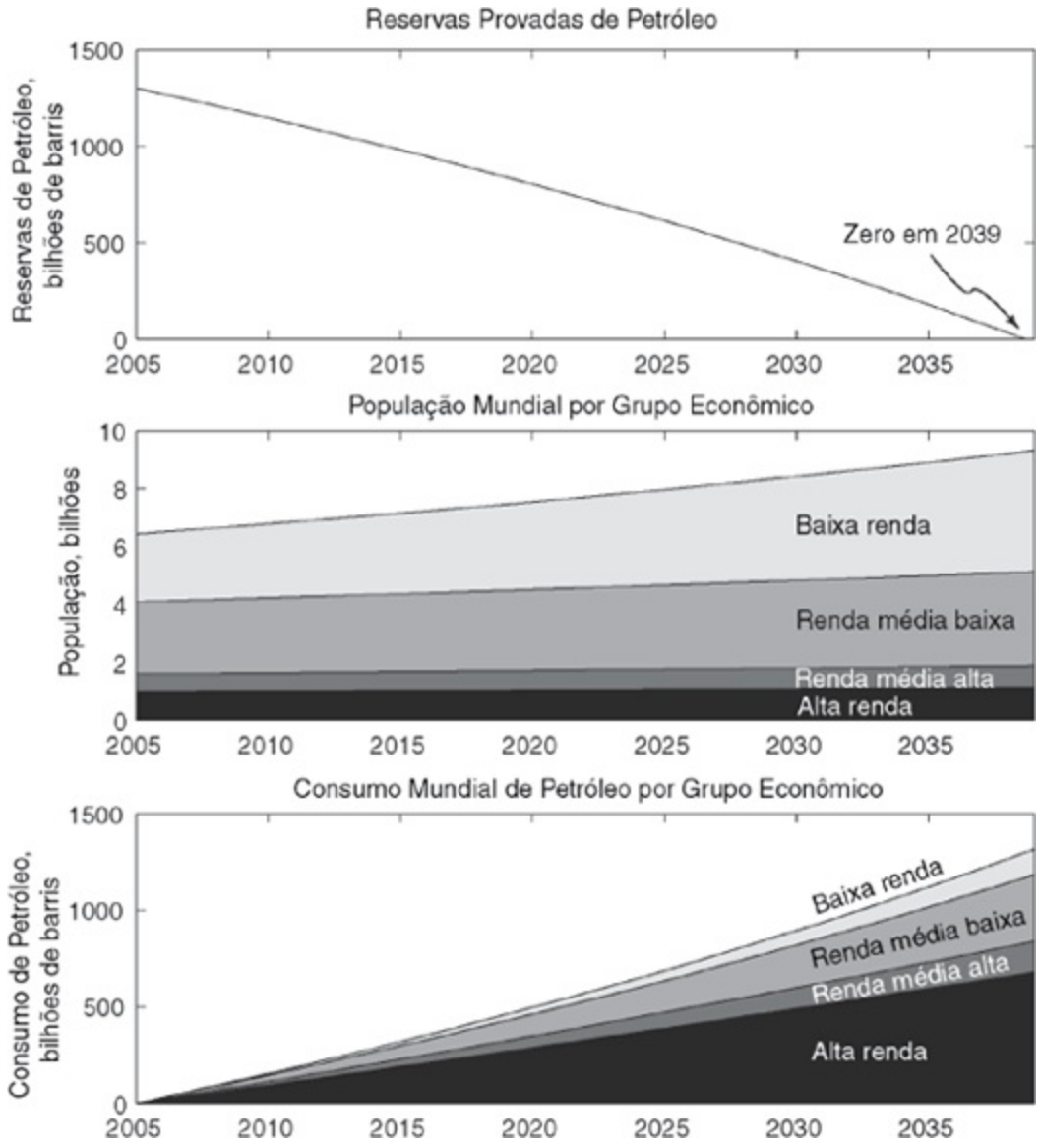


Figura 8.26 Variação, com o tempo, das reservas de petróleo, da população mundial e do consumo de petróleo, de acordo com nosso modelo.

Em 2039, as nações de alta renda ainda serão responsáveis por mais da metade do consumo mundial de petróleo, mas a porcentagem consumida pelas nações de renda média baixa e baixa renda terá aumentado. Enquanto as nações de baixa renda consumiram apenas cerca de 25% da produção de petróleo em 2005, este número aumentará para 36% em 2039. Isto se deverá, porém, principalmente ao aumento da população; embora seja maior em 2039 do que em 2005, o consumo anual de petróleo *per capita* nas nações de renda média baixa ainda será menor que 5 bbl/ano e nas nações de baixa renda será menor que 2 bbl/ano, muito menos que o consumo de 18,5 bbl/por ano das nações de alta renda em 2005.

8.4.6 Ficaremos Realmente Sem Petróleo a Partir de 2040?

Nosso modelo prevê que as reservas provadas de petróleo se esgotarão em 2039, mas será que isso realmente vai acontecer? Para responder a essa pergunta, precisamos considerar as limitações do modelo em duas questões importantes: a modelagem da oferta e a modelagem do consumo. Do lado da oferta, o principal defeito do modelo é que não existe um cano alimentando o tanque; consideramos apenas as reservas provadas de petróleo, aquelas que podiam ser recuperadas com razoável certeza nas condições econômicas e operacionais vigentes em 2006. Existe, indubitavelmente, uma certa quantidade de petróleo ainda não descoberto que pode ser recuperado usando a tecnologia atual. Essa quantidade de petróleo poderia ser modelada aumentando a quantidade inicial de petróleo no tanque ou usando um cano de abastecimento rotulado como “novas descobertas”. Outras possíveis fontes de petróleo são as reservas, como as *areias petrolíferas* e o *xisto betuminoso*. Tais reservas não podem ser recuperadas economicamente a preços de hoje, mas podem se tornar economicamente viáveis com os aumentos futuros do preço do petróleo.

As *areias petrolíferas* são misturas de areia ou argila com uma forma de petróleo extremamente viscosa chamada *betume*. Enquanto quase todo o petróleo hoje em dia é bombeado para fora dos poços em forma líquida, as areias petrolíferas teriam que ser mineradas e separadas dos minerais por aquecimento ou dissolução em outros hidrocarbonetos. Existe duas vezes mais petróleo no mundo na forma de areias petrolíferas do que na forma líquida; as maiores reservas conhecidas estão no Canadá e na Venezuela. As reservas de areias petrolíferas situadas em Alberta, no Canadá, cobrem uma área de mais de 141.000 km^2 e vêm sendo exploradas, por mineração a céu aberto, desde meados da década de 1960. O governo canadense estima que aproximadamente 174 bilhões de barris de petróleo podem ser recuperados economicamente dessas reservas usando a tecnologia atual. As reservas totais estimadas chegam a 1,8 trilhão de barris, mas a extração desse petróleo seria muito onerosa e teria um sério impacto ambiental. O *xisto betuminoso* é uma rocha sedimentar com uma mistura de compostos orgânicos, chamada *querogênio*, que não passou tempo suficiente enterrada para produzir petróleo líquido. Quando é aquecido a mais de 300°C, o xisto produz um vapor que, ao ser condensado, se transforma em um líquido semelhante ao petróleo. Dois dos principais problemas do xisto betuminoso são o custo da energia necessária para refiná-lo e o impacto ambiental. As reservas estimadas de xisto betuminoso estão na casa dos 3 trilhões de barris de petróleo recuperável, com mais de 2 trilhões de barris apenas nos Estados Unidos, principalmente nos estados do Colorado, Utah e Wyoming.

Do lado do consumo, nosso modelo supõe que a demanda de petróleo nos próximos 40 anos continuará a seguir a tendência histórica. O que o modelo não leva em conta é o efeito do preço do petróleo sobre a demanda e, em especial, o que vai acontecer se o preço do petróleo aumentar muito. Em nosso modelo, o petróleo continua a ser consumido a preços de hoje até se esgotar. Em um

modelo mais realista, com a redução das reservas o preço do petróleo tende a subir, e isso acarreta uma redução do consumo, fazendo com que as reservas durem mais tempo. Por outro lado, se o preço do petróleo subir acima do que as pessoas podem pagar para atender a suas necessidades de energia, isso poderá levar a uma crise mundial muito antes que as reservas se esgotem.

Para resumir, um modelo mais preciso da produção e consumo de petróleo teria que levar em conta vários fatores importantes que não estão incluídos em nosso modelo. Mesmo assim, nosso modelo mostra que provavelmente haverá mudanças significativas nos padrões de produção e consumo de petróleo na próxima geração. Independentemente da quantidade total de petróleo disponível e da evolução do consumo, uma coisa é certa: a sociedade terá *necessidade* de uma nova geração de engenheiros e cientistas para administrar essas mudanças e, o que é mais importante, introduzir as inovações necessárias para que a sociedade continue a dispor de energia barata e abundante.

PROBLEMAS

1. **Mudanças de Estado**
   Cada um dos cenários a seguir descreve uma situação em que algo está mudando. Para cada um, descreva pelo menos três "variáveis de estado" que podem fazer parte de um modelo usado para estudar essa mudança.

   (a) previsão de tempo
   (b) fauna e flora de um pequeno lago
   (c) custo de moradia em uma cidade

2. **Velocidade e Distância**
   A tabela a seguir mostra a velocidade de um automóvel em

diferentes instantes de tempo. Qual foi a distância percorrida pelo automóvel nos 12 s transcorridos desde que a velocidade começou a ser medida?

Tempo, s	0	5	10	15
Velocidade, m/s	10	20	15	25

3. Velocidade Média

A tabela a seguir mostra a posição de um automóvel em diferentes instantes de tempo. Qual é o valor da velocidade média 12 s após a partida do carro?

Tempo, s	0	5	10	15
Velocidade, m/s	0	20	50	75

4. Método de Euler e Equações Diferença

As equações diferença a seguir descrevem três diferentes funções do tempo $P(t)$, onde b e c são constantes.

(a) $\Delta P(t)/\Delta t = c$

(b) $\Delta P(t)/\Delta t = bt$

(c) $\Delta P(t)/\Delta t = bt + c$

Suponha que o valor de $P(t)$ no instante $t = 0$ seja P_0. Use o Método de Euler para determinar valores aproximados de $P(\Delta t)$ e $P(2\Delta t)$ nos três casos.

5. Planilha do Modelo da Trajetória de uma Bola sem Arrasto

Crie uma planilha para modelar a trajetória de uma bola lançada verticalmente, desprezando a força de arrasto e usando os parâmetros iniciais da Tabela 8.2. Compare os resultados com os da Tabela 8.3 para corrigir possíveis erros. Use a planilha para responder às seguintes perguntas:

(a) Se a velocidade inicial for reduzida para 10 m/s, qual será a altura atingida pela bola e quanto tempo ela permanecerá no

ar? Responda às mesmas perguntas se a velocidade inicial for aumentada para 30 m/s. Note que, no segundo caso, será necessário acrescentar novas linhas à tabela.

(b) Determine a altura máxima atingida pela bola se esta for lançada da superfície lunar com uma velocidade inicial de 20 m/s.

(c) Use a planilha para simular uma série de experimentos nos quais a velocidade inicial varia de 5 m/s até 50 m/s a incrementos de 5 m/s.

i. Plote a altura máxima em função da velocidade inicial.

ii. De acordo com a teoria de Galileu, discutida no Capítulo 4, qual deveria ser a relação entre a altura máxima e a velocidade inicial? Usando técnicas do Capítulo 5, semelhantes às usadas para validar a Lei de Boyle, determine até que ponto os resultados da sua simulação estão de acordo com a teoria de Galileu.

6. Planilha do Modelo da Trajetória de uma Bola com Arrasto

Crie uma planilha para modelar a trajetória de uma bola lançada verticalmente, incluindo a força de arrasto e usando os parâmetros iniciais da Tabela 8.5. Plote os resultados e compare com os gráficos da Figura 8.11 para corrigir possíveis erros. Use a planilha para responder às seguintes perguntas:

(a) velocidade terminal de um objeto em queda é a velocidade para a qual a força de arrasto é igual à força da gravidade. Ao atingir essa velocidade, o objeto para de acelerar e passa a se mover com velocidade constante. Estime a velocidade terminal de uma bola de boliche, de uma bola de basquete, de uma bola de golfe e de uma bola de pingue-pongue.

(b) Uma bola de basquete e uma bola de golfe são deixadas cair, ao mesmo tempo, do alto da Torre de Pisa. A que distância as bolas estão uma da outra no momento em que a bola que está

na frente se choca com o solo?

(c) Use a planilha para simular uma série de experimentos nos quais a velocidade inicial varia de 5 m/s até 50 m/s a incrementos de 5 m/s.

i. Plote a altura máxima em função da velocidade inicial.

ii. Tomando como base a relação entre velocidade e altura proposta por Galileu, use as técnicas do Capítulo 5 para formular um modelo empírico que permita calcular a altura máxima em função da velocidade inicial.

7. Energia Armazenada em uma Mola

Do mesmo modo como modelamos o movimento de um objeto em queda como uma série de deslocamentos a intervalos regulares de tempo, podemos modelar a energia armazenada em uma mola como uma série de trabalhos realizados ao longo de intervalos regulares de comprimento. Neste exercício, vamos desenvolver um modelo para a energia armazenada em uma mola.

(a) Assim como a velocidade de um objeto varia enquanto ele está caindo, a força exercida por uma mola varia enquanto ela está sendo deformada. Supondo que a mola obedece à Lei de Hooke, escreva uma equação para a taxa de variação da força de uma mola com a variação do comprimento.

(b) Usando o Método de Euler, formule um modelo discreto para a força exercida por uma mola quando ela é deformada de um comprimento inicial para um comprimento final através de uma série de estados igualmente espaçados.

(c) Crie uma planilha que permita calcular a força em função da deformação da mola. Suponha que a constante de mola é 20 N/m e que a deformação varia de 0 a 1 m em incrementos de 0,1 m. Plote os resultados.

(d) Escreva uma expressão para o trabalho necessário para

deformar a mola de um estado para o estado seguinte.

(e) Modifique a planilha para incluir o valor acumulado do trabalho realizado em todos os estados anteriores e assim obter a energia total armazenada na mola. Plote a energia em função da deformação.

(f) Usando as técnicas do Capítulo 5, formule um modelo empírico para a energia armazenada na mola em função da deformação. Para isso, proponha primeiro uma teoria com base na forma da curva da energia em função da deformação e depois transforme o gráfico em uma linha reta. Preste atenção nos valores de constantes importantes relacionadas à inclinação ou aos pontos de interseção da reta.

8. Energia de uma Mola

(a) Estime o valor da energia mecânica interna armazenada em uma mola cujos dados da relação força-deformação estão relacionados na tabela a seguir.

Força Total (N)	Deformação (cm)
25	5,50
50	10,00
75	13,25
100	15,50
125	17,50

(b) Se você lançou verticalmente para cima um projétil de 2 kg usando esta mola, estime a velocidade inicial se a mola foi comprimida 15 cm antes do lançamento. Suponha que toda a energia armazenada na mola seja convertida em energia cinética.

9. Trabalho Necessário para Deformar uma Mola Não Linear

A tabela a seguir mostra as forças e deformações correspondentes

para uma certa mola (não linear).

Força, N	0	40	80	120
Deformação, m	0	0,4	1,6	2,4

(a) Estime o valor do trabalho necessário para levar a mola do estado relaxado a uma distensão de 1 m.

(b) Qual seria o trabalho necessário para distender a mola mais 1 m?

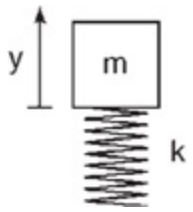
(c) Estime qual seria a velocidade de lançamento de um projétil de 0,2 kg se a mola fosse comprimida 1,5 m, supondo que a energia armazenada fosse totalmente convertida em energia cinética.

(d) Suponha que a velocidade de lançamento do projétil de 0,2 kg tenha sido 20 m/s quando a mola foi comprimida 1,5 m. Qual é a eficiência da conversão da energia da mola em energia cinética?

(e) Se a eficiência da conversão da energia da mola em energia cinética é que foi determinada no item anterior, de quanto deve ser comprimida a mola para lançar o projétil de 0,2 kg com uma velocidade inicial de 25 m/s?

10. Simulação de um Sistema Massa-Mola

Neste problema, vamos examinar um modelo discreto para o movimento do sistema da figura, formado por um objeto de massa m e uma mola de constante k. Suponha que o objeto seja pousado suavemente na mola e começa a comprimi-la ao cair sob o efeito da força da gravidade. Seja y a altura da massa em relação à posição inicial; nesse caso, $y = 0$ no ponto em que o objeto é pousado sobre a mola e y se torna negativo quando a mola é comprimida.



(a) Descreva o que você espera que aconteça se a experiência for executada com um objeto e uma mola de verdade. Faça um gráfico do valor esperado de *y* em função do tempo.

(b) Escreva uma expressão para a força total a que o objeto está submetido em função do tempo em termos de *m*, *y*, *k* e *g*.

(c) A partir do resultado do item anterior, escreva uma expressão para a aceleração do objeto.

(d) Seguindo os passos usados para modelar o movimento de uma bola nas Seções 8.3.2 e 8.3.3, escreva expressões para a posição, velocidade e aceleração do objeto para uma série discreta de estados separados pelo mesmo intervalo de tempo.

(e) Crie uma planilha para implementar o modelo. Suponha que a massa do objeto seja de 1 kg e que a constante da mola é 20 N/m. Simule o movimento do objeto por 3 s com um incremento de tempo de 0,05 s. Os resultados simulados estão de acordo com as suas expectativas? Quais são as diferenças? Você acha que as diferenças são algo que realmente ocorreria no mundo real, ou elas têm algo a ver com a simulação?

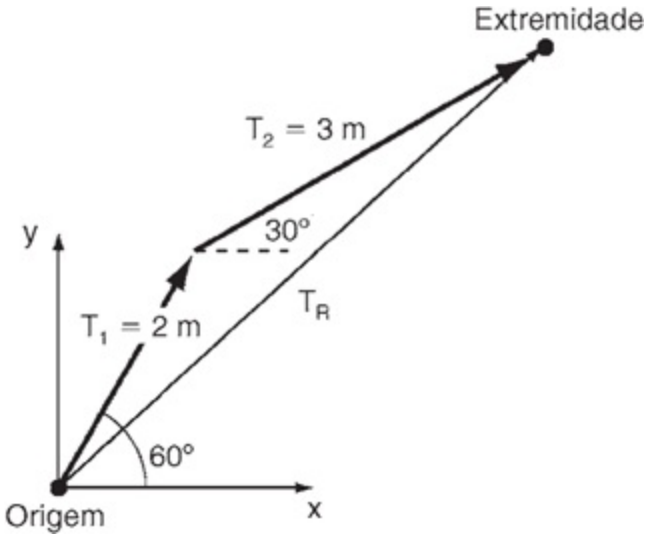
(f) Repita a simulação com incrementos de 0,1 s e 0,01 s, ainda para um tempo total de simulação de 3 s. O que você observa? Dê uma explicação.

11. Vetores de Translação

Do mesmo modo que a força, discutida na Seção 6.2, a posição ou *translação* de um objeto pode ser vista como uma grandeza vetorial que possui um módulo e uma orientação. Além disso, podemos somar vetores de translação desenhando os vetores em sequência, usando o método do paralelogramo ou obtendo as

componentes x e y (no caso de movimentos bidimensionais) e somando as componentes separadamente, como fizemos com os vetores que representavam forças. Caso julgue necessário, releia as Seções 6.2.1 e 6.2.2 que tratam da definição e adição de vetores, antes de resolver este problema.

Suponha que um objeto sofra duas translações sucessivas, $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$, como mostra a figura. $\mathbf{T}_1$ tem um módulo de 2 m e faz um ângulo de 60° com a horizontal, enquanto $\mathbf{T}_2$ tem um módulo de 3 m e faz um ângulo de 30° com a horizontal.



(a) O diagrama mostra o vetor resultante $\mathbf{T}_R$ como o resultado de duas translações, $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$, somadas em sequência. Faça um diagrama da adição de $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ pelo método do paralelogramo e mostre que o resultado é o mesmo.

(b) Determine as componentes x e y dos vetores $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$.

(c) Quais são as componentes x e y do vetor resultante $\mathbf{T}_R$?

(d) Qual é o módulo e qual a orientação de $\mathbf{T}_R$?

12. Vetores Velocidade

Como a força e a translação, a velocidade é uma grandeza vetorial que possui módulo e orientação. Caso julgue necessário,

releia as Seções 6.2.1 e 6.2.2 que tratam da definição e adição de vetores, antes de resolver este problema.

(a) Uma pessoa está remando um barco em um rio. Se a pessoa está remando com uma velocidade de 3 km/h perpendicular às margens do rio e a velocidade da água do rio é de 4 km/h, qual é a velocidade do barco na direção da travessia? Qual é o ângulo da direção do movimento do barco em relação às margens?

(b) Uma bola lançada de uma torre está se movendo com uma velocidade de 20 m/s que faz um ângulo de 15° para baixo com a horizontal. Quais são as componentes horizontal e vertical da velocidade?

13. Decolagem de um Avião

Um avião a jato decolou fazendo um ângulo de 12° com a horizontal e a uma velocidade constante de 260 km/h na direção do movimento.

(a) Quantos metros o avião está subindo por segundo?

(b) Quanto tempo o avião leva para percorrer uma distância horizontal de l km?

14. Uso do Método de Euler para Simular a Subida de um Avião com Velocidade Constante

No Exemplo 8.2, usamos o Método de Euler para simular a trajetória de um caixote sendo levantado verticalmente com velocidade constante. Neste problema, vamos estender o modelo para considerar um objeto que está se movendo com velocidade constante em uma direção arbitrária, como, por exemplo, um avião subindo. A explicação a seguir ajudará você a acompanhar o processo.

No caso mais simples de um objeto que se move verticalmente com velocidade constante, modelamos a velocidade como a

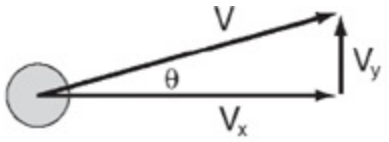
variação da altitude dividida pela variação do tempo:

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t}$$

Em seguida, expressamos a altura no estado seguinte em termos da altura no estado atual e da velocidade:

$$y_{i+1} = y_i + v\Delta t$$

No caso bidimensional, a velocidade é um *vetor* de módulo v e orientação θ. Para modelar o movimento de um objeto neste caso, podemos separar o vetor velocidade em suas componentes x e y, como mostra a figura



onde

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \qquad v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t}$$

Com a velocidade separada nas componentes x e y, podemos usar o Método de Euler para modelar a variação de posição de um estado para o seguinte:

$$x_{i+1} = x_i + v_x\Delta t \qquad y_{i+1} = y_i + v_y\Delta t$$

Depois desta introdução, complete a tabela a seguir para simular os primeiros três estados do sistema do Problema 8.13: um avião subindo com um ângulo de 12° a uma velocidade de 260 km/h na direção do movimento. Use um incremento de tempo $\Delta t = 1$ s.

	Estado	t	x	y	v_x	v_y
Fórmula:	i	t_0	0	0		
Valor:	0	0				
Fórmula:	i	$t_0 + \Delta t$				
Valor:	1					
Fórmula:	i	$t_1 + \Delta t$				
Valor:	2					

15. Uso de uma Planilha para Modelar o Movimento de um Objeto com Velocidade e Orientação Constantes

Crie uma planilha para modelar a trajetória de um objeto que se move com velocidade constante fazendo um ângulo constante com um eixo de referência. A planilha deve ser semelhante à do Problema 8.14, mas deve ter pelo menos 20 linhas (intervalos de tempo). Os dados iniciais a serem usados na simulação devem ser os seguintes:

Nome	Descrição	Unidades
m	Massa da bola	kg
r	Raio da bola	m
Δt	Incremento de tempo	s
x_0, y_0	Posicão inicial	m
v_0	Velocidade	m/s
θ	Ângulo	Graus

Teste a planilha simulando a situação dos Problemas 8.13 e 8.14: um avião subindo com um ângulo de 12° a uma velocidade de 260 km/h na direção do movimento. Use um incremento de tempo $\Delta t = 1$ s. De acordo com a planilha, quanto tempo o avião levará para percorrer uma distância horizontal de 1 km? A resposta que você obteve é igual à do Problema 8.13?

16. Forças a que Está Sujeita uma Bola de Tênis

Pouco depois de ser golpeada, uma bola de tênis está se movendo com uma velocidade de 25 m/s e faz um ângulo de 10° para cima

com a horizontal. A massa da bola é de 57 g e o diâmetro é de 6,5 cm. Resolva, em *duas etapas*, os problemas a seguir: na primeira etapa, ignorando os efeitos do arrasto; na segunda, levando em conta os efeitos do arrasto. Suponha que a bola seja uma esfera perfeita para calcular os efeitos do arrasto.

(a) Desenhe um diagrama de corpo livre da bola, mostrando todas as forças (consideradas) que agem sobre ela.

(b) Quais são as componentes horizontal e vertical da força resultante que age sobre a bola?

(c) Quais são as componentes horizontal e vertical da aceleração da bola?

Comente a importância dos efeitos do arrasto.

17. Modelo de Euler de uma Bola Lançada Fazendo um Ângulo com a Vertical, nas Condições do Vácuo

Neste problema, vamos usar os resultados da Seção 8.3.2, do Problema 8.14 e do Problema 8.16 para formular um modelo da trajetória de uma bola lançada fazendo um ângulo com a vertical, ignorando os efeitos da força de arrasto e usando o Método de Euler. Você deve estudar a Seção 8.3.2 e resolver os dois problemas anteriores antes de tentar resolver este problema.

Para recapitular, na Seção 8.3.2 modelamos a trajetória de uma bola que se movia na vertical, ignorando a força de arrasto. O modelo se baseava em três equações: uma para a altura, uma para a velocidade e uma para a aceleração. Para aplicar o modelo, criamos uma tabela (a Tabela 8.2) na qual as colunas correspondiam às variáveis de estado e as linhas correspondiam aos estados sucessivos da bola. No Problema 8.14, modelamos o movimento de um objeto em duas dimensões, mas com velocidade constante. Finalmente, no Problema 8.16 encontramos expressões para as componentes horizontal e vertical da

aceleração de um objeto que se movia com uma certa velocidade. Agora, vamos combinar esses resultados para formular um modelo completo para o movimento de um objeto em duas dimensões, ignorando a força de arrasto (que será levada em conta em outro exercício). Complete a tabela a seguir para simular os primeiros três estados do movimento da bola de tênis do Problema 8.16, que, no instante $t = 0$, está se movendo com uma velocidade de 25 m/s e faz um ângulo de 10° para cima com a horizontal. Use um incremento de tempo de 0,1 s.

	Estado	t	x	y	v_x	v_y	a_x	a_y
Fórmula:	i	t_0	0	0				
Valor:	0	0						
Fórmula:	i	$t_0 + \Delta t$						
Valor:	1							
Fórmula:	i	$t_1 + \Delta t$						
Valor:	2							

18. Uso de uma Planilha para Modelar o Movimento de uma Bola de Tênis, Ignorando o Arrasto

Crie uma planilha para modelar a trajetória de uma bola de tênis, ignorando os efeitos do arrasto. A planilha deve ser semelhante à do Problema 8.17. Os dados iniciais a serem usados na simulação são os seguintes:

Nome	Descrição	Unidades
Δt	Incremento de tempo	s
x_0, y_0	Posição inicial	m
υ_0	Velocidade inicial	m/s
θ	Ângulo	Graus

Teste a planilha simulando a trajetória de uma bola de tênis lançada com um ângulo de 10° para cima com a horizontal e uma velocidade inicial

de 25 m/s, usando um incremento de tempo de 0,1 s. Use um número de linhas suficiente na planilha para determinar o tempo que a bola permanece no ar. Use os dados da planilha para fazer os seguintes gráficos:

- distância em função do tempo
- altura em função do tempo
- altura em função da distância

Finalmente, responda às seguintes perguntas:

- Qual é a altura máxima atingida pela bola?
- Quanto tempo a bola passa no ar?
- Qual é a distância horizontal percorrida pela bola até esta tocar o solo?

19. Modelo de Euler de uma Bola Lançada Fazendo um Ângulo com a Vertical, Levando em Conta o Arrasto

Faça novamente o Problema 8.17, incluindo, desta vez, a força de arrasto.

20. Uso de uma Planilha para Modelar o Movimento de uma Bola de Tênis, Levando em Conta o Arrasto

Faça novamente o Problema 8.18, incluindo, desta vez, a força de arrasto. A planilha deve ser semelhante à do Problema 8.19. Os dados iniciais a serem usados na simulação são os seguintes:

Nome	Descrição	Unidades
m	Massa da bola	kg
r	Raio da bola	m
Δt	Incremento de tempo	s
x_0, y_0	Posição inicial	m
υ_0	Velocidade inicial	m/s

θ	Ângulo	Graus

21. Lançamento de uma Bola de Tênis, de uma Bola de Futebol, de uma Bola de Golfe e de uma Bola de Pingue-Pongue

Use a planilha do Problema 8.20 para determinar a distância horizontal percorrida, até tocar o solo, por uma bola de tênis, de futebol, de golfe e de pingue-pongue lançada com um ângulo de 10° para cima com a horizontal e uma velocidade inicial de 25 m/s.

22. Uso de uma Planilha para Modelar o Consumo de Petróleo

Crie uma planilha para calcular o consumo de petróleo com base no modelo apresentado na Seção 8.4.5. Implemente a simulação por partes, verificando os resultados de cada parte, como a do aumento da população, antes de passar para a parte seguinte. Quando estiver convencido de que a simulação está correta e reproduz os resultados do texto, faça uma lista de cinco eventos importantes que podem mudar as condições iniciais do modelo e faça a simulação para as novas condições iniciais de cada caso. Discuta os resultados e suas implicações.

[1] A abreviação de barril de petróleo é “bbl”, que vem da expressão “blue barrel”, ou seja, “barril azul”. A unidade foi adotada na década de 1860, quando o barril azul da empresa de petróleo Standard Oil, que tinha uma capacidade de 42 galões, passou ser usado como referência [Ene].

PARTE III

SOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM O MATLAB

CAPÍTULO 9

INTRODUÇÃO AO MATLAB

CAPÍTULO 10

OPERAÇÕES VETORIAIS NO MATLAB

CAPÍTULO 11

OPERAÇÕES COM MATRIZES NO MATLAB

CAPÍTULO 12

INTRODUÇÃO A ALGORITMOS E PROGRAMAÇÃO EM MATLAB

APÊNDICE A

PROCESSO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

APÊNDICE B

A TAXONOMIA DE BLOOM: NÍVEIS DE ENTENDIMENTO

APÊNDICE C

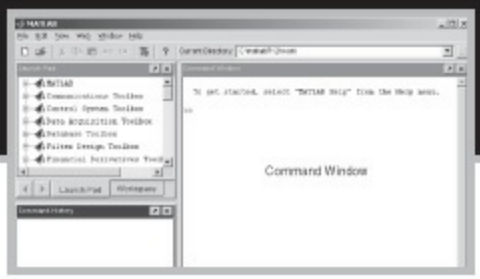
SOCIEDADES DE ENGENHARIA E ORGANIZAÇÕES DE CLASSE

APÊNDICE D

SISTEMAS DE UNIDADES

CAPÍTULO 9

Introdução ao MATLAB



OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- explicar o que é o MATLAB e que vantagens ele apresenta em relação a uma calculadora de bolso para resolver problemas de engenharia;
- explicar o que é uma variável e usar o MATLAB para atribuir valores escalares a variáveis e calcular o valor numérico de expressões aritméticas que contêm variáveis e expressões escalares;
- escrever um *script* simples de MATLAB, com comentários, que executa uma série de comandos.

9.1 A PRIMEIRA SESSÃO DE MATLAB

9.1.1 Interpretação de Expressões Aritméticas Simples

Nesta seção, vamos examinar os passos necessários para você escrever o seu primeiro programa de MATLAB. Você deve ler esta seção em frente a um computador e digitar os exemplos à medida que são apresentados.

Quando você entra no MATLAB, uma janela semelhante à da Figura 9.1 aparece. Nos primeiros exemplos, vamos digitar comandos diretamente no prompt da janela de comando.

A parte central do MATLAB é o interpretador de comandos. Uma interação típica com o interpretador de comandos seria o seguinte diálogo:

- você digita um comando na janela do interpretador de comandos, do MATLAB, no prompt de comando;
- o MATLAB executa o comando e mostra o resultado na tela.

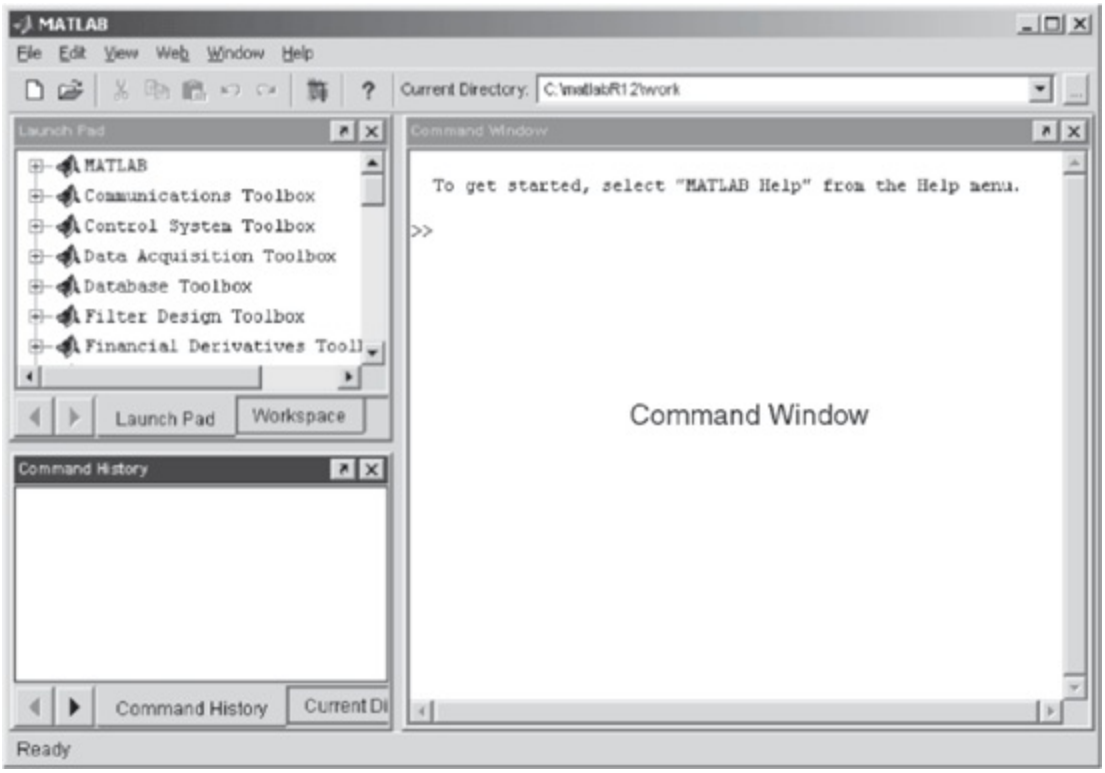


Figura 9.1 A janela principal do ambiente de programação do MATLAB.

A forma mais simples de comando do MATLAB faz o MATLAB calcular o valor de uma expressão aritmética, e uma das expressões aritméticas mais simples é um número. Se você entra com 1.5 no prompt de comando,[1]

```
>> 1.5
```

O MATLAB responde mostrando na tela:

```
ans =

    1.5000
```

O que aconteceu foi que você entrou com um comando para calcular o valor da expressão aritmética 1.5, o MATLAB executou este comando e mostrou a resposta, 1.5.

É possível escrever expressões aritméticas mais complexas combinando números com operadores aritméticos como + (adição), – (subtração), * (multiplicação) ,/ (divisão) e ^ (exponenciação). Assim, por exemplo, se você digitar a expressão aritmética

```
>> 2 + 1.5
```

o MATLAB executará a soma e mostrará o resultado

```
ans =

    3.5000
```

Seguem outros exemplos de expressões aritméticas. Experimente a primeira com e sem parênteses. Qual é a *precedência* (ordem) das operações de adição e multiplicação no MATLAB?

```
>> (2 + 1.5) * 3

ans =

    10.5000

>> 3^2 + 4^2

ans =

    25
```

Para usar a notação científica, basta usar e ou E para indicar o expoente de 10.

`-1.5e2 = -1.5 × 10^2`

`2.75e-3 = 2.75 × 10^-3`

O MATLAB oferece uma grande variedade de funções matemáticas que podem ser usadas em expressões. Algumas das mais comuns aparecem na Tabela 9.1. Uma lista completa pode ser obtida selecionando, sucessivamente, a partir do menu principal do MATLAB, `Help > MATLAB Help > By Category > Mathematics > Elementary Math`.

9.1.2 Variáveis

Até então, vimos no MATLAB exemplos de duas coisas básicas que esperamos encontrar em qualquer linguagem de programação: uma forma de expressar ideias primitivas, como números e operadores aritméticos, e uma forma de combiná-las em expressões compostas. Vamos agora examinar alguns dos mecanismos que o MATLAB oferece para abstrações. A forma mais básica de abstração usada em qualquer linguagem de programação é um modo de atribuir nomes a dados ou procedimentos. Os nomes usados para representar dados são chamados de *variáveis* na maioria das linguagens de programação. No MATLAB, usamos o *operador de atribuição*, representado por um sinal de igualdade (=) para associar o nome de uma variável ao valor de uma expressão. Entrando no prompt de comando com

```
>> raio = 4

raio =

     4
```

fazemos com que o MATLAB associe o valor 4 à variável raio. Para obter o valor da variável, basta entrar com o nome da variável no prompt:

```
>> raio = 4

raio =

     4
```

Depois de definidas as variáveis, elas podem ser usadas em expressões, entre elas expressões que definem outras variáveis. Assim, por exemplo, podemos definir uma variável que representa a área de um círculo e usa a variável raio e a variável nativa pi do MATLAB.[2]

```
>> area = pi * raio^2

area =

    50.2655
```

TABELA 9.1 Operadores e funções mais comuns do MATLAB

Aritmética

Operador	Descrição	Operador	Descrição	Operador	Descrição
+	Soma	-	Subtração	*	Multiplicação
\	Divisão	^	Exponenciação		

Trigonometria, Logaritmos e Exponenciais

Função	Descrição	Função	Descrição	Função	Descrição
sin	Seno	cos	co-seno	tan	Tangente
asin	Arco seno	acos	arco co-seno	atan	Arco tangente
log	Logaritmo natural	log2	$\log_2$	log10	$\log_{10}$
sqrt	Raiz quadrada	exp	e^x		

Arredondamento e Resto

Função	Descrição	Função	Descrição	Função	Descrição
abs	Valor absoluto	mod	Módulo	rem	Resto
round	Arredonda	floor	Arredonda para baixo	ceil	Arredonda para cima

O MATLAB armazena os valores de todas as variáveis em um tipo de memória chamado *espaço de trabalho*. Como muitas linguagens de programação, o MATLAB permite usar diferentes espaços de trabalho para partes diferentes de um programa; por enquanto, vamos guardar os valores de todas as nossas variáveis no espaço de trabalho *global*. Para obter uma lista de todas as variáveis definidas no espaço de trabalho ativo, basta usar o comando who:

```
>> who
Your variables are:
ans area raio
```

Em resposta a este comando, o programa mostrou as duas variáveis que criamos explicitamente, `area e raio`, e uma terceira variável, ans. A variável ans é uma variável nativa do MATLAB que contém o valor da última expressão que foi calculada.

Quando começamos uma nova sessão do MATLAB, ele começa com um espaço de trabalho vazio; quando encerramos uma sessão, o espaço de trabalho é zerado. Também é possível zerar o espaço de trabalho a qualquer momento usando o comando clear. Se você quiser

continuar a trabalhar com os dados do espaço de trabalho em outra sessão, pode salvar o conteúdo do espaço de trabalho em um arquivo e carregá-lo novamente usando os comandos save e load.[3]

```
>> save
Saving to: matlab.mat

>> clear
>> who

>> load
>> Loading from: matlab.mat

>> who
Your variables are:
ans area raio
```

9.1.3 *Scripts*

Quando definimos uma variável, associamos um nome a um dado para podermos mais tarde nos referir ao dado através do nome. Da mesma forma, podemos associar um nome a um conjunto de comandos, para que, quando entrarmos com este nome, o MATLAB execute esses comandos em sequência. No MATLAB, um conjunto de comandos desse tipo é chamado de *script*.

Um *script* do MATLAB é uma forma de programa de computador, ou seja, um conjunto de instruções para que o computador execute um determinado procedimento, escrito em uma linguagem de programação. Antes de escrever nosso primeiro *script*, precisamos ter alguma tarefa para executar. Como exemplo, vamos escrever um *script* para calcular a massa de água contida em um tanque cilíndrico. O primeiro passo para escrever um programa em qualquer linguagem de programação é escrever um esboço do programa na língua natal. A Figura 9.2 mostra um possível esboço de um programa para calcular a massa de água contida em um tanque cilíndrico. Antes de escrever o programa como um *script* do MATLAB, vamos fazer algumas

observações a respeito do esboço. Em primeiro lugar, não precisa ser um plano detalhado; serve apenas de orientação para o programador. Um esboço ajuda a definir o problema. O programa em si tem três partes: entrada dos dados, execução dos cálculos e saída dos resultados. Muitos dos programas que vamos escrever terão a mesma estrutura básica de entrada, cálculos e saída.

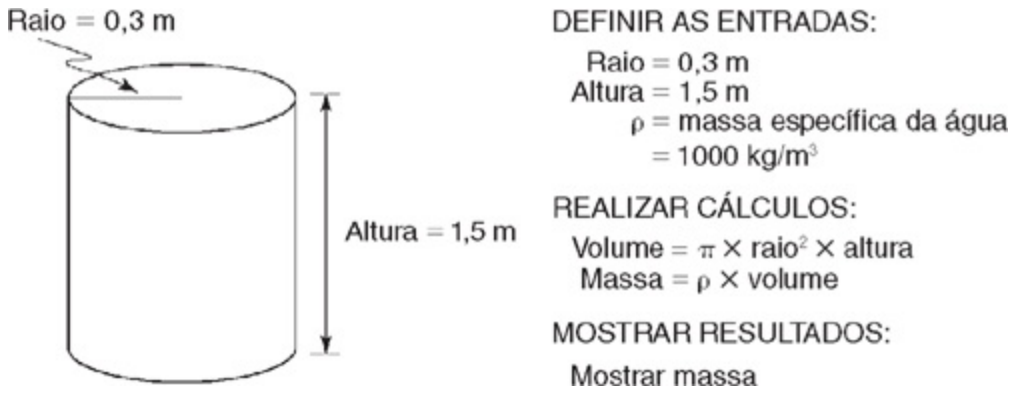


Figura 9.2 Esboço de um *script* para calcular a massa de água contida em um tanque cilíndrico.

Depois de preparar um esboço do programa, estamos prontos para digitar e salvar o *script* do MATLAB. Para que o MATLAB possa localizar e executar um *script*, ele deve ser salvo com a extensão .m, o que o torna um "arquivo M". A partir do menu principal do MATLAB, selecione `File > New > M-file`, ou dê um clique no ícone que mostra uma página vazia. Com isso será aberta a janela do editor do MATLAB. O texto a seguir é um *script* do MATLAB escrito com base no esboço do programa para calcular a massa de água contida em um tanque cilíndrico. Digite o *script* no editor.

```
% massa_de_agua: programa para calcular a
   massa de água em um tanque

   raio = 0.3; % raio da base do tanque, m
   altura = 1.5; % altura do tanque, m
   ro = 1000; % massa específica da água, g/m^3
```

```
volume = pi * raio^2 * altura;
massa = ro * volume;

disp('massa em kg');
disp(massa);
```

Ao digitar o texto acima, observe que os textos que se seguem ao símbolo "%" aparecem verdes na tela. Esses comentários servem para facilitar a compreensão do *script*, não tendo efeito sobre a execução. O comando disp do MATLAB é usado para mostrar textos ou valores numéricos na tela do computador. Quando o argumento de `disp` está entre apóstrofos, os caracteres que estão entre os apóstrofos são mostrados na tela; quando o argumento de `disp` é o nome de uma variável (sem apóstrofos), o valor da variável é mostrado na tela. A presença de um ponto e vírgula no final de cada comando faz com que o resultado da execução do comando não seja mostrado na tela. Se os sinais de ponto e vírgula forem omitidos, o *script* será executado corretamente, mas os resultados parciais serão mostrados desnecessariamente na tela.

Antes de executar o *script*, você precisa salvá-lo e nomeá-lo. Selecione `File > Save As…` no menu principal do editor e digite `massa_de_agua` como nome do arquivo. Não há necessidade de digitar a extensão .m; o MATLAB acrescenta a extensão por você.

Para executar o *script*, digite o nome do *script*, `massa_de_agua`, no prompt de comando:

```
>> massa_de_agua massa em kg

    424.1150
```

Parabéns! Você escreveu e executou seu primeiro programa de MATLAB.

9.2 EXEMPLOS

9.2.1 Determinação das Velocidades Após uma Colisão

Na Seção 4.3.5, discutimos a solução do problema de determinar as velocidades de dois corpos após uma colisão. Se dois corpos têm massas m_1 e m_2 e suas velocidades antes da colisão são, respectivamente, v_{1_i} e v_{2_i}, as velocidades após uma colisão totalmente elástica são

$$v_{1f} = \frac{m_1 v_{1i} - m_2 v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$
$$v_{2f} = \frac{m_2 v_{2i} - m_1 v_{2i} + 2m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2}$$

Vamos usar essas fórmulas para escrever um *script* do MATLAB para calcular as velocidades finais de dois corpos cujas massas e velocidades iniciais são conhecidas. Supondo que $m_1 = m_2 = 5$ kg e que v_{1_i} 4 m/s e $v_{2_i} = -6$ m/s, como no Exemplo 4.3, o *script*, que será chamado de `colisao.m`, tem a seguinte forma:

```
% colisao: cálculo das velocidades após uma colisão
% perfeitamente elástica

m1 = 5; % massa do corpo 1, kg
m2 = 5; % massa do corpo 2, kg
v1i = 4; % velocidade inicial do corpo 1, m/s
v2i = -6; % velocidade inicial do corpo 2, m/s

% cálculo das velocidades finais

v1f = (m1*v1i - m2*v1i + 2*m2*v2i)/(m1 + m2)
v2f = (m2*v2i - m1*v2i + 2*m1*v1i)/(m1 + m2)
```

Executando o *script*, obtemos

```
>> colisa
v1f =
```

```
     -6

v2f =

     4
```

Eis alguns comentários em relação a esse *script*:

- O *script* começa com um comentário que consiste no nome do *script* e uma descrição sucinta.
- A seguir são atribuídos valores às variáveis de entrada, com comentários que descrevem a variável e especificam a unidade em que está expressa.
- Para ver os resultados, simplesmente omitimos os sinais de ponto e vírgula no final das linhas usadas para calcular as velocidades finais `v1f e v2f`, o que fez com que o MATLAB mostrasse os resultados na tela depois de calculá-los. Como os nomes das variáveis são autoexplicativos, não houve necessidade de usar o comando `disp`. Acrescentar e remover sinais de ponto e vírgula para controlar os valores que vão ser mostrados na tela é um artifício bastante comum.

9.2.2 Massa do CO_2 Produzido por um Automóvel

Neste exemplo, vamos usar um *script* do MATLAB para calcular a massa do CO_2 produzido por um carro de passeio típico, usando os resultados da Seção 3.6. A organização do *script* obedece ao esquema convencional: depois dos comentários iniciais, as variáveis são definidas e usadas em fórmulas.

Variáveis e Equações A tabela a seguir mostra as variáveis usadas no problema, já definidas na Seção 3.6:

Símbolo	Descrição	Valor
Distância	Distância rodada em um ano	29.200 km

Consumo de combustível	Consumo de gasolina	10 km/L
ρ_{gas}	Massa específica da gasolina	0,75 kg/L
MA_H	Massa atômica do H	1 g/mol
MA_C	Massa atômica do C	12 g/mol
MA_O	Massa atômica do O	16 g/mol
MA_{gas}	Massa atômica da gasolina	Desconhecido
MA_{CO_2}	Massa atômica do CO_2	Desconhecido
$Massa_{gas}$	Massa de gasolina	Desconhecido
$Massa_{CO_2}$	Massa de CO_2	Desconhecido
Mol_{gas}	Número de mols de gasolina	Desconhecido
Mol_{CO_2}	Número de mols de CO_2	Desconhecido

Por conveniência, vamos repetir também as equações obtidas na análise da Seção 3.6. As massas atômicas da gasolina, C_8H_{18}, e do dióxido de carbono, CO_2, são dadas por

$$MA_{gas} = 8 \times MA_C + 18 \times MA_H$$
$$MA_{CO_2} = MA_C + 2 \times MA_O$$

O volume de combustível consumido e a massa de gasolina queimada são dados por

$$V = \frac{\text{distância}}{\text{consumo}}$$
$$\text{massa}_{gas} = \rho_{gas} \times V$$

A partir da massa e da massa atômica da gasolina, podemos calcular o número de mols:

$$\text{mol}_{gas} = \frac{\text{massa}_{gas}}{MA_{gas}}$$

De acordo com a reação $C_8H_{18} + 12{,}5O_2 \rightarrow 8CO_2 + 9H_2O$, o número de mols de CO_2 é dado por

$$\text{mol}_{\text{CO2}} = 8 \times \text{mol}_{\text{gas}}$$

Finalmente, a massa do CO_2 produzido é dada por

$$\text{massa}_{\text{CO2}} = \text{mol}_{\text{CO2}} \times \text{MA}_{\text{CO2}}$$

***Script* do MATLAB** O *script* a seguir, `massa_de_co2.m`, calcula a massa de CO_2 pedida no problema. As linhas foram numeradas apenas para facilitar os comentários; os números que precedem os comandos não devem ser digitados.

```
1 % massa_de_co2.m
2 % Cálculo da massa de CO2 produzida por
3 % um carro de passeio típico em um ano.
4
5 dist = 29370 % distância/ano, km
6 cons = 10.6; % consumo de g, km/L
7 r = 0.75; % massa específica da g, kg/L
8 ma_H = 1; % massa atômica do H, g/mol
9 ma_C = 12; % massa atômica do C, g/mol
10 ma_O = 16; % massa atômica do O, g/mol
11
12 ma_gas = 8*ma_C + 18*ma_H; % massa atômica da g, g/mol
13 ma_CO2 = ma_C + 2*ma_O; % massa atômica do CO2, g/mol
14 vol_gas = dist/cons; % volume de g/ano, L
15 massa_gas = ro * vol_gas; % massa de g/ano, kg
```

```
16 mol_gas = 1000 * massa_gas/ma_gas; % mols de g/ano

17 mol_CO2 = 8 * mol_gas; % mols de CO2/ano

18 massa_CO2 = mol_CO2 * ma_CO2/1000 % massa de CO2/ano, kg
```

As linhas 1 a 3 são comentários que consistem no nome do *script* e uma descrição sucinta. As linhas 5 a 10 definem as variáveis do *script*. Para facilitar o entendimento, as variáveis têm nomes adequados e são acompanhadas por um comentário que define a variável e a unidade em que essa variável é expressa. Os cálculos são executados nas linhas 12 a 18. Observe que, como na linha 18 o ponto e vírgula foi omitido, o resultado final é mostrado sem necessidade de usar o comando `disp`. Executando o *script*, obtemos o resultado a seguir, o mesmo que havíamos obtido na Seção 3.6.

```
>> massa_de_co2
massa_CO2 =
     6.4165e+003
```

PROBLEMAS

1. Valores de Expressões do MATLAB

Determine os valores das seguintes expressões do MATLAB:

(a) 3.4 * (4.1 – 2.4)
(b) sin (pi / 7)
(c) 5.2 * exp(–0.14)

2. Expressões do MATLAB

Escreva um *script* do MATLAB para determinar os valores das expressões a seguir. Para $A = 1$, $B = 1{,}5$, $C = -10$, $D = 2{,}5$.

(a) $4B + C$
(b) $D^2 + 1{,}5D - 10$

(c) $\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$

(d) $\cos^2(B\pi) + \text{sen}^2(B\pi)$

3. Expressões do MATLAB: Raízes e Expoentes

Escreva um *script* do MATLAB para determinar os valores das expressões a seguir. Para $A = 4$, $B = 7$, $C = 21$ e $D = 0{,}5$.

$$A^2 + \sqrt{\frac{B}{C}}$$

$$\sqrt{(B - D)^2 - (B^2 - D^2)}$$

$$\frac{B^3 - C}{A} + \sqrt[3]{D}$$

4. O que faz este *script* do MATLAB?

Se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são as coordenadas de dois pontos diferentes, o que significa o valor calculado pelo *script* do MATLAB a seguir?

```
sqrt((abs(x1 - x2))^2 + (abs(y1 - y2))^2)
```

5. Uso do MATLAB para Calcular o Valor de um Polinômio

Escreva um *script* do MATLAB para calcular o valor do polinômio a seguir. Para $x = 1{,}2$.

$$x^5 + 7x^4 - 3x^3 + 8x^2 + 12^x - 7$$

6. Cálculos Trigonométricos com o MATLAB

(a) Escreva uma expressão do MATLAB para calcular o seno de 30°.

(b) Escreva uma expressão do MATLAB para determinar o ângulo, em graus, cuja tangente é 1.

7. Raízes de uma Equação do Segundo Grau

As raízes de uma equação do segundo grau da forma

$$ax^2 + bx + c$$

são

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Escreva um *script* do MATLAB para calcular as raízes de uma equação do segundo grau, em que

(a) $a = 1\ b = 5\ c = 6$

(b) $a = 2\ b = 10\ c = 12$

(c) $a = 1\ b = 0\ c = 1$

No seu *script*, escreva as expressões das raízes em termos das variáveis *a*, *b* e *c*. Observe que, frequentemente, o modo mais simples de escrever um *script* é "copiar e colar" várias vezes a mesma linha, fazendo depois as modificações necessárias.

8. Expressões Booleanas

Uma expressão booleana é uma expressão que pode assumir apenas dois valores: "verdadeiro" e "falso". Escreva um *script* do MATLAB para mostrar os valores das expressões booleanas a seguir. Depois de observar os resultados, explique o que significam os operadores '&' e ' ' do MATLAB.

```
true
false
false & false
false & true
true & false
true & true
false | false
false | true
true | false
true | true
```

Determine manualmente os valores das expressões a seguir e

confirme os resultados usando o MATLAB.

(a) `true | false`

(b) `true & (true | false)`

(c) `true | (true & false)`

9. Solução de Problemas com o MATLAB

Resolva os problemas a seguir. A solução deve ter a estrutura proposta no Capítulo 3 (Dados – Objetivo – Diagrama – Plano – Análise – Comentários), com a parte de "Análise" da solução implementada por meio de um *script* do MATLAB.

(a) Determine a energia e o momento de um objeto com uma massa de 12,4 kg que se move com uma velocidade de 5,8 m/s.

(b) Determine a força exercida pela pressão da água sobre um tampão com 1,5 cm de diâmetro situado no fundo de um recipiente que contém água até uma altura de 0,4 m.

(c) Determine o volume máximo de água que pode ser fervido com 7 toneladas de carvão, supondo que a água já está na temperatura de ebulição, que 1 kg de carvão produz 25 MJ e que o calor de vaporização da água é de 2260 kJ/kg.

10. Cálculo do Volume de uma Pirâmide Usando o MATLAB

Determine o volume de uma pirâmide com uma base quadrada de 10 unidades de lado e 15 unidades de altura usando o MATLAB.

11. Cálculo da Área da Superficie de uma Esfera Usando o MATLAB

Determine a área da superfície de uma esfera de 90 cm de diâmetro usando o MATLAB.

12. Entrada de Valores no MATLAB

A expressão do MATLAB a seguir pede que o usuário entre com

um valor e atribua esse valor à variável x:

```
x = input('Entre com o valor de x:');
```

Use a função input para escrever um *script* do MATLAB que pede ao usuário que entre com o valor do raio e calcule:

(a) a circunferência de um círculo com esse raio;
(b) a área de um círculo com esse raio;
(c) o volume de uma esfera com esse raio;
(d) a área da superfície de uma esfera com esse raio.

A saída do seu *script* deve indicar claramente qual é o resultado que está sendo mostrado.

13. A Equação de Drake

O Dr. Frank Drake, presidente do SETI Institute, propôs uma equação para estimar o número de "civilizações comunicativas" que existem em nossa galáxia. De acordo com a Equação de Drake,

$$N = R \times F_P \times N_E \times F_L \times F_I \times F_C \times L$$

onde

N é o número de civilizações comunicativas que existem atualmente em nossa galáxia

R é o número de estrelas apropriadas que se formam em nossa galáxia por ano

F_P é a fração dessas estrelas nas quais existem planetas

N_E é o número de planetas semelhantes à Terra em cada sistema planetário

F_L é a fração de planetas semelhantes à Terra nos quais existe vida

F_I é a fração dos planetas nos quais existe vida inteligente

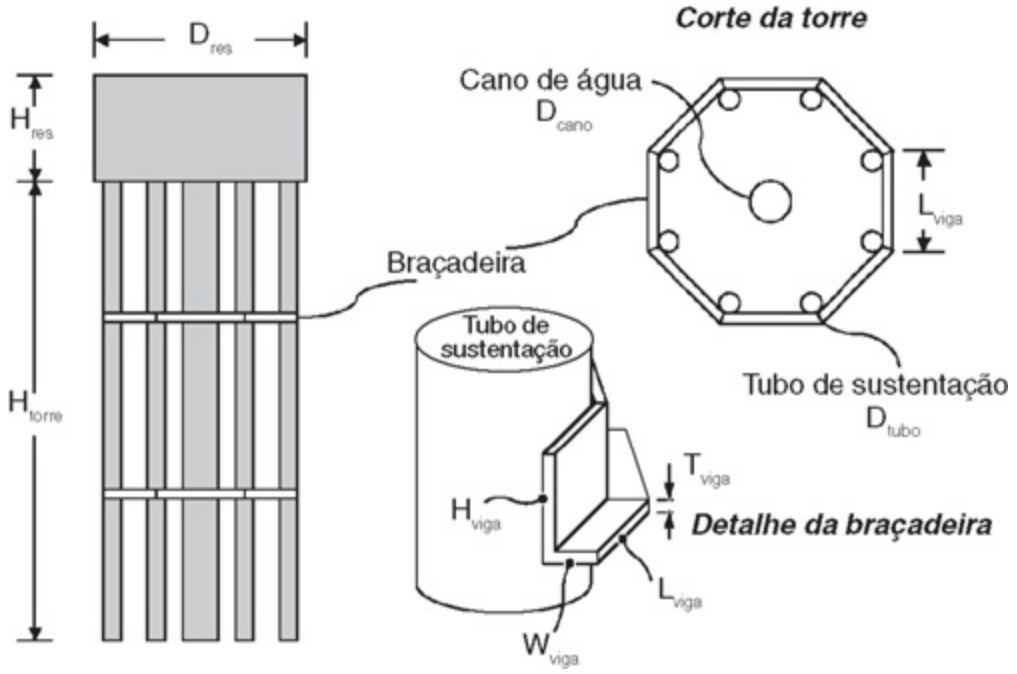
F_C é a fração dos planetas em que existe vida inteligente e em que são desenvolvidos meios de comunicação

L é a duração (em anos) de uma civilização comunicativa

Faça uma pesquisa na Internet a respeito da Equação de Drake e obtenha estimativas dos parâmetros mencionados. Escreva um *script* do MATLAB para atribuir os valores estimados aos parâmetros e calcular o valor de *N*.

14. Pintura de uma Caixa d'Água

Escreva um *script* do MATLAB para calcular quantos litros de tinta são necessários para pintar a caixa d'água descrita no Exemplo 3.1. A caixa d'água é formada por uma torre e um reservatório. O reservatório é um cilindro fechado. A torre é formada por oito tubos de sustentação dispostos simetricamente em torno de um cano de água de maior diâmetro. Duas braçadeiras octogonais feitas por vigas em forma de L ligam os tubos de sustentação a um terço e dois terços da altura da torre. A figura e a tabela a seguir mostram as dimensões da torre.



D_{res}	Diâmetro do reservatório, m	20	H_{viga}	Altura da viga, m	0,45
H_{res}	Altura do reservatório, m	10	W_{viga}	Largura da viga, m	0,25
H_{res}	Altura do reservatório, m	10	W_{viga}	Largura da viga, m	0,25
H_{torre} D_{tubo}	Altura da torre, m Diâmetro do tubo de sustentação, m	60 1	T_{viga} L_{viga}	Espessura da viga, m Comprimento da viga, m	0,05 5
D_{cano}	Diâmetro do cano de água, m	3	C_{tinta}	Cobertura da tinta, m^2/L	4

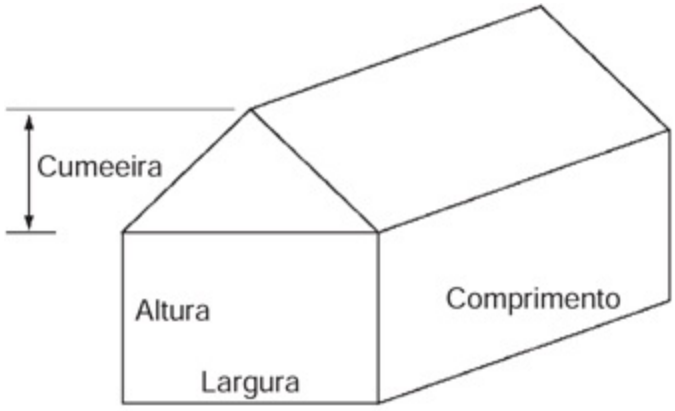
A seguir é apresentado um esboço do *script* de MATLAB.

```
% pintura_da_caixa.m
%   Cálculo   da   quantidade   de   tinta
necessária
% para pintar uma caixa d'água.
%
% Seu nome e data

% definir dimensões e outros dados
C_tinta = 4; % cobertura de tinta, m^2/L
D_res = 20; % diâmetro do reservatório, m
% e assim por diante…

% área da superfície da torre, m^2
A_brac = % complete o que falta
A_tubo =
A_cano =
A_torre = 2*A_brac + 8*A_tubo + A_cano;
```

```
% área da superfície do reservatório, m^2
A_res =

% área total da caixa d'água, m^2
A_total = A_res + A_torre;

% quantidade total de tinta, litros
tinta =

disp(sprintf('O total é %f litros de
tinta', tinta));
```

15. Área da Superfície de uma Casa

Escreva um *script* do MATLAB para calcular a área da superfície da casa que aparece na figura. O *script* deve pedir ao usuário que entre com as dimensões e, em seguida, mostre o resultado.



Teste o *script* com os seguintes valores:

Comprimento (m)	Largura (m)	Altura (m)	Cumeeira (m)
20	10	3	2
25	15	6	2
15	12	9	3

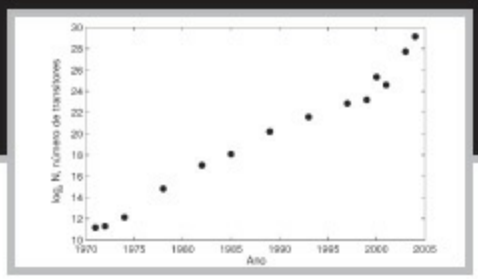
[1]No MATLAB, as vírgulas decimais devem ser substituídas por pontos. (N. T.)

[2]Os nomes dos arquivos e variáveis no MATLAB devem ser escritos sem acentos e sem cedilha. Alguns caracteres especiais, como %, também não devem ser usados. (N. T.)

[3]O nome default do arquivo é matlab.net. (N. T.)

CAPÍTULO

10



Operações Vetoriais no MATLAB

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- explicar o que é um vetor do MATLAB; usar o MATLAB para definir variáveis vetoriais e acessar os elementos escalares de um vetor;
- executar operações aritméticas no MATLAB usando vetores;
- criar gráficos bidimensionais usando vetores do MATLAB;
- executar operações estatísticas usando vetores do MATLAB, como calcular médias e gerar histogramas.

10.1 INTRODUÇÃO

Em todos os exemplos do MATLAB que apresentamos até agora, os dados a serem processados eram valores numéricos isolados, como o raio de uma circunferência, a massa de um cilindro ou a massa específica de um líquido. As variáveis isoladas, porém, apresentam limitações quanto ao tipo de ideias que permitem expressar. Além de representar objetos isolados, precisamos de uma forma de representar objetos *compostos* que possuem várias partes. Eis alguns exemplos de objetos compostos:

- uma *série* de valores de posição em função do tempo, que define a trajetória de uma aeronave;
- um *conjunto* de amostras de um produto químico processadas em diferentes bateladas;
- uma *sequência* de listas de um código de barras;
- uma *rede* de vigas e junções que forma a estrutura de uma ponte.

Nesta seção, vamos apresentar uma das ferramentas básicas do MATLAB, a *matriz*, usada para representar conjuntos de dados. As matrizes têm uma importância muito grande no MATLAB; na verdade, o nome MATLAB é uma contração de MATrix LABoratory, ou seja, Laboratório de Matrizes. Com efeito, uma matriz nada mais é que uma tabela de valores. Em geral, as matrizes têm duas dimensões: linhas e colunas. Por enquanto, vamos considerar apenas matrizes unidimensionais, ou seja, matrizes que possuem uma única fila de valores. A matriz desse tipo é chamada de *vetor*. Como vamos ver, esta estrutura simples de organização de dados é suficientemente flexível para acomodar uma grande variedade de modelos de engenharia. No momento, vamos considerar duas aplicações dos vetores:

- o uso de uma *série* de valores para representar uma característica de um sistema que varia de forma sistemática, seja com o tempo, seja ao longo de uma certa direção, seja de acordo com qualquer outra condição. Dois exemplos são as distâncias percorridas por um veículo em intervalos regulares de tempo e as deformações sofridas por uma mola ao ser submetida a forças cada vez maiores. A ordem dos valores em uma série é importante para a interpretação do seu significado.
- o uso de um *conjunto* de valores para representar a característica de um sistema para a qual a ordem não é importante. Um exemplo são os pesos de pedras colhidas aleatoriamente na

margem de um rio.

Vamos também apresentar algumas das ferramentas de plotagem de que o MATLAB dispõe para visualizar conjuntos de dados, além de algumas funções nativas do MATLAB cujos argumentos são vetores.

10.2 OPERAÇÕES BÁSICAS

10.2.1 Definição de Vetor e Acesso aos Elementos de um Vetor

Existem apenas algumas operações básicas que o usuário precisa conhecer para trabalhar com vetores no MATLAB: como defini-los, como se referir a eles como uma unidade e como acessar os seus elementos.

Definição de um Vetor Através de uma Lista de Valores Para entrar com um vetor no MATLAB através de uma lista de valores, digite os valores separados por espaços ou vírgulas e no interior de um par de colchetes. O exemplo a seguir mostra duas formas de entrar com um vetor:

```
>> [2 4 6 8 10]
ans =

    2 4 6 8 10
>> [2, 4, 6, 8, 10]
ans =

    2 4 6 8 10
```

Para atribuir um nome a um vetor, basta associá-lo a uma variável:

```
>> r = [2 4 6 8 10]
r =
```

```
     2  4  6  8  10
>> r
r =

     2  4  6  8  10
```

Quando um vetor está sendo definido, todos os elementos *devem* ser digitados na mesma linha de comando. Se você quiser digitar um comando em um *script* (ou na janela de comando) usando duas ou mais linhas, use um sinal de reticências (...) antes de digitar Enter no final das linhas intermediárias. O exemplo a seguir mostra a forma correta de partir de uma linha:

```
>> vetorcomprido = [1  2  3  4  5  6 … 7  8  9]

vetorcomprido =

     1  2  3  4  5  6  7  8  9
```

Se você não usar o sinal de reticências, o MATLAB não aceitará o comando e mostrará uma mensagem de erro:

```
>> vetorcomprido = [1  2  3  4  5  6  7  8  9]

??? Error using ==> vertcat

All rows in the bracketed expression must have the same number
of columns
```

Definição de um Vetor Através de uma Lista de Valores O operador dois pontos (:) do MATLAB cria automaticamente vetores com valores regularmente espaçados dentro de um certo intervalo. A sintaxe do operador dois pontos é a seguinte:

valor inicial: *incremento*: *valor final*

Assim, por exemplo, o comando a seguir define um vetor `x` no intervalo de 0 a 10 com um incremento de 2:

```
>> x = 0: 2: 10
x =

    2  4  6  8  10
```

Se o operador dois pontos for usado com apenas dois argumentos, estes serão usados como *valor inicial* e *valor final* e o incremento será 1:

```
>> y = 1:5
y =

    1  2  3  4  5
```

Como Acessar os Elementos de um Vetor Os elementos de um vetor do MATLAB são numerados sequencialmente a partir de 1. O número de ordem do elemento, ou *índice*, é colocado entre parênteses após o nome do vetor, como o exemplo a seguir.

```
>> r(1)
ans =

    2
>> r(3)
ans =

    6
>> r(1) + r(3)
ans =

    8
```

Também é possível usar índices para mudar os valores dos elementos ou acrescentar elementos.

```
>> r(1) = 33
r =
```

```
     33  4  6  8  10
>> r(10) = 20
r =

     33  4  6  8  10  0  0  0  0  20
```

Observe que quando um décimo elemento foi acrescentado a um vetor com apenas 5 elementos, os elementos de 6 a 9 receberam automaticamente o valor 0.

O índice de um vetor pode ser uma variável. Por exemplo:

```
>> i = 2;
>> r(i)
ans =

     4
```

Muitos programadores inexperientes consideram confusa esta notação. No último exemplo, `i` não é o *valor* de um elemento do vetor e sim o *índice* de um elemento do vetor. Como o valor de `i` é 2, a expressão `r(i)` é equivalente a `r(2)`, que é igual a 4.

Finalmente, para determinar o tamanho de um vetor, use o comando `length`:

```
>> length(r)
ans =

     10
```

10.2.2 Operações Aritméticas com Vetores, Elemento por Elemento

O MATLAB permite executar várias operações aritméticas com vetores e matrizes. Além das operações formais da álgebra linear, como adição e multiplicação de matrizes, também é possível realizar operações elemento por elemento. No momento, vamos discutir

apenas as operações elemento por elemento; as operações de álgebra linear serão discutidas no Capítulo 11.

Os operadores elemento por elemento executam operações aritméticas entre os elementos correspondentes de dois vetores de mesmo tamanho. A Tabela 10.1 mostra os operadores elemento por elemento disponíveis no MATLAB. Note que os símbolos de multiplicação, divisão e exponenciação dos operadores elemento por elemento começam com um ponto para mostrar que não se trata de operações como a multiplicação, divisão e exponenciação de vetores e matrizes, que são operações totalmente diferentes na álgebra linear. Dado que operações como a adição de vetores e matrizes e a multiplicação de vetores e matrizes por uma constante *são* realizadas elemento por elemento, nesses casos não há necessidade de usar o ponto. Seguem alguns exemplos de operações com vetores elemento por elemento.

TABELA 10.1 Operadores vetoriais elemento por elemento

Operação	Forma escalar	Forma vetorial/matricial
Adição	+	+
Subtração	−	−
Multiplicação	*	.*
Divisão	/	./
Exponenciação	^	.^

```
>> a = [0 1 2];
>> b = [3 4 5];
>> a + b
ans =

     3 5 7

>> 3 * a + 5
ans =
```

```
     5  8  11
>> a .* b
ans =

     0  4  10
>> a .^ b
ans =

     0  1  32
```

Quando os vetores são usados como argumentos de funções trigonométricas ou outras funções transcendentais, a operação indicada é executada elemento por elemento, como mostram os exemplos a seguir.

```
>> a = [0 pi/4 pi/2 3*pi/4 pi];
>> sin(a)
ans =

     0  0.7071  1.0000  0.7071  0.0000
>> b = [1 10 100 1000];
>> log10(b)
ans =

     0  1  2  3
```

10.2.3 Exemplo: Confirmação da Lei de Boyle

Na Seção 5.2.1, vimos que Robert Boyle usou dados experimentais para confirmar sua teoria de que a pressão de um gás é inversamente proporcional ao volume se a temperatura for mantida constante. Neste exemplo, vamos usar vetores do MATLAB para simplificar os cálculos que Boyle executou à mão em seu artigo de 1660. Lembre-se de que, para testar sua teoria, Boyle despejou mercúrio em um tubo em forma de U, cheio de ar, e mediu o volume de ar para diferentes alturas do mercúrio no tubo. A Tabela 10.2, que é uma reprodução da

Tabela 5.1, mostra os resultados do experimento de Boyle.

TABELA 10.2 Dados do experimento de Boyle (veja a Seção 5.2.1)

A	B	C	D	E
V (polegadas de tubo)	P_{Hg} (polegadas de Hg)	P_{atm} (polegadas de Hg)	P experimental $P_{Hg} + P_{atm}$ (polegadas de Hg)	P teórica (polegadas de Hg)
12	0	$29\frac{1}{8}$	$29\frac{2}{16}$	$29\frac{2}{16}$
10	$6\frac{3}{16}$	$29\frac{1}{8}$	$35\frac{5}{16}$	35
8	$15\frac{1}{16}$	$29\frac{1}{8}$	$44\frac{3}{16}$	$43\frac{11}{16}$
6	$29\frac{11}{16}$	$29\frac{1}{8}$	$58\frac{3}{16}$	$58\frac{2}{8}$
5	$41\frac{9}{16}$	$29\frac{1}{8}$	$70\frac{11}{16}$	70
4	$58\frac{2}{16}$	$29\frac{1}{8}$	$87\frac{14}{16}$	$87\frac{3}{8}$
3	$88\frac{7}{16}$	$29\frac{1}{8}$	$117\frac{9}{16}$	$116\frac{4}{8}$

A Coluna A da tabela mostra o volume de ar, medido em polegadas de comprimento da coluna de ar no tubo. Estes dados podem ser expressos como um vetor do MATLAB:

```
% volume de ar, polegadas de tubo
V = [12 10 8 6 5 4 3];
```

A coluna B mostra a pressão exercida pelo mercúrio, também em polegadas, que podemos expressar como outro vetor do MATLAB:

```
% pressão do Hg, polegadas
P_Hg = [0 6+3/16 15+1/16 29+11/16 41+9/
16 58+2/16 88+7/16];
```

A pressão total (experimental) a que o ar está sujeito é igual à pressão do mercúrio mais a pressão atmosférica. A coluna D mostra a pressão total como a soma das colunas B e C, o que podemos escrever no MATLAB da seguinte forma:

```
% pressão atmosférica, polegadas de Hg
P_atm = 29+1/8;

% pressão experimental, polegadas de Hg
```

```
P_exp = P_Hg P_atm
```

Se V_i e P_i são os valores das colunas A e D da tabela na linha de ordem *i*, temos, de acordo com a teoria de que o produto *PV*é constante,

$$P_1 V_1 = P_i V_i$$

Explicitando P_i, obtemos a pressão teórica esperada para um dado volume de ar, que Boyle anotou na coluna E.

$$P_i = \frac{P_1 V_1}{V_i}$$

No MATLAB, podemos escrever este valor como o produto dos primeiros elementos dos vetores `P_exp` e `V`, dividido elemento por elemento pelos elementos de `V`.

```
% pressão teórica, polegadas de Hg
P_teo = P_exp(1)*V(1)./V
```

Salvando os comandos do MATLAB anteriores em um *script* e rodando o *script*, obtemos os seguintes resultados:

```
P_exp = 29.1250 35.3125 44.1875 58.8125 70.6875
87.2500 117.5625
P_teo = 29.1250 34.9500 43.6875 58.2500
69.9000 87.3750 116.5000
```

Observe que os valores de `P_teo` são os mesmos que Boyle anotou na Coluna E da tabela, e estão muito próximos dos valores experimentais, `P_exp`. Como passo final desta análise, podemos usar o MATLAB para calcular as diferenças percentuais entre os valores experimentais e teóricos:

```
>> erro_perc = 100*(P_exp - P_teo)./P_teo
```

```
erro_perc =

    0 1.0372 1.1445 0.9657 1.1266_0,
1431_0, 9120
```

Assim, o erro percentual é da ordem de 1%.

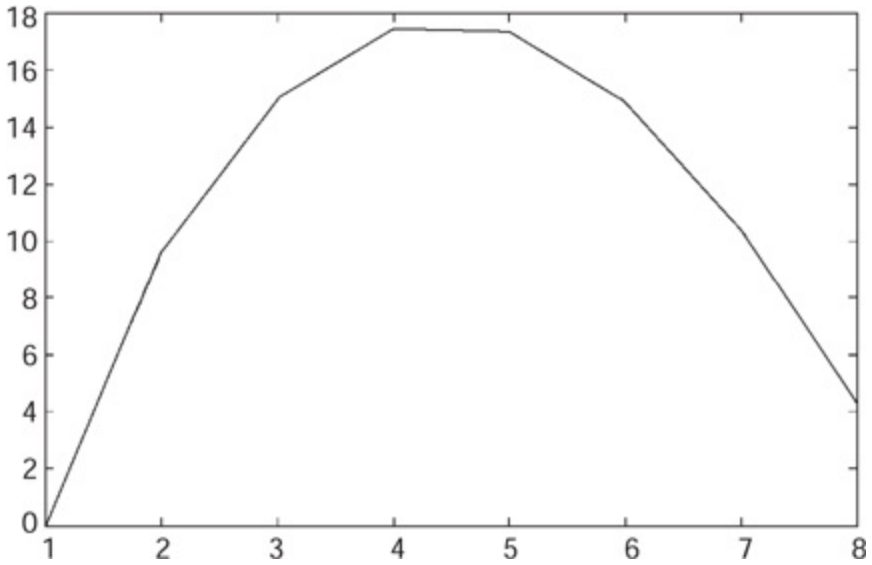
10.3 GRÁFICOS BIDIMENSIONAIS

O comando básico para fazer gráficos bidimensionais no MATLAB é `plot`. Vamos descrever, a seguir, alguns dos tipos mais comuns de gráficos bidimensionais.

10.3.1 Gráfico Simples

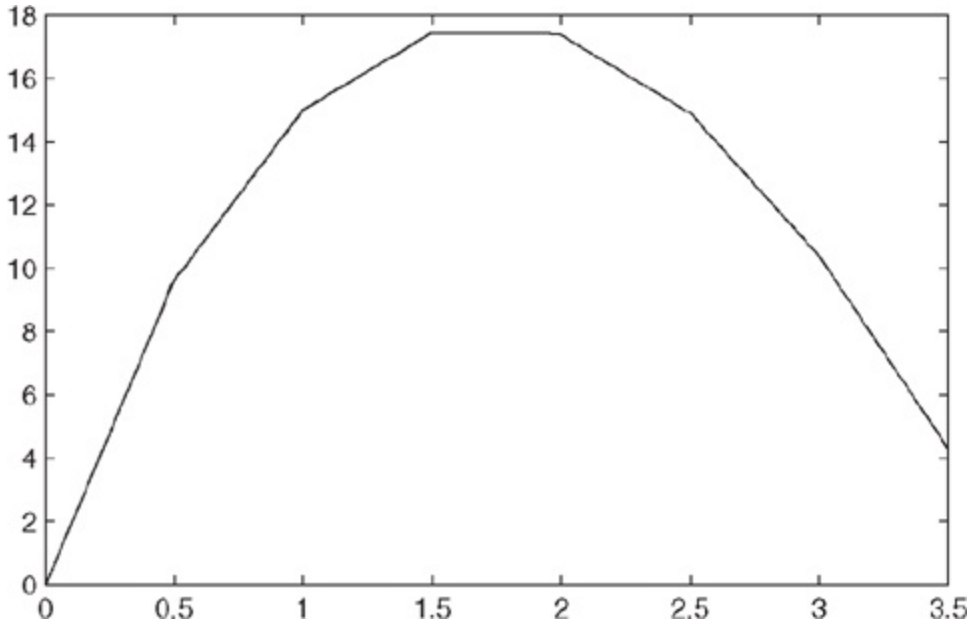
O comando `plot(Y)`, onde `Y` é um vetor, plota os elementos de `Y` em função do índice. Considere, por exemplo, o gráfico de um vetor que contém as alturas atingidas por uma bola lançada verticalmente para cima com uma velocidade de 25 m/s, medida a intervalos regulares de tempo.

```
alturas25 = [0 9.61 15.01 17.45 17.36 14.90 10.38 4.29];

plot(alturas25)
```



O comando `plot(X,Y)`, onde `X` e `Y` são vetores do mesmo tamanho, plota os elementos de `Y` em função dos elementos correspondentes de `X`. Supondo, por exemplo, que as medidas da altura da bola tenham sido tomadas a intervalos de 0,5 s, podemos obter um gráfico da altura em função do tempo usando os seguintes comandos:

```
alturas25 = [0 9.61 15.01 17.45 17.36 14.90 10.38 4.29];

t = 0:.5:3.5;

plot(t,alturas25)
```

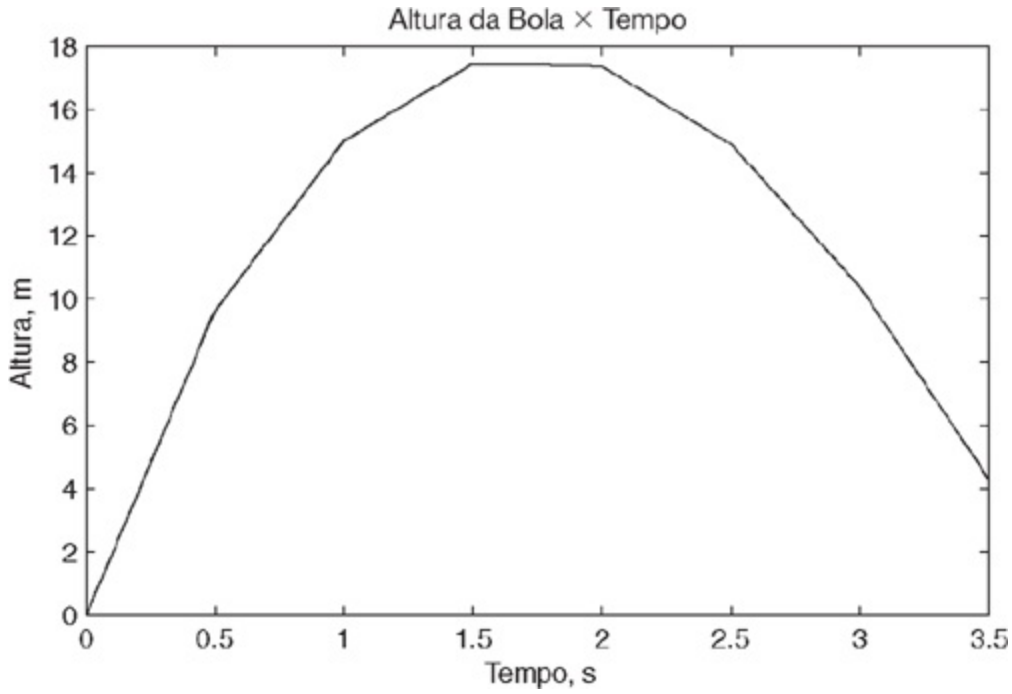


10.3.2 Títulos e Rótulos

Para acrescentar um título a um gráfico, selecione `Insert > Title` no menu da janela do gráfico. Para rotular os eixos ou mudar suas propriedades, selecione `Edit > Axes Properties` no mesmo menu.

Também é possível acrescentar um título a um gráfico e rotular os eixos usando os comandos `title`, `xlabel` e `ylabel`, como no exemplo a seguir.

```
alturas25 = [0 9.61 15.01 17.45 17.36 14.90 10.38 4.29];
t = 0:.5:3.5;
plot(t,alturas25);
xlabel(' tempo, s ');
ylabel(' altura, m ');
title(' Altura da Bola × Tempo ');
```



Depois de entrar com os títulos e rótulos, você pode editá-los diretamente na figura. Primeiro, selecione `Tools > Edit Plot` no menu da janela de gráficos e verifique se a edição do gráfico está habilitada; se estiver, haverá uma marca de seleção à esquerda da opção `Edit Plot`. Se a edição não estiver habilitada, habilite-a clicando com o mouse na opção `Edit Plot`. Em seguida, dê um duplo clique no texto da figura que deseja mudar.

10.3.3 Estilos de Linha

Para mudar as propriedades de uma curva de um gráfico, como o estilo, a cor, a espessura e o símbolo, certifique-se, em primeiro lugar, no menu `Tools`, de que a edição do gráfico está habilitada; se não estiver, habilite-a, como na Seção 10.3.2, e dê um duplo clique na curva. Com isso, será aberta a janela `Property Editor` (Editor de Propriedades), na qual poderão ser feitas as mudanças desejadas. Também é possível definir um estilo de linha com um parâmetro do comando `plot`, usando o comando na forma `plot(X,Y,EspecLinha)`, onde `EspecLinha` é uma sequência de caracteres que especifica o

estilo, a cor e o símbolo a serem usados. Os caracteres usados em `EspecLinha` aparecem na Tabela 10.3. A sequência ' `-r` ', por exemplo, especifica uma linha cheia, vermelha, sem símbolos, enquanto '`:kp`' especifica uma linha pontilhada, preta, com os pontos marcados com estrelas, como no comando a seguir, cujo efeito é mostrado na figura.

```
plot(t,alturas25,' :kp ')
```

TABELA 10.3 Especificações de estilo de linha

Estilo de Linha

Esp.	Descrição	Esp.	Descrição	Esp.	Descrição
–	Linha cheia (default)	- -	Linha tracejada	:	Linha pontilhada
-.	Linha traço-ponto				

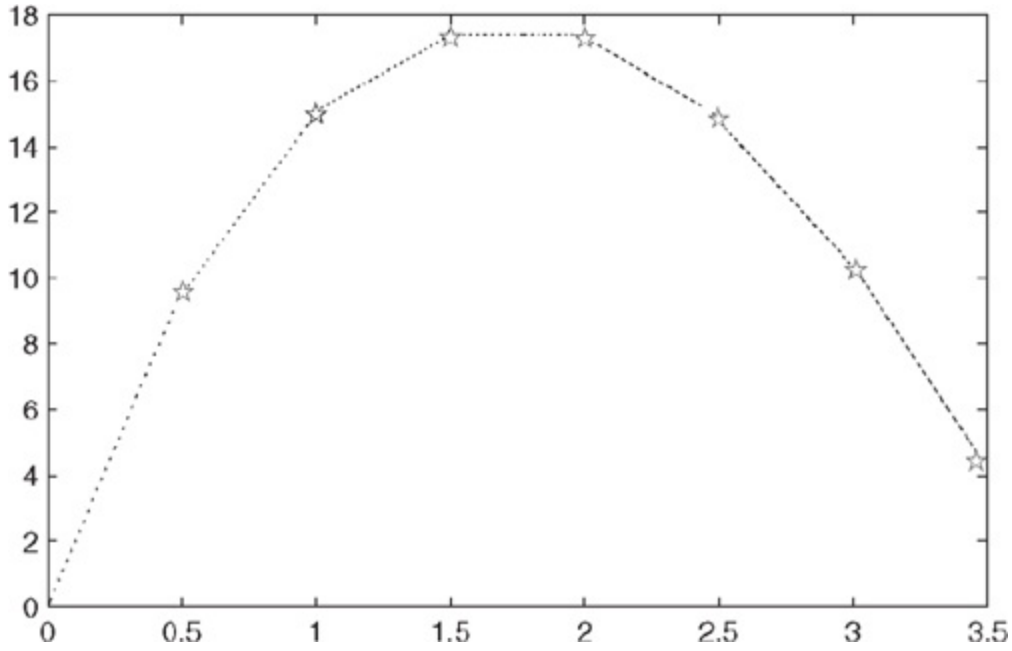
Cor

Esp.	Descrição	Esp.	Descrição	Esp.	Descrição
r	Vermelho	g	Verde	b	Azul
c	Ciano	m	Magenta	y	Amarelo
k	Preto	w	Branco		

Cor

Esp.	Descrição	Esp.	Descrição	Esp.	Descrição
+	Sinal +	o	Círculo	*	Asterisco
.	Ponto	x	Símbolo x	s	Quadrado
d	Losango	^	Triângulo para cima	v	Triângulo para baixo
>	Triângulo para a	<	Triângulo para a	p	Estrela de cinco

	direita	esquerda	pontas
h	Estrela de seis pontas		



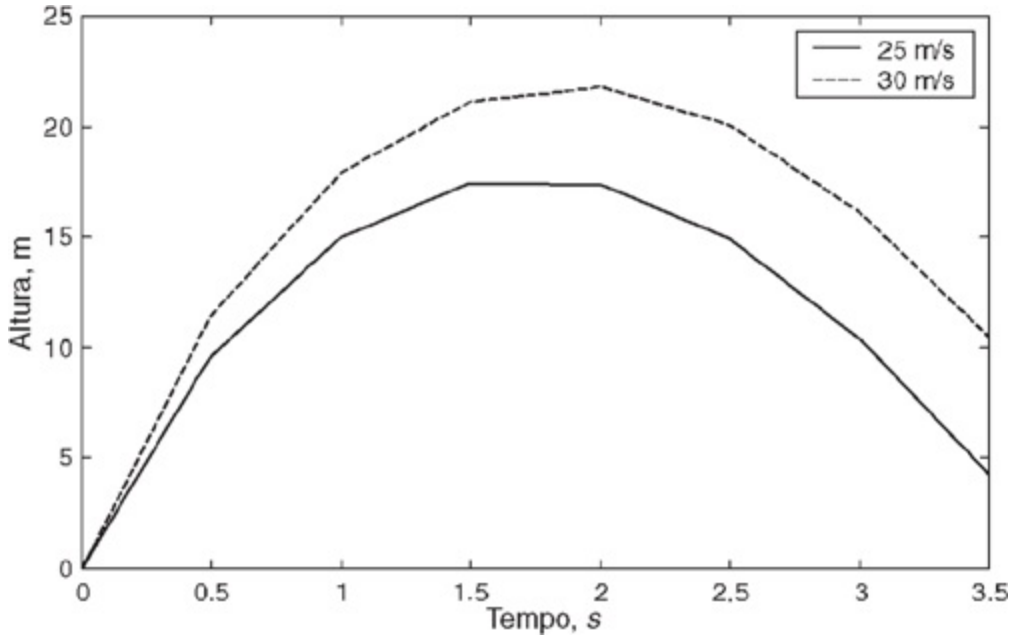
10.3.4 Mais de Uma Curva no Mesmo Gráfico

Um recurso muito útil é plotar mais de uma curva no mesmo gráfico, como, por exemplo, para comparar as trajetórias de bolas lançadas verticalmente para cima com velocidades iniciais de 25 m/s e 30 m/s. Normalmente, quando um novo comando `plot` é executado, o gráfico que estava na janela de gráficos é substituído por um gráfico novo. Para acrescentar uma nova curva a um gráfico já existente, é preciso usar o comando `hold`. O comando `hold on` conserva os eixos existentes, de modo que as curvas geradas pelos comandos `plot` seguintes são plotadas no mesmo sistema de eixos. O comando `hold off` faz com que os eixos não sejam mais mantidos.

O *script* a seguir define e plota as curvas `alturas25` e `alturas30` em função de `t` no mesmo sistema de eixos. Além disso, especifica que a curva `alturas25` deve ser plotada com uma curva cheia, e a curva

`alturas30` com uma curva tracejada, e rotula as escalas e as curvas.

```
alturas25 = [0 9.6 15.0 17.4 17.4 14.9 10.4 4.3];
alturas30 [0 11.4 17.9 21.2 21.8 20.0
16.1 10.4];
plot(t,alturas25,' - ');
hold on;
plot(t,alturas30,' -- ');
legend(' 25 m/s ' ,' 30 m/s ');
xlabel(' tempo, s ')
ylabel(' altura, m ');
hold off;
```



O terceiro parâmetro do comando `plot` foi usado para especificar o estilo de linha: ' - ' indica uma linha cheia e ' -- ' uma linha tracejada. O comando `legend` produz uma legenda para o gráfico que mostra a correspondência entre o estilo de linha usado para traçar uma curva e o texto fornecido, na ordem em que as curvas foram criadas.

10.3.5 Mais de Um Gráfico na Mesma Figura

A função `subplot` divide uma figura em regiões de plotagem ou painéis, organizados em linhas e colunas. A função tem três argumentos:

`subplot` (*filas, colunas, painel*)

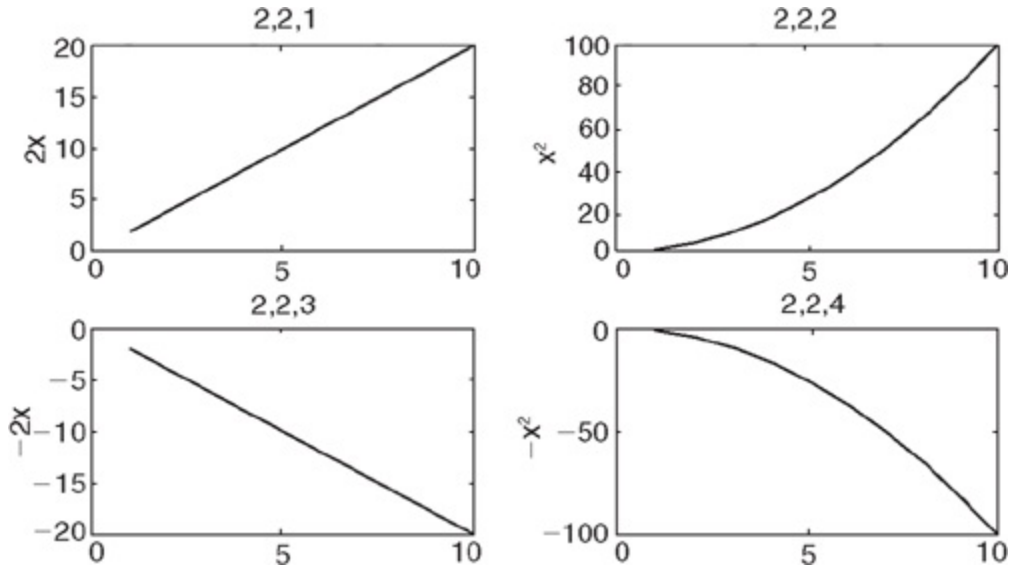


Figura 10.1 Uso da função `subplot` para plotar vários gráficos na mesma figura.

onde *filas* é o número de filas da figura, *colunas* é o número de colunas, e *painel* é o número do painel, contando da esquerda para a direita e de cima para baixo. O *script* a seguir ilustra o uso da função `subplot`, com o resultado mostrado na Figura 10.1.

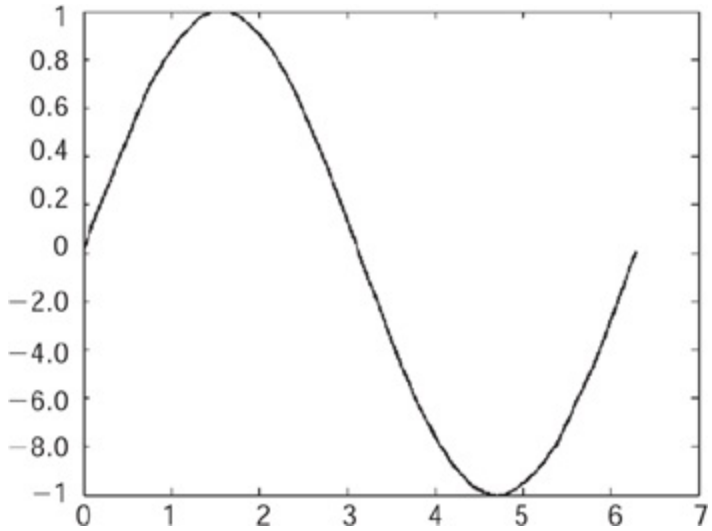
```
x = 1:10;
subplot(2,2,1)
plot(x,2*x)
title(' 2,2,1 ')
ylabel(' 2x ')
subplot(2,2,2)
plot(x,x.^2)
```

```
title(' 2,2,2 ')
ylabel(' x^2 ')

subplot(2,2,3)
plot(x,-2*x)
title(' 2,2,3 ')
ylabel(' -2x ')

subplot(2,2,4)
plot(x,-x.^2)
title(' 2,2,4')
ylabel(' -x^2 ')
```

10.3.6 Plotagem de Funções

Uma forma de plotar uma função em um intervalo é definir uma série e usá-la como argumento de uma função. O comando a seguir gera um gráfico da função $f(\theta) = \text{sen}(\theta)$ no intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ com 100 pontos.

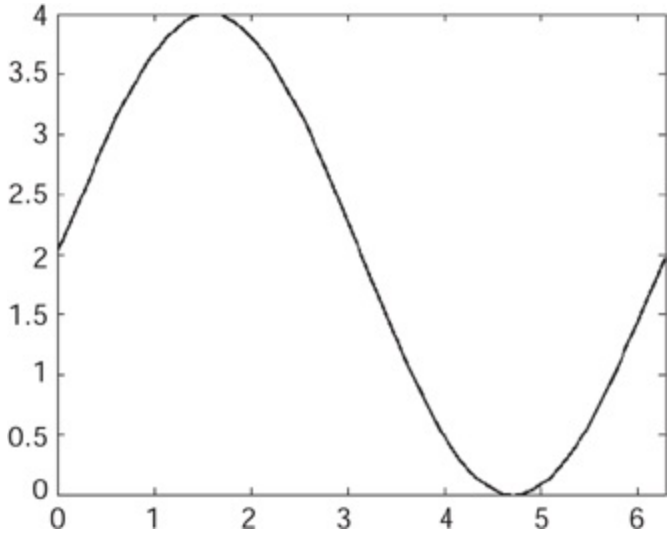
```
teta = 0:0.01*pi:2*pi;
plot(teta,sin(teta))
```



Outra forma de obter o mesmo gráfico é usar o comando `fplot`(‘*função*’, *intervalo*), onde *função* é uma expressão do MATLAB

com uma variável, e *intervalo* é um vetor de dois elementos que especifica os limites inferior e superior do intervalo, como no exemplo a seguir.

```
fplot(' 2*sin(teta)+2 ',[0 2*pi]);
```



10.3.7 Gráficos Especiais

O MATLAB oferece um grande número de gráficos especiais, cuja lista completa pode ser obtida selecionando, sucessivamente, a partir do menu principal do MATLAB, `Help > MATLAB Help > By Category > Graphics > Specialized Plotting`. Além da descrição de cada tipo de gráfico, são apresentados exemplos que você pode copiar, colar em seus *scripts* e modificar à vontade. Entre esses gráficos especiais estão os seguintes:

- gráficos de área
- gráficos de barras
- gráficos de pizza
- gráficos de contorno

10.3.8 Exemplo: Plotagem dos Resultados do

Experimento de Boyle

Neste exemplo, vamos usar comandos de plotagem do MATLAB para comparar graficamente os valores experimentais e teóricos da pressão em função do volume de ar no experimento de Boyle. O experimento de Boyle está descrito na Seção 5.2.1, e uma implementação dos seus cálculos no MATLAB, sem usar gráficos, aparece na Seção 10.2.3.

Plotagem dos Dados Originais De acordo com a análise da Seção 5.2.1, a relação teórica entre a pressão *P* e o volume *V* é dada por

$$P = \frac{349}{V}$$

No *script* do MATLAB a seguir, `V` é o volume de ar que aparece na Coluna A da Tabela 10.2, e `P_exp` é a pressão que aparece na Coluna D. Neste *script*, simplesmente entramos com os valores de `P_exp`, embora pudéssemos ter calculado esses valores no MATLAB a partir de `P_Hg` e `P_atm`, como fizemos na Seção 10.2.3. A Figura 10.2 mostra o gráfico resultante.

```
   V = [12 10 8 6 5 4 3]; % volume, polegadas
de tubo
   P_exp = [29.1 35.3 44.2 58.8 … 70.7 87.3 117.6]; % pressão,
polegadas de Hg
   plot(V,P_exp,'o');
   hold on
   fplot(' 349/V',[3 12]);
   xlabel(' V, polegadas de tubo');
   ylabel(' P, polegadas de Hg');
   legend(' experimento','teoria');
   hold off
```

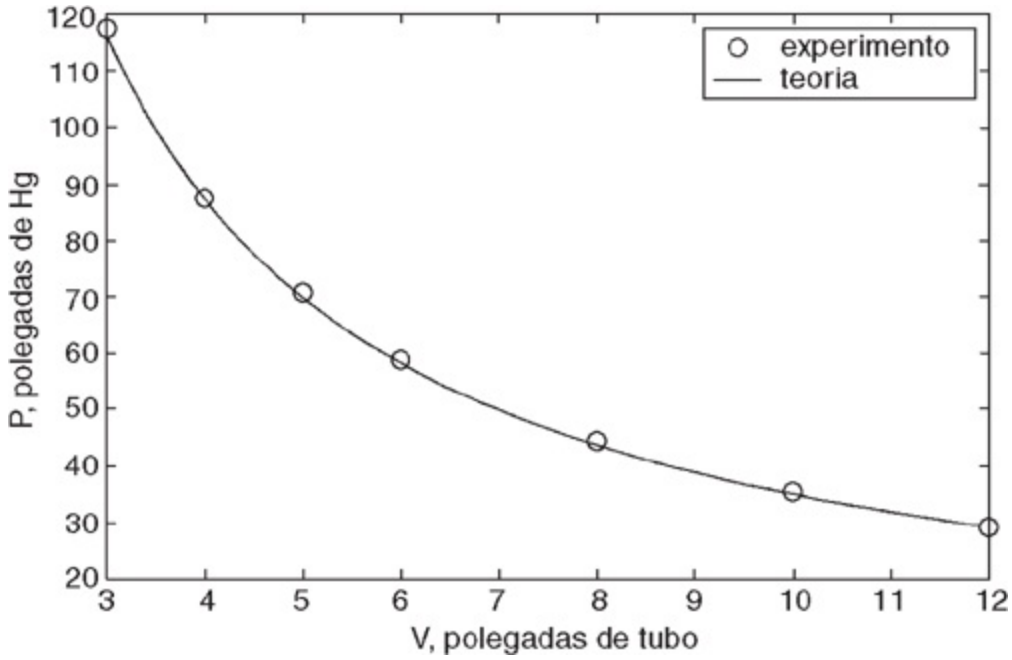


Figura 10.2 Resultados do experimento de Boyle.

No *script* que gerou o gráfico da Figura 10.2, o comando `plot` foi usado para plotar os resultados experimentais como círculos, e o comando `fplot` para plotar os valores teóricos como uma curva contínua. A curva teórica também poderia ser plotada calculando os valores teóricos da pressão para os valores experimentais de `V` e plotando esses resultados em função de `V` usando os seguintes comandos:

```
P_teo = 349./V;
plot(V,P_teo);
```

Nesse caso, porém, como a curva teórica seria traçada ligando apenas 7 pontos, não ficaria tão suave como a obtida com `fplot`.

Transformação dos Dados em uma Linha Reta Como vimos na Seção 5.2.1, um dos métodos para testar a concordância dos dados experimentais com uma teoria é transformar os dados de tal forma que produzam uma linha reta se a teoria estiver correta. De acordo com a Lei de Boyle,

$$P(V) = \frac{k}{V},$$

que, como mostra a Figura 10.2, não corresponde a uma linha reta se plotarmos P em função de V. Entretanto, se plotarmos $1/P$ em função de V, teremos

$$f(V) = \frac{1}{P(V)} = \frac{1}{k}V$$

que é a equação de uma linha reta cuja inclinação é $1/k$. O *script* a seguir, onde `V` e `P_exp` são os vetores definidos no exemplo anterior, gera este gráfico, que aparece na Figura 10.3.

```
% gráfico usando círculos pretos
plot(V,1./P_exp,' ok ',' MarkerFaceColor ',' k ');
xlabel(' V, polegadas de tubo ');
ylabel(' 1/P, 1/polegadas de Hg ');
```

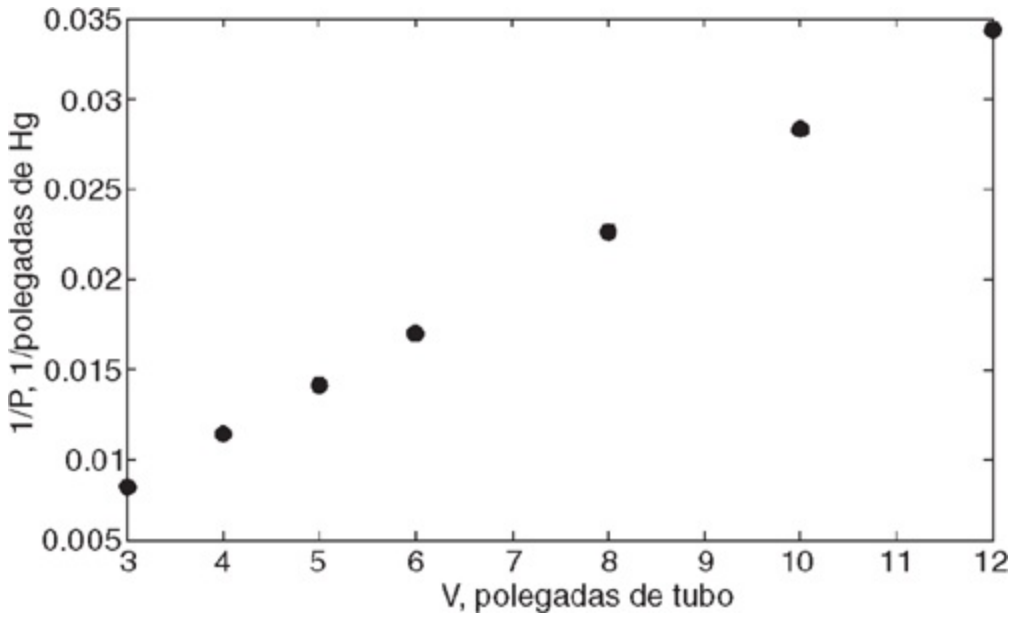


Figura 10.3 Transformação dos dados do experimento de Boyle para que sejam plotados como uma linha reta.

Desta vez, plotamos os dados usando círculos pretos, escolhidos mediante o uso dos seguintes argumentos no comando `plot`:

- `'ok'`: círculos (o) cuja circunferência é preta (k)
- `'MarkerFaceColor',' k '`: o interior dos círculos também é preto

Como podemos ver, os dados realmente estão sobre uma linha reta. Para determinar o valor de *k*, podemos traçar manualmente uma reta passando pelos pontos experimentais e medir a inclinação da reta.

10.3.9 Exemplo: Lei de Moore e Gráficos Logarítmicos

Na Seção 5.2.2, discutimos a Lei de Moore como exemplo de uma teoria na qual a variável dependente varia exponencialmente com a variável independente. Recapitulando, em 1965 Gordon Moore previu que o número de transistores nos circuitos integrados de última geração dobraria aproximadamente a cada dois anos. Expressamos essa teoria através da equação

$$N(t) = N_0 2^{t/k}, \qquad (10.1)$$

onde N é o número de transistores, N_0 é o número inicial de transistores, té o tempo em anos e k é o intervalo de tempo necessário para que o número de transistores dobre de valor. Se a teoria estiver correta, um gráfico de N em função de t não será uma linha reta, mas se tomarmos os logaritmos de ambos os membros, a função transformada será da forma

$$\begin{aligned} \log_2 N(t) &= \log_2(N_0 2^{t/k}) \\ &= \log_2 N_0 + \log_2(2^{t/k}) \\ &= \log_2 N_0 + \tfrac{1}{k}t \end{aligned}$$

que é a equação de uma reta de inclinação $1/k$ que intercepta o eixo y no ponto cuja ordenada é $\log_2 N_0$. A Tabela 10.4 mostra o número real de transistores nos microprocessadores produzidos pela Intel entre 1971 e 2004.

TABELA 10.4 Número de transistores em microprocessadores Intel

Ano	Nome do Produto	N° de Transistores	Log_2 n° de transistores
1971	4004	2.300	11,2
1972		2.500	11,3
1974		4.500	12,1
1978	8086	29.000	14,8
1982		134.000	17,0
1985		275.000	18,1
1989		1.200.000	20,2
1993	Pentium	3.100.000	21,6
1997		7.500.000	22,8
1999		9.500.000	23,2
2000		42.000.000	25,3
2001	Itanium	25.000.000	24,6
2003		220.000.000	27,7
2004		592.000.000	29,1

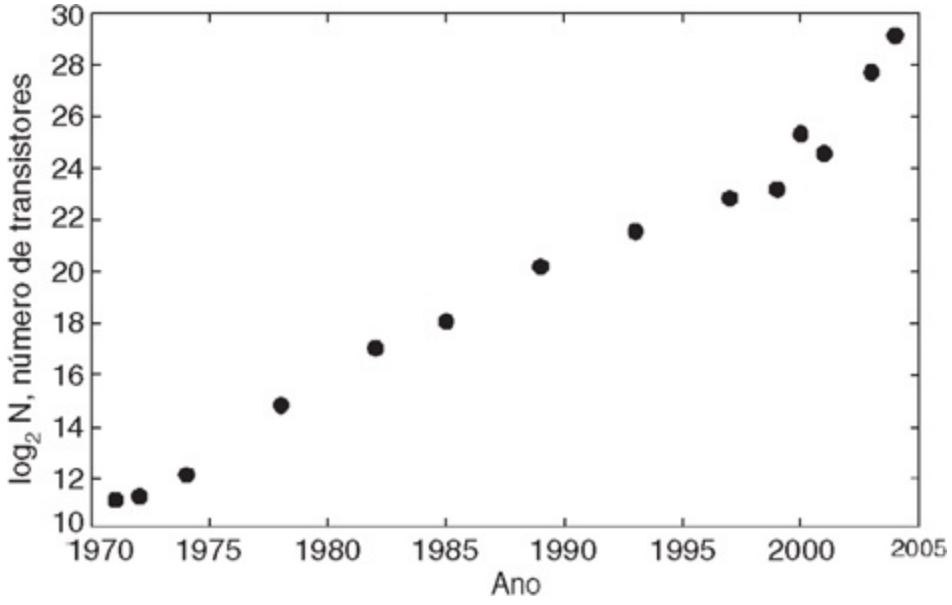


Figura 10.4 Gráfico do logaritmo do número de transistores nos microprocessadores da Intel em função do ano de fabricação.

Plotagem do Logaritmo dos Dados Usando Escalas Lineares Um dos meios de transformar o gráfico de dados que estão variando exponencialmente em uma linha reta é calcular o logaritmo dos dados e plotar o resultado em um gráfico com escalas lineares. É o que faz o *script* a seguir. O gráfico gerado aparece na Figura 10.4. Observe que o eixo *y* foi rotulado como "$\log_2$N, número de transistores" em vez de apenas "número de transistores".

```
ano = [1971 1972 1974 1978 1982 …
   1985 1989 1993 1997 1999 …
   2000 2001 2003 2004];

transistores = [2300 2500 4500 29000 134000 …
275000 1200000 3100000 7500000 9500000 …
42000000 25000000 220000000 592000000];

% plote usando círculos pretos
plot(ano,log2(transistores),'ok ',' MarkerFacColo r ','k ')
xlabel('ano ')
ylabel(' log_2 N, número de transistores ')
```

Plotagem dos Dados Usando uma Escala Logarítmica O outro meio de transformar o gráfico de dados que estão variando exponencialmente em uma linha reta é usar um *gráfico semilog*, no qual são usadas uma escala linear para o eixo *x* e uma escala logarítmica para o eixo *y*. É o que faz o *script* a seguir. O gráfico gerado aparece na Figura 10.5. Observe que, neste caso, o eixo *y* foi rotulado simplesmente como "número de transistores".

```
semilogy(ano,transistores,' ok ', 'MarkerFaceColo r ,' k ')
xlabel(' ano ')
ylabel(' número de transistores ')
```

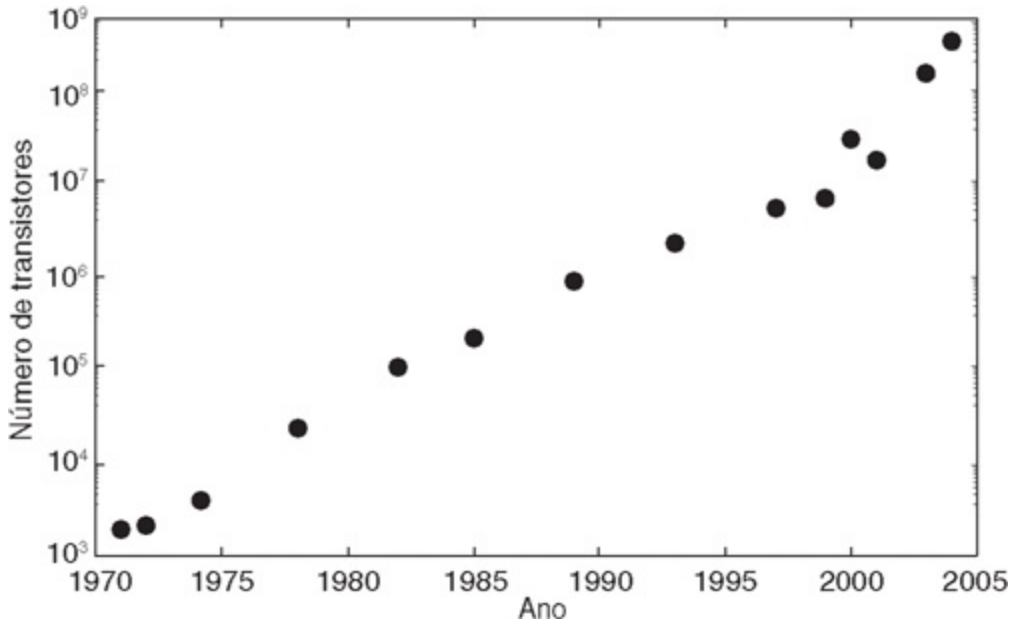


Figura 10.5 Gráfico semilog do número de transistores nos microprocessadores da Intel em função do ano de fabricação.

10.4 ESTATÍSTICA

Na linguagem da matemática, *parâmetro estatístico* é qualquer grandeza que pode ser calculada a partir de um conjunto de valores. Eis alguns exemplos:

- valor máximo ou mínimo
- soma dos valores
- média aritmética dos valores
- número de valores
- número de valores dentro de um certo intervalo

O MATLAB dispõe de um conjunto de funções para calcular parâmetros estatísticos; nesta seção, vamos apresentar alguns dos mais comuns. Como exemplo de conjunto de valores, vamos usar os resultados do experimento com uma atiradeira, descrito na Seção 5.4, no qual executamos 20 lançamentos, com a mola sofrendo uma deformação de 1 m. Esses resultados foram mostrados na Tabela 5.5.

Vamos entrar com os valores em um vetor do MATLAB chamado `distancia`.

```
distancia = [17.5 19.0 16.4 19.3 16.6 …
   16.0 17.4 16.7 18.1 17.5 …
   15.1 14.2 17.4 15.7 17.8 …
   19.3 18.5 15.7 17.9 17.0];
```

A Figura 5.6 mostra um gráfico de pontos dos dados, gerado pelo seguinte *script*:

```
plot(distancia,' * ')
xlabel(' teste ')
ylabel(' distância, m ')
set(gca,' YGrid ',' on ') % gca: comando para
''manter eixos''
```

10.4.1 Parâmetros Básicos: Mínimo, Máximo, Média, etc.

As funções estatísticas mais simples do MATLAB são usadas para calcular parâmetros básicos como o valor máximo, o valor mínimo e a média aritmética. O exemplo a seguir ilustra o uso de algumas dessas funções, tomando como dados as distâncias do exemplo anterior.

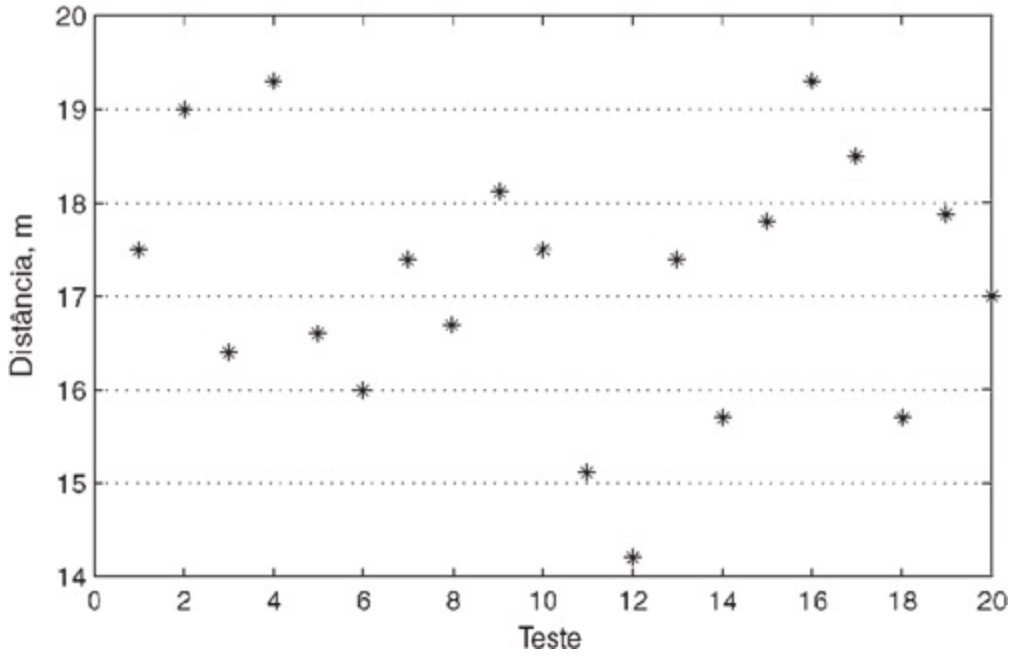


Figura 10.6 Gráfico de pontos das distâncias atingidas pela bola em vários lançamentos.

```
>> min(distancia) % mínimo de um vetor
   ans =
   14.2000
>> max(distancia) % máximo de um vetor
   ans =
   19.3000
>> mean(distancia) % média aritmética de um vetor
   ans =
   17.1550
>> length(distancia) % número de elementos de um vetor
   ans =
   20
>> sum(distancia) % soma dos elementos de um vetor
   ans =
   343.1000
```

Note que essas funções podem ser usadas em combinação para calcular outros parâmetros estatísticos. Assim, por exemplo, outra

forma de calcular a média aritmética é usar as funções `sum` e `length`:

```
>> sum(distancia)/length(distancia)
   ans =
   17.1550
```

Existem duas definições diferentes para o desvio-padrão de um conjunto de valores x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$:

desvio-padrão (definição 0) : $\sigma = \frac{1}{n-1}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

desvio-padrão (definição 1) : $\sigma = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

onde $\bar{X}$ é a média dos valores.

No Capítulo 5, usamos a segunda definição (definição 1). A função desvio-padrão do MATLAB, `std`, pode calcular o desvio-padrão de acordo com a definição 0 ou com a definição 1, dependendo do valor do segundo argumento da função (o primeiro argumento é o vetor dos valores) :

```
>> std(distancia,0) % n-1 no denominador
   ans =
   1.3816
>> std(distancia,1) % n no denominador
   ans =
   1.3467
>> std(distancia) % o default é n-1 no denominador
   ans =
   1.3816
```

Note que os valores nos dois casos não são muito diferentes e a diferença é menor para um número maior de valores. Observe também que, se o segundo argumento não está presente, o MATLAB usa n - 1 no denominador como opção default.

10.4.2 Contagem de Valores em um Intervalo

Como foi discutido na Seção 5.4.3, a probabilidade estimada de um evento, dado um conjunto de resultados, é definida como a *frequência relativa* desse evento, ou seja,

$$\text{probabilidade estimada} = \frac{\text{número de testes positivos}}{\text{número total de testes}}$$

Assim, por exemplo, para estimar a probabilidade de que uma bola lançada por nossa atiradeira caia mais de 1 m além de um alvo situado a 18 m de distância, contamos o número de testes nos quais a distância atingida foi maior que 19 m e dividimos esse número pelo número total de testes. Nesta seção, vamos apresentar algumas funções do MATLAB para calcular os valores situados dentro de um intervalo dado.

Um passo inicial que pode ser útil em muitos casos é colocar os valores em ordem numérica. Para isso, o MATLAB dispõe da função `sort`, que coloca os valores de um vetor em ordem crescente.

```
   >> sort(distancia)
   ans =
Columns 1 through 5
14.2000 15.1000 15.7000 15.7000 16.0000
Columns 6 through 10
16.4000 16.6000 16.7000 17.0000 17.4000
Columns 11 through 15
17.4000 17.5000 17.5000 17.8000 17.9000
Columns 16 through 20
18.1000 18.5000 19.0000 19.3000 19.3000
```

Quando os valores estão em ordem, é mais fácil determinar manualmente o número de valores dentro de um certo intervalo, mas vamos deixar o MATLAB fazer o trabalho por nós. Para isso, podemos usar os operadores do MATLAB que indicam relações como “igual a”,

“menor que”, “maior que”, etc. Segue a lista completa dos operadores relacionais do MATLAB:

==	igual a
~=	diferente de
<	menor que
>	maior que
<=	menor ou igual a
>=	maior ou igual a

As expressões relacionais do MATLAB, ou seja, expressões que contêm um operador relacional, podem ter apenas o valor 1 ou 0, onde “1” significa “verdadeiro” e “0” significa “falso”. Assim, por exemplo,

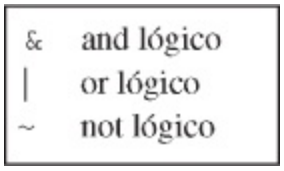
```
>> valor = 7
valor =
7
>> valor < 5
ans 5
0
>> valor > 5
ans =
1
```

Quando é aplicado a um vetor, um operador relacional produz um vetor de 1s e 0s que indica se a relação é verdadeira ou falsa em relação a cada elemento do vetor original. Assim, por exemplo,

```
>> valoress = [1 5 3 7]
valores =
1 5 3 7
>> valores < 5
ans =
0 0 0 1
```

Podemos escrever expressões mais complexas usando os operadores

lógicos da MATLAB, relacionados abaixo, para combinar dois ou mais operadores relacionais.



Assim, por exemplo, para expressar a faixa de valores do vetor `valores` entre 4 e 10 em MATLAB, podemos estabelecer a condição "valores maiores que 4 e valores menores que 10", que, em MATLAB, assume a forma

```
>> (valores > 4) & (valores < 10)
   ans =
   0 1 0 1
```

Observe que o operador "and" (&) produz um vetor com 1s no lugar dos elementos para os quais *as duas* condições são satisfeitas. Por outro lado, o operador "or" (|) produz um vetor com 1s no lugar em que *pelo menos uma* das condições é satisfeita. Assim, por exemplo,

```
>> (valores <= 3) | (valores > 5)
   ans =
   1 0 1 1
```

Dado um vetor com 1s e 0s, é possível determinar quantos elementos atendem aos critérios especificados simplesmente contando os 1s. O modo mais fácil de fazer isso no MATLAB é usar a função `sum`. Assim, por exemplo, para determinar o número de elementos do vetor `valores` com valores entre 4 e 10, escrevemos:

```
>> sum((valores > 4) & (valores < 10))
   ans =
   2
```

Depois desta introdução, estamos em condições de escrever um *script* do MATLAB para realizar os cálculos do Exemplo 5.1 do Capítulo 5, no qual se pede uma estimativa da probabilidade de a bola ser lançada (a) a uma distância menor ou igual a 17 m, (b) a uma distância maior que 17 m e menor que 19 m, (c) a uma distância maior ou igual a 19 m. O *script* é o seguinte:

```
   n = length(distancia), % número de elementos
do vetor
   disp 'probabilidade de a distância ser menor
ou igual a 17 m'
   sum(distancia <= 17)/n
   disp 'probabilidade de a distância estar
entre 17 e 19 m'
   sum((17 < distancia) & (distancia < 19))/n
   disp 'probabilidade de a distância ser maior
ou igual a 19 m'
   sum(distancia >= 19)/n
```

Quando o *script* é executado, o computador mostra na tela o seguinte:

```
   probabilidade de a distância ser menor ou
igual a 17 m
ans =
0.4500
   probabilidade de a distância estar entre 17
e 19 m
ans =
0.4000
   probabilidade de a distância ser maior ou
igual a 19 m
ans =
```

```
0.1500
```

10.4.3 Frequência de Resultados e Histogramas

No exemplo anterior, obtivemos uma estimativa grosseira da distribuição de distâncias atingidas pela bola separando os lançamentos em três "escaninhos", de acordo com a distância atingida (pequena, média e grande) e contando o número de lançamentos em cada escaninho. Como foi discutido na Seção 5.4.4, podemos obter uma estimativa mais precisa usando um número maior de escaninhos. Para isso, podemos escrever um *script* semelhante ao da seção anterior, usando um número maior de intervalos, mas existe um recurso mais prático disponível no MATLAB. As funções do MATLAB `hist` e `histc` permitem especificar uma série de escaninhos e contar o número de elementos de um vetor que pertencem a cada escaninho; a diferença entre as duas é simplesmente que `hist` é mais fácil de usar, e `histc` oferece mais opções.

A função `hist` permite gerar um histograma a partir de um vetor de dados e da definição dos escaninhos. Quando a função é usada com apenas um argumento, o nome do vetor de dados, a diferença entre os valores do maior e do menor elemento é dividida em 10 intervalos igualmente espaçados, o número de elementos em cada intervalo é contado e os resultados são mostrados em um gráfico. Um segundo argumento, opcional, é usado para especificar o número de intervalos. O *script* a seguir ilustra as duas possibilidades, com os resultados mostrados na Figura 10.7.

```
subplot(1,2,1)
hist(distancia) % o default é de 10 escaninhos
title(' histograma com 10 escaninhos ')

subplot(1,2,2)
hist(distancia,3) % usar 3 escaninhos
```

```
title(' histograma com 3 escaninhos ')
```

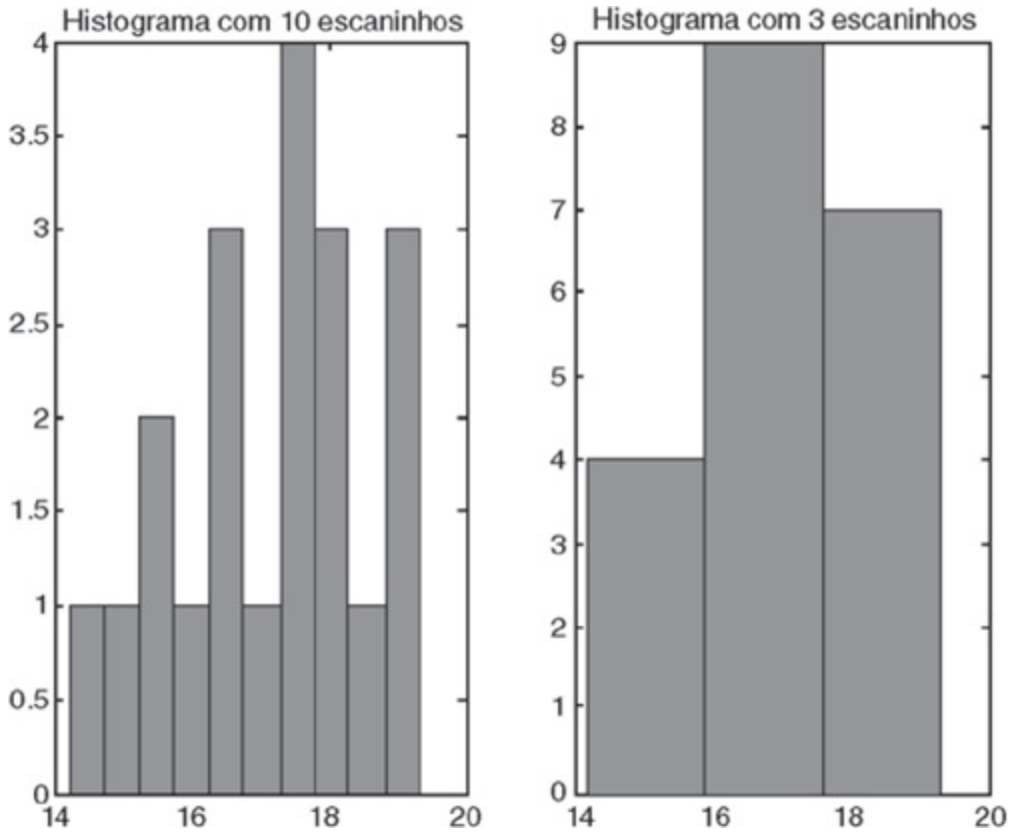


Figura 10.7 Geração de histogramas com a função `hist`.

A função `histc` permite especificar os limites do intervalo considerado, mas não gera um gráfico. A sintaxe é a seguinte:

$$contagem = \texttt{histc}\ (dados, limites)$$

onde *contagem* é um vetor com o número de elementos do vetor *dados* em cada escaninho, *dados* é um vetor com os valores dos dados, e *limites* é um vetor de dois elementos com os limites do intervalo considerado. Os comandos a seguir podem ser usados para contar o número de elementos do vetor `distancia` que estão nos intervalos $13 \leq x < 14$, $14 \leq x < 15$, ..., $19 \leq x \leq 20$, $x > 20$.

```
>> limites = 13:20;
   >> contagem = histc(distancia,limites)
```

```
contagem =
0 1 3 4 7 2 3 0
```

Podemos gerar um histograma a partir dos resultados do comando `histc` usando a função `bar`. Como a função `plot`, a função `bar` usa como argumentos um vetor de valores para a coordenada X e um vetor de valores para a coordenada Y, mas, no caso da função `bar`, os valores de `X` especificam as posições das barras verticais e os valores de Y especificam as alturas das barras. Como queremos que as barras estejam centralizadas nos intervalos e não nos limites dos intervalos, normalmente os valores de X são deslocados para a direita de metade da largura de um intervalo. A seguir é apresentado um *script* completo para gerar um histograma usando as funções `histc` e `bar;` o gráfico resultante aparece na Figura 10.8.

```
limites = 13:20;
contagem = histc(distancia,limites);
bar(limites + 0.5,contagem)
xlabel( 'distância, m ')
ylabel ('número de testes ')
```

Note que poderíamos gerar um histograma de probabilidades, em vez de um histograma de contagens relativas, dividindo o vetor `contagem` pelo número total de testes.

10.4.4 Outras Funções Estatísticas

O MATLAB oferece uma grande variedade de funções estatísticas especiais. Para conhecer essas funções, selecione sucessivamente, a partir do menu principal do MATLAB, `Help > MATLAB Help > by Category > Mathematics > Data Analysis and Fourier Transforms.`

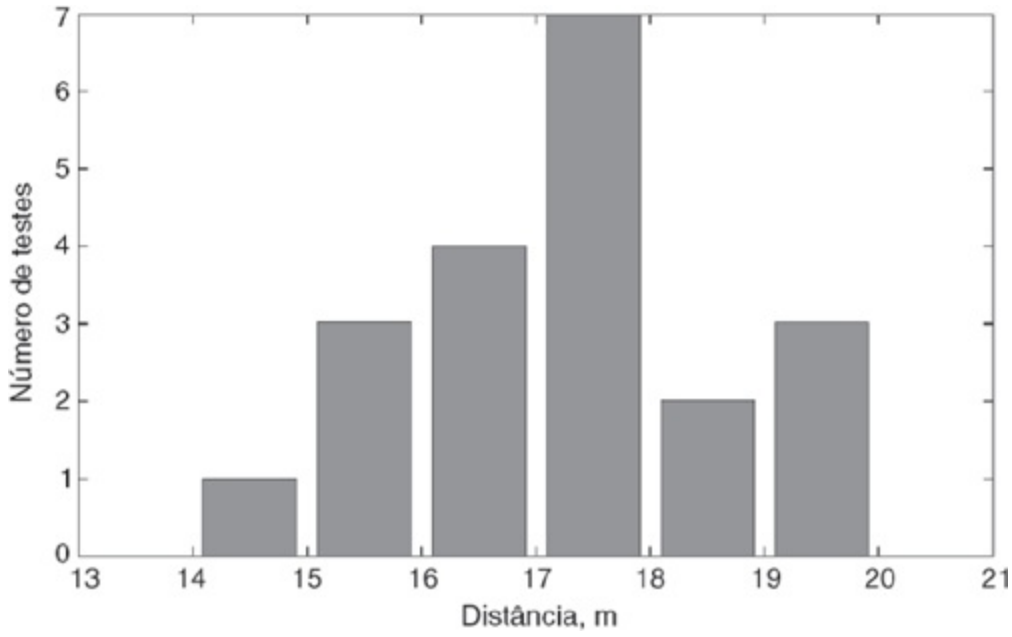


Figura 10.8 Histograma gerado usando as funções `histc` e `bar`.

PROBLEMAS

1. **Vetores do MATLAB**

   Dois vetores do MATLAB, `x` e y, são definidos da seguinte forma:

   ```
   >> x = [3 6 1 5 4 2];
   >> y = 0:.4:2;
   ```

   Determine os valores das expressões a seguir, *sem usar* o MATLAB, e depois confirme os resultados usando o MATLAB. Se uma expressão não for permitida, explique a razão.

   (a) x(3)
   (b) y(2)
   (c) x(3) + y(2)
   (d) x + 3
   (e) x + 10*y
   (f) x(3) + y
   (g) length(x)

(h) y(length(y))
(i) x(1:3)
(j) y(x(4))
(k) x(y(4))

2. Gráficos de funções no MATLAB

No MATLAB, gere gráficos das funções a seguir, nos intervalos indicados. Use pontos suficientes para que a curva da função seja suave.

(a) $f(x) = 2x - 1, -10 \leq x \leq 10$
(b) $f(x) = (x\ 1)^2, 0 \leq x \leq 5$. *Nota*: O operador do MATLAB para elevar os elementos de um vetor a uma potência é ".^" e não apenas "^".
(c) $f(x) = \text{sen}(10x), 0 \leq x \leq 4\pi$. Use pelo menos 200 pontos.
(d) $f(x) = \text{sen}(10x) + \text{sen}(11x), 0 \leq x \leq 4\pi$.
(e) $f(x) = x^x \text{ sen}(10x), 0 \leq x \leq 2\pi$. *Nota*: O operador do MATLAB para elevar os elementos de um vetor a uma potência é ".^" e não apenas "^".

3. Gráfico de uma função no MATLAB

Escreva um *script* do MATLAB que realiza as seguintes operações:

- começa com um comentário que inclui o nome e o objetivo do *script*
- cria um vetor T com valores de 0 a 50, a intervalos de 10
- soma 273 a cada elemento de T (para converter graus Celsius em kelvins)
- cria um vetor R com os valores 27, 18, 12, 8, 6 e 4
- plota o logaritmo natural de R em função de $1/T$

4. Raízes de um Polinômio

O polinômio a seguir tem três raízes (valores de x para os quais o

polinômio é igual a zero) no intervalo $0 \leq x \leq 20$.

$$y = x^3 - 15x^2 + 54x - 43$$

(a) Use a função `fplot` do MATLAB para plotar o polinômio no intervalo de 0 a 20. Amplie o gráfico para observar os pontos em que intercepta o eixo *x,* e assim estimar o valor das raízes.

(b) O MATLAB tem uma função nativa para determinar as raízes de um polinômio. Consulte o manual do MATLAB (selecionando `Help > MATLAB Help` no menu principal) para descobrir qual é esta função e como usá-la. Use a função para determinar as raízes do polinômio e compare o resultado com as respostas do item **(a)**.

5. **Análise da Deformação de uma Corda Elástica com a Força Aplicada** Um engenheiro de materiais está investigando a força necessária para obter certa deformação de uma corda elástica. Como parte da investigação, o engenheiro pendura pesos em amostras da corda e mede o alongamento resultante, que é definido como o comprimento da amostra depois que a força é aplicada menos o comprimento inicial da amostra. A tabela a seguir mostra os resultados do experimento.

Força (N)	0	10	20	30	40
Alongamento da Amostra A (m)	0	0,09	0,18	0,30	0,42
Alongamento da Amostra B (m)	0	0,18	0,36	0,60	0,84
Alongamento da Amostra C (m)	0	0,36	0,72	1,20	1,68

(a) Escreva um script do MATLAB para plotar a força em função do alongamento para a amostra A. O gráfico deve ter um

título, e os eixos devem estar rotulados com o nome e as unidades das variáveis. Sua resposta deve incluir o *script* e o gráfico criado.

(b) Modifique o *script* para plotar a força em função do alongamento para as três amostras no mesmo sistema de eixos. Use tipos de linha e símbolos diferentes para as três amostras, para que as curvas e os pontos experimentais possam ser distinguidos quando o gráfico for plotado em preto e branco. O gráfico deve ter uma legenda que indique que curva corresponde a que amostra.

(c) Suponha que as três amostras são do mesmo material, mas possuem dimensões diferentes. As dimensões das amostras (em uma ordem aleatória) são as seguintes:

- 5 mm de diâmetro e 1 m de comprimento
- 5 mm de diâmetro e 2 m de comprimento
- 7 mm de diâmetro e 1 m de comprimento

Com base nos resultados das medidas de alongamento em função da força aplicada, quais você acredita que sejam as dimensões das amostras A, B e C? Justifique sua resposta.

6. Simulação do Lançamento de uma Bola com o MATLAB

A equação a seguir fornece a distância aproximada percorrida por uma bola no vácuo depois de ser lançada por uma atiradeira como a da Seção 5.5 em função dos parâmetros horizontal e vertical x e y e de uma "constante de lançamento" k determinada experimentalmente.

$$d = \text{kxy}$$

(a) Uma bola lançada com um parâmetro vertical de 1,00 m e um parâmetro horizontal de 1,50 m alcança uma distância de 75 m. Qual é o valor da constante de lançamento? Não se

esqueça de indicar a unidade.

(b) Qual será a distância atingida pela bola se ela for lançada com um parâmetro horizontal de 1,50 m e um parâmetro vertical de 1,25 m?

(c) Uma turma que está usando a atiradeira pretende manter o parâmetro horizontal constante em 1,50 m e ajustar o parâmetro vertical para que a bola atinja a distância desejada. Supondo que o valor da constante de lançamento seja $k = 45\ \text{m}^{-1}$, escreva um *script* do MATLAB para gerar um gráfico, para uso da turma, que mostre a distância alcançada pela bola em função do parâmetro vertical. O gráfico deve ter um título, e os eixos devem estar corretamente rotulados. Sua resposta deve incluir o *script* e o gráfico criado.

(d) Modifique o *script* do item **(c)** para plotar três curvas no mesmo sistema de eixos, para $k = 45$, 50 e $55\ \text{m}^{-1}$. O gráfico deve ter uma legenda apropriada. Sua resposta deve incluir o *script* e o gráfico criado.

(e) Suponha que você deve atingir alvos situados a 50, 100 e 150 m da atiradeira e dispõe de apenas quatro tentativas por alvo. O valor exato da constante de lançamento é desconhecido, mas está entre $k = 45\ \text{m}^{-1}$ e $k = 55\ \text{m}^{-1}$. Formule uma estratégia, baseada no gráfico do item **(d)**, para atingir os três alvos. Escreva instruções detalhadas, que possam ser seguidas por qualquer pessoa que saiba operar a atiradeira.

7. Precisão de um Sistema de Lançamento

Duas atiradeiras do mesmo tipo foram usadas para executar dez lançamentos cada uma, com o objetivo de atingir um alvo situado a 100 m de distância. Os resultados foram os seguintes:

Atiradeira A (m)	97	96	100	98	98	98	100	99	97	95

Atiradeira B (m)	96	107	95	100	108	85	116	102	90	111

(a) Escreva um *script* do MATLAB para calcular os parâmetros estatísticos e plotar o gráfico a seguir para as duas atiradeiras. Sua resposta deve incluir o *script* e os resultados.

- distância mínima
- distância máxima
- distância média
- um histograma com divisões de 2 m de largura que cubra toda a faixa de valores observados

(b) Se você tivesse que escolher uma das atiradeiras para um teste no qual fosse possível ajustar os parâmetros de lançamento, qual das duas você escolheria? Use os parâmetros estatísticos para justificar sua escolha.

8. Análise Estatística do Desempenho de uma Atiradeira

Considere os seguintes dados a respeito dos lançamentos de uma atiradeira apontada para um alvo a 100 m de distância:

Atiradeira B (m)	96	107	95	100	108	85	116	102	90	111

O erro para um lançamento i apontado para um alvo a uma distância d_{alvo} é definido como a distância atingida pelo projétil menos a distância do alvo:

$$\texttt{erro}_i = d_{\texttt{alvo}} - d_i$$

Armazene os resultados dos lançamentos em um vetor do MATLAB e execute as seguintes tarefas:

(a) Escreva uma expressão do MATLAB para calcular os erros de todos os lançamentos.

(b) Escreva uma expressão do MATLAB para calcular a média dos

erros. Por que o resultado não tem significado físico?

(c) Escreva uma expressão do MATLAB para calcular a média dos quadrados dos erros e extraia a raiz quadrada do resultado. Por que o resultado é uma indicação muito melhor do desempenho da atiradeira que a média dos erros?

(d) Use a função `std` do MATLAB para calcular o desvio-padrão dos resultados dos lançamentos. Compare este valor com o obtido no item **(c)**.

9. Geração de Números Aleatórios com uma Distribuição Uniforme

A função `rand` do MATLAB gera um conjunto de números aleatórios cujos valores estão uniformemente distribuídos no intervalo de 0 a 1. A função retorna uma tabela bidimensional (matriz) de valores; para gerar um vetor de valores, que é simplesmente uma matriz com apenas uma linha, a sintaxe da função é `rand(1,N)`.

(a) Use o comando

```
dados = rand(1,1e6);
```

para definir um vetor chamado `dados` com 1 milhão de números aleatórios. (Não se esqueça do sinal de ponto e vírgula no final da linha; caso contrário, o MATLAB tentará mostrar 1 milhão de números na tela do seu computador. Se você cometer esse engano, digite "Ctrl-c" para interromper o processo!) Gere um histograma com os valores do vetor `dados`. Descreva o histograma. Com base na observação do histograma, proponha uma definição de distribuição uniforme, usando as palavras "escaninho" e "probabilidade".

(b) Escreva uma expressão do MATLAB que use a função `rand` para gerar 1 milhão de números aleatórios uniformemente distribuídos entre 0 e 10. Gere um histograma com esses

números.

(c) Escreva uma expressão do MATLAB que use a função rand para gerar 1 milhão de números aleatórios uniformemente distribuídos entre 100 e 200. Gere um histograma com esses números.

10. Geração de Números Aleatórios com uma Distribuição Normal

A função `randn` do MATLAB produz uma série de números aleatórios com uma distribuição normal de média 0 e desvio-padrão 1. A função retorna uma tabela bidimensional (matriz) de valores; para gerar um vetor de valores, que é simplesmente uma matriz com apenas uma linha, a sintaxe da função é `randn(1,N)`.

(a) Use o comando

```
dados = randn(1,1e6);
```

para definir um vetor chamado `dados` com 1 milhão de números aleatórios. (Não se esqueça do sinal de ponto e vírgula no final da linha; caso contrário, o MATLAB tentará mostrar 1 milhão de números na tela do seu computador. Se você cometer esse engano, digite "Ctrl-c" para interromper o processo!) Gere um histograma com os valores do vetor `dados`. Descreva o histograma. Use funções do MATLAB para calcular a média e o desvio-padrão dos números. Calcule o desvio-padrão usando as duas expressões, uma com `N` no denominador e outra com `N-1`. O valor obtido nos dois casos é muito diferente?

(b) Escreva um *script* do MATLAB para calcular a fração de números do vetor `dados` que estão no intervalo entre -1 e $+1$. Faça o mesmo para os intervalos -2 e $+2$ e -3 e $+3$.

(c) Escreva uma expressão do MATLAB usando a função `randn` para gerar uma série de 1 milhão de números com uma

distribuição normal de média 0 e desvio-padrão 100.

- Calcule a média e o desvio-padrão dos números.
- Gere um histograma a partir dos números.
- Escreva um *script* do MATLAB para calcular a fração de números que estão entre -1 e $+1$ desvio-padrão de distância da média. Comente o resultado.

(d) Escreva uma expressão do MATLAB usando a função `randn` para gerar uma série de 1 milhão de números com uma distribuição normal de média 50 e desvio-padrão 25.

- Calcule a média e o desvio-padrão dos números.
- Gere um histograma a partir dos números.
- Escreva um *script* do MATLAB para calcular a fração de números que estão entre -1 e $+1$ desvio-padrão de distância da média. Comente o resultado.

11. Modelo Numérico de uma Atiradeira Usando o MATLAB

Escreva um *script* do MATLAB que modele numericamente a trajetória de uma bola lançada por uma atiradeira, tomando como base o exemplo e os dados da Seção 5.3.3.

(a) Defina vetores para a distância de recuo X e a distância alcançada D_{exp}, usando os dados experimentais da Tabela 5.3.

(b) Calcule a inclinação e a ordenada do ponto de interseção da reta que passa pelos pontos (0,50; 4) e (1,25; 27).

(c) Calcule o vetor D_{mod} das distâncias previstas para cada um dos valores de X da Tabela 5.3 usando o modelo do item **(b)**.

(d) Calcule as diferenças entre as distâncias previstas e as distâncias reais (erros). Compare os resultados com os da Tabela 5.4.

(e) Gere um gráfico, semelhante ao da Figura 5.10, com as distâncias D_{exp} e D_{mod} em função de X. Use os mesmos estilos

de linha e os mesmos rótulos das escalas da Figura 5.10. (Não há necessidade de rotular os dois pontos usados para obter a reta do modelo.)

(f) Calcule o *erro médio quadrático* ou *erro RMS* do modelo. O erro RMS é definido como a raiz quadrada da média dos quadrados dos erros. Introduza este valor no gráfico sob a forma de um comentário; isto pode ser feito fora do *script*, selecionando `Insert > TextBox` no menu da janela de gráficos do MATLAB.

12. Uso da Função `polyfit` para Determinar a Reta de Melhor Ajuste

A função `polyfit` do MATLAB usa uma técnica conhecida como *regressão* para determinar os coeficientes do polinômio (pode ser uma linha reta) que melhor se ajusta a um conjunto de pontos. O polinômio gerado pela função `polyfit` é o melhor ajuste no sentido de que minimiza o quadrado da diferença entre os pontos dados e os valores calculados usando o polinômio. Neste exercício, vamos usar a função `polyfit` aplicando-a a alguns problemas simples.

(a) Determinação da linha reta que passa exatamente em pontos dados.

i. Defina dois vetores `x` e `y` do MATLAB com as coordenadas *x* e *y* de três pontos (0; 7), (1; 10) e (2; 13). Plote os três pontos como pequenos círculos em um gráfico.

ii. *Prove* que os três pontos são colineares, ou seja, que estão sobre a mesma reta. Determine a inclinação da reta e a ordenada de sua interseção com o eixo *y*.

Leia a descrição da função `polyfit` no manual do

iii. MATLAB selecionando `Help > MATLAB Help > In Alphabetical Order > polyfit` no menu principal. Use o comando `polyfit(x,y,1)` para determinar os coeficientes da reta que melhor se ajusta aos três pontos. Compare esses coeficientes com os valores encontrados no item **ii**.

iv. Use as funções `hold` e `fplot` do MATLAB para plotar a equação da reta de melhor ajuste no gráfico obtido no item **i**.

(b) Determine a reta que melhor se ajuste a três pontos não colineares.

i. Defina dois vetores `x` e `y` do MATLAB com as coordenadas x e y de três pontos (0; 7), (1; 11) e (2; 12). Plote os três pontos como pequenos círculos em um gráfico.

ii. Use a função `polyfit` para determinar os coeficientes da reta que melhor se ajustem aos três pontos. Compare esses coeficientes com os valores encontrados no item **ii**.

iii. Use as funções `hold` e `fplot` do MATLAB para plotar a equação da reta de melhor ajuste no gráfico obtido no item 1.

13. Modelo Numérico de uma Atiradeira Usando a função `polyfit` Escreva um *script* do MATLAB que modele numericamente a trajetória de uma bola lançada por uma atiradeira, tomando como base o exemplo e os dados da Seção 5.3.3.

(a) Defina vetores para a distância de recuo X e a distância alcançada D_{exp}, usando os dados experimentais da Tabela 5.3.

(b) Use a função `polyfit` do MATLAB para calcular a inclinação e

a ordenada do ponto de interseção da reta que melhor se ajuste aos dados experimentais.

(c) Calcule o vetor D_{polyfit} das distâncias previstas para cada um dos valores de X da Tabela 5.3 usando o modelo do item **(b)**.

(d) Calcule as diferenças entre as distâncias previstas e as distâncias reais (erros). Compare os resultados com os da Tabela 5.4.

(e) Gere um gráfico, semelhante ao da Figura 5.10, com as distâncias D_{exp} e D_{mod} em função de X. Use os mesmos estilos de linha e os mesmos rótulos das escalas da Figura 5.10.

(f) Calcule o *erro médio quadrático* ou *erro RMS* do modelo. O erro RMS é definido como a raiz quadrada da média dos quadrados dos erros. Introduza este valor no gráfico sob a forma de um comentário; isto pode ser feito fora do *script*, selecionando `Insert > TextBox` no menu da janela de gráficos do MATLAB. Compare o erro RMS do modelo obtido usando a função `polyfit` com o erro RMS do modelo da Tabela 5.4.

(g) É possível encontrar uma reta para a qual o erro RMS seja menor que o da reta obtida usando a função `polyfit`? Justifique sua resposta.

14. Cara ou Coroa

Escreva um *script* do MATLAB, usando uma das funções de geração de números aleatórios, para simular 10 lançamentos de uma moeda. O *script* deve informar quantos lançamentos deram "cara" e quantos deram "coroa".

15. Jogo de Dados

Escreva um *script* do MATLAB, usando uma das funções de geração de números aleatórios, para simular 100 lançamentos de um par de dados. Use uma das funções de arredondamento do MATLAB, `round`, `floor`, `ceil` ou `fix`, para obter números

inteiros a partir dos números fracionários gerados pelas funções de geração de números aleatórios. O *script* deve informar quantos lançamentos deram cada um dos valores inteiros no intervalo de 2 a 12.

16. Simulação de uma Atiradeira

Escreva um *script* do MATLAB, usando uma das funções de geração de números aleatórios, para simular 20 lançamentos de uma atiradeira com a mesma média e desvio-padrão que o experimento cujos resultados aparecem na Tabela 5.5.

(a) Plote um gráfico de pontos dos resultados, semelhante ao da Figura 5.12.

(b) Calcule a média e o desvio-padrão dos resultados. Compare os valores obtidos com os valores que você pretendia obter quando escreveu o *script*.

(c) Execute novamente a simulação, desta vez com 1000 lançamentos, e calcule a média e o desvio-padrão dos resultados. Compare os valores obtidos com os valores que você pretendia obter quando escreveu o *script*.

(d) Plote um histograma das distâncias para a simulação com 1000 lançamentos.

17. Geração de Números Aleatórios

Neste problema, você vai usar a função `rand` para gerar números aleatórios. Em cada um dos itens abaixo, escreva um comando do MATLAB para gerar os números aleatórios pedidos. Use uma das funções de arredondamento do MATLAB, `round`, `floor`, `ceil` ou `fix`, se necessário, para obter números inteiros a partir dos números fracionários gerados pelas funções de geração de números aleatórios. Teste os comandos na janela de comandos do MATLAB.

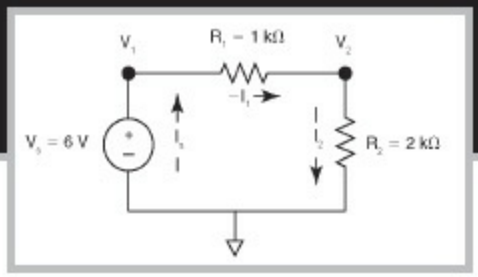
(a) Números aleatórios entre 0 e 300.

(b) Números aleatórios inteiros compreendidos entre dois números dados, `inf` e `sup` (suponha que as variáveis `inf` e `sup` já receberam um valor).

(c) Números aleatórios inteiros compreendidos entre dois números dados, `inf` e `sup`, mas a uma distância desses números maior do que `r`. Suponha que `r` é muito menor que `inf` e `sup`, e que as variáveis `inf`, `sup` e `r` já receberam um valor.

(d) Números $+1$ e -1, gerados aleatoriamente.

CAPÍTULO 11



Operações com Matrizes no MATLAB

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- usar matrizes para armazenar arranjos bidimensionais de dados;
- gerar gráficos para visualizar dados multidimensionais, como famílias de curvas com eixos em comum e gráficos de contorno;
- aplicar as regras básicas de aritmética matricial e álgebra linear usando o MATLAB;
- resolver sistemas de equações lineares usando o MATLAB.

11.1 OPERAÇÕES BÁSICAS

11.1.1 Definição de Matriz e Acesso aos Elementos de uma Matriz

Na matemática, *matriz* é um arranjo retangular de números ou elementos, organizados em linhas e colunas. O *tamanho* de uma matriz é dado como o número de linhas da matriz seguido pelo número de colunas; assim, uma matriz com m linhas e n colunas tem um tamanho m por n ou $m \times n$. Seguem alguns exemplos de matrizes.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 16 & 5 & 9 & 4 \\ 3 & 10 & 6 & 15 \\ 2 & 11 & 7 & 14 \\ 13 & 8 & 12 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

O tamanho da matriz **M** é 4 × 4, o da matriz **Q** é 2 × 3, o da matriz **R** é 1 × 3 e o da matriz **V** é 3 × 1. Uma matriz como **M**, na qual o número de linhas é igual ao número de colunas, é chamada de *matriz quadrada*. Uma matriz que contém apenas uma linha ou uma coluna é chamada de *vetor*. Uma matriz como **R**, que contém apenas uma linha, é chamada de *vetor linha*, enquanto uma matriz como **V**, que contém apenas uma coluna, é chamada de *vetor coluna*.

Para definir a matriz **M** como uma variável do MATLAB chamada `M`, digite o seguinte na linha de comando:

```
>> M = [16 5 9 4
3 10 6 15
2 11 7 14
13 8 12 1]
M =
    16     5     9     4
     3    10     6    15
     2    11     7    14
    13     8    12     1
```

Outra forma de obter o mesmo resultado é digitar

```
>> M =[16 5 9 4; 3 10 6 15; 2 11 7 14; 13 8 12 1]
M =
    16     5     9     4
     3    10     6    15
     2    11     7    14
    13     8    12     1
```

As regras para entrar com uma matriz no MATLAB são as seguintes:

1. separar os elementos de cada linha por um espaço ou uma

vírgula;

2. separar as linhas por uma mudança de linha ou por um ponto e vírgula;
3. colocar a matriz inteira no interior de um par de colchetes ([ ]).

Os comandos do MATLAB a seguir definem as outras matrizes do exemplo anterior:

```
>> Q = [2 6 5; 3 1 4]
Q =
     2     6     5
     3     1     4

>> R = [1 5 3]
R =
     1     5     3

>> V = [1; 5; 3]
V =
     1
     5
     3
```

Note que o vetor linha `R` é um "vetor" do MATLAB como os que foram definidos no Capítulo 10.

O comando `size` fornece as dimensões de uma matriz como um vetor de dois elementos no qual o primeiro elemento é o número de linhas e o segundo elemento é o número de colunas:

```
>> size(Q)
ans =
     2     3
>> size(R)
ans =
     1     3
>> size(V)
ans =
     3     1
```

Índices Como no caso dos vetores, os índices são usados para indicar elementos isolados de uma matriz; o elemento situado na linha i e na coluna j de uma matriz **A** é chamado de a_{ij}. No MATLAB, a numeração dos índices começa em 1, convenção que vamos adotar

neste livro. Entretanto, é bom tomar cuidado, porque, em outros livros e linguagens de programação (como C e Java), a numeração dos índices começa em 0. Na notação usada no MATLAB, `A(i , j)` significa o elemento situado na linha *i* e na coluna *j* da matriz `A`. Os exemplos a seguir se referem às matrizes **M** e **R** definidas anteriormente.

```
>> M(2,3)
ans =
     6
>> R(1,2)
ans =
     5
>> R(2,1)
??? Index exceeds matrix dimensions.
```

No caso de um vetor linha ou de um vetor coluna, como as matrizes `R` e `V` já definidas, o MATLAB permite usar um único índice para indicar os elementos do vetor, aplicando automaticamente o índice à dimensão apropriada, como no exemplo a seguir:

```
>> R(2)
ans =
     5
>> V(2)
ans =
     5
```

Quando usado como índice no MATLAB, o operador dois pontos (:) indica todos os elementos de uma linha ou coluna, podendo portanto ser usado para indicar de uma só vez todos os elementos de uma linha ou coluna, como nos exemplos abaixo:

```
>> M(:,2)
ans =
     5
     10
     11
     8

>> M(3,:)
ans =
     2  11  7  14
```

O operador dois pontos também pode ser usado para indicar várias linhas ou colunas consecutivas. O comando do MATLAB a seguir acessa as “linhas de 1 a 2 e as colunas de 2 a 4” da matriz M:

```
>> M(1:2,2:4)
ans =
      5     9     4
     10     6    15
```

Matriz Transposta A transposta de uma matriz **A**, representada pela notação $\mathbf{A}^T$, é a matriz obtida trocando as linhas de **A** pelas colunas, e vice-versa. Em outras palavras, dada uma matriz **A** cujos elementos são a_{ij}, os elementos da matriz $\mathbf{A}^T$ são a_{ji}. São mostradas a seguir as transpostas das quatro matrizes definidas no início desta seção.

$$\mathbf{M}^T = \begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Observe que a transposta de uma matriz linha é uma matriz coluna, e vice-versa. Para obter a transposta de uma matriz no MATLAB, basta usar o *operador transposição, ′*, como nos exemplos a seguir:

```
>> M'
ans =
    16     3     2    13
     5    10    11     8
     9     6     7    12
     4    15    14     1

>> Q'
ans =
     2     3
     6     1
     5     4

>> R'
ans =
     1
     5
     3

>> V'
ans =
     1     5     3
```

O operador transposição constitui uma forma conveniente de definir um vetor linha muito comprido em um *script*, o que é especialmente útil na hora de copiar dados de outro programa, como a coluna de uma planilha. Em vez de entrar com os números em uma única linha e partir a linha usando reticências, é mais fácil entrar com um elemento por linha, definindo assim um vetor coluna, e depois transpor o vetor. Assim, por exemplo, as duas definições a seguir são equivalentes.

```
vetor_linha_a = [1 2 3 … % continua na linha seguinte 4 5]

vetor_linha_b = [

    1

    2

    3

    4

    5]' % vetor coluna transposto
```

```
>> vetor_linha_a
vetor_linha_a =

     1  2  3  4  5

>> vetor_linha_b
vetor_linha_b =

     1  2  3  4  5
```

11.1.2 Operações Aritméticas com Matrizes, Elemento por Elemento

Como no caso dos vetores, o MATLAB permite realizar operações aritméticas entre matrizes do mesmo tamanho, elemento por elemento. A Tabela 11.1 mostra os operadores elemento por elemento para matrizes disponíveis no MATLAB, que são os mesmos já mostrados no Capítulo 10 para o caso dos vetores. Os símbolos de multiplicação, divisão e exponenciação dos operadores elemento por elemento começam com um ponto para mostrar que não se trata de operações como a multiplicação, divisão e exponenciação de vetores e matrizes, que são operações totalmente diferentes na álgebra linear. Como operações como a adição de vetores e matrizes e a multiplicação de vetores e matrizes por uma constante são realizadas elemento por elemento, nesses casos não há necessidade de usar o ponto. Seguem alguns exemplos de operações com matrizes elemento por elemento.

TABELA 11.1 Operadores matriciais elemento por elemento

Operação	Forma escalar	Forma vetorial/matricial
Adição	+	+
Subtração	−	−
Multiplicação	*	.*
Divisão	/	./
Exponenciação	^	.^

```
>> a = [0 1 2; 3 4 5]
a =
     0     1     2
     3     4     5
>> b = [6 7 8; 9 10 11]
b =
     6     7     8
     9    10    11
>> 3 * a + 5
ans =
     5     8    11
    14    17    20
>> a .* b ans =
     0     7    16
    27    40    55
>> a .^ 2
ans =
     0     1     4
     9    16    25
```

Quando as matrizes são usadas como argumentos de funções trigonométricas ou outras funções transcendentais, a operação indicada é executada elemento por elemento, como mostram os exemplos a seguir.

```
>> log10(b)
ans =
    0.7782    0.8451    0.9031
    0.9542    1.0000    1.0414
```

11.2 VARREDURA SIMULTÂNEA DE DOIS PARÂMETROS

Como vimos na Seção 5.5, um dos passos mais importantes ao executar um estudo de engenharia é preparar gráficos ou “mapas” do espaço de projeto que mostrem de que forma o comportamento do sistema varia com mudanças nos valores de variáveis ambientais ou de projeto. Na Seção 4.9.2, por exemplo, examinamos como o peso da

coluna de água no interior do cano de uma bomba varia com o raio do cano e a profundidade do poço. Nesta seção, vamos discutir o uso do MATLAB para criar esses mapas.

11.2.1 Criação de Tabelas Usando a Função `meshgrid`

Todos os tipos de gráficos usados para representar o espaço de projeto no Capítulo 5 (gráficos tridimensionais, vistas laterais e mapas de contorno) se baseiam em dados obtidos fazendo uma varredura dos parâmetros de um modelo em um certo intervalo e dispondo esses dados em uma tabela. Nesta seção, vamos ver como é possível criar essas tabelas no MATLAB usando matrizes e a função `meshgrid`.

Considere, por exemplo, a construção de uma tabuada de multiplicar como a que aparece na Tabela 11.2. Podemos pensar na tabela como uma varredura de parâmetros do modelo

$$c = c\,(a, b) = a \times b,$$

onde a é um número inteiro que varia de 1 a 5 e b é um número inteiro que varia de 1 a 3. Sem contar a linha e a coluna usadas para indicar os números de ordem das linhas e das colunas, a tabuada de multiplicação é uma matriz de 3 linhas e 5 colunas. Nessa matriz o valor do elemento situado na linha i e na coluna j é igual ao produto do número associado à coluna j pelo número associado à linha i.

TABELA 11.2 Tabuada de multiplicação

$c = a \times b$	$a = 1$	$a = 2$	$a = 3$	$a = 4$	$a = 5$
$b = 1$	1	2	3	4	5
$b = 2$	2	4	6	8	10
$b = 3$	3	6	9	12	15

Em termos das operações elemento por elemento do MATLAB, podemos pensar na tabuada de multiplicação como o produto

elemento por elemento de duas matrizes 3×5, uma com linhas iguais contendo os números de ordem das colunas, e outra com colunas iguais contendo os números de ordem das linhas. Vamos chamar essas matrizes, mostradas a seguir, de `mat_a` e `mat_b`, respectivamente, e o produto, de `mat_c`.

```
>> mat_a = [1 2 3 4 5;
    1 2 3 4 5;
    1 2 3 4 5];
>> mat_b = [1 1 1 1 1;
    2 2 2 2 2;
    3 3 3 3 3];
>> mat_c = mat_a .* mat_b
mat_c =
    1 2 3 4 5
    2 4 6 8 10
    3 6 9 12 15
```

A parte tediosa do problema é criar as matrizes `mat_a` e `mat_b`. É nesse ponto que entra a função `meshgrid` do MATLAB. A função `meshgrid` toma dois vetores, que indicam o intervalo dos números das colunas e o intervalo dos números das linhas, e produz duas matrizes adequadas para operações elemento por elemento. A sintaxe da função `meshgrid` é a seguinte:

```
[mat_x,mat_y] = meshgrid(vet_x,vet_y)
```

onde

`vet_x` é um vetor de n elementos que indica o intervalo dos números das colunas

`vet_y` é um vetor de m elementos que indica o intervalo dos números das linhas

`mat_x` é uma matriz $m \times n$ na qual as m linhas são cópias de `vet_x`

`mat_y` é uma matriz $m \times n$ na qual as n colunas são cópias de `vet_y`

Assim, o *script* a seguir produz as matrizes `mat_a` e `mat_b` mostradas anteriormente:

```
a = 1:5;
b = 1:3;
[mat_a,mat_b] = meshgrid(a,b);
```

11.2.2 Exemplo: Força Exercida sobre o Êmbolo de uma Bomba em Função da Profundidade do Poço e do Raio do Cilindro

Na Seção 4.9, apresentamos uma discussão detalhada do projeto de uma bomba d'água que pudesse ser operada por uma criança. Para dimensionar o cabo da bomba, tínhamos que conhecer a força necessária para bombear a água, o que, por sua vez, exigiu que estimássemos a profundidade do poço e o raio do cilindro da bomba. Nesta seção, vamos tornar o projeto mais versátil, usando o MATLAB para executar varreduras de parâmetros para o raio do cilindro e para a profundidade do poço e determinar como a força varia com esses dois parâmetros. Mais especificamente, vamos determinar os valores da força quando o raio do cilindro varia de 15 mm a 40 mm e quando a profundidade do poço varia de 25 m a 50 m.

Como vimos na Seção 4.9, a força necessária para levantar o êmbolo é dada por

$$W = W(r,h) = \rho g(\pi r^2 h) \tag{11.1}$$

onde

W é a força

r é o raio do cilindro, que varia de 15 a 40 mm

h é a profundidade do poço, que varia de 25 a 50 m

ρ é a massa específica da água, 1000 kg/m^3

Para fazer uma varredura dos parâmetros *r* e *h* usando o MATLAB,

1. Definimos matrizes que fazem uma varredura de *r* e *h* nas faixas de valores especificadas.
2. Escrevemos a expressão de *W* como uma operação elemento por elemento que envolve as matrizes de *r* e *h*.

O *script* a seguir implementa essas operações.

```
ro = 1000; % massa específica da água,kg/m^3
g = 9.81; % aceleração da gravidade, m/s^2
r = 15:5:40; % raio do cilindro, mm
h = 25:5:50; % profundidade do poço, m

[mat_r,mat_h] = meshgrid(r,h)
mat_W = ro*g*(pi*(mat_r/1000).^2 .* mat_h)
```

Executando o *script*, obtemos os seguintes resultados:

```
mat_r =

    15 20 25 30 35 40
    15 20 25 30 35 40
    15 20 25 30 35 40
    15 20 25 30 35 40
    15 20 25 30 35 40
    15 20 25 30 35 40

mat_h =

    25 25 25 25 25 25
```

```
     30 30 30 30 30 30
     35 35 35 35 35 35
     40 40 40 40 40 40
     45 45 45 45 45 45
     50 50 50 50 50 50
mat_w =
1.0e+003 *
     0.1734 0.3082 0.4815 0.6934
0.9438 1.2328
     0.2080 0.3698 0.5779 0.8321 1.1326
1.4793
     0.2427 0.4315 0.6742 0.9708
1.3214 1.7259
     0.2774 0.4931 0.7705 1.1095
1.5101 1.9724
     0.3120 0.5547 0.8668 1.2482
1.6989 2.2190
     0.3467 0.6164 0.9631 1.3869
1.8877 2.4655
```

11.3 GRÁFICOS TRIDIMENSIONAIS

O MATLAB dispõe de várias funções para plotar dados tridimensionais a partir de matrizes. Todos os gráficos do estudo de engenharia da Seção 5.5 foram gerados desta forma. Nesta seção, vamos ilustrar o uso dessas funções plotando os resultados da varredura de parâmetros da bomba manual executada na seção anterior. Todas as funções de plotagem de gráficos tridimensionais dispõem de opções para personalizar os resultados; para uma

descrição completa desses recursos, consulte o manual do MATLAB selecionando `Help > MATLAB Help > By Category > 3-D Visualization` no menu principal do MATLAB.

11.3.1 Gráficos de Malha e de Superfície

A função `mesh` do MATLAB produz um gráfico de "malha" a partir dos dados contidos em uma matriz. Normalmente, a função é usada com três argumentos:

```
mesh(X,Y,Z)
```

onde

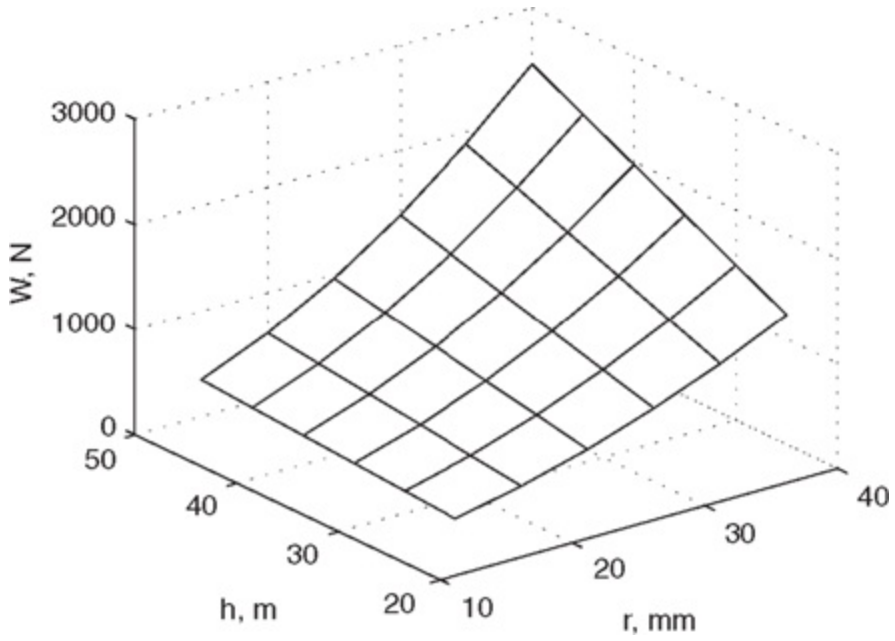
`X` é um vetor ou matriz que define o eixo x do gráfico

`Y` é um vetor ou matriz que define o eixo y do gráfico

`Z` é uma matriz que define a coordenada z dos pontos do gráfico.

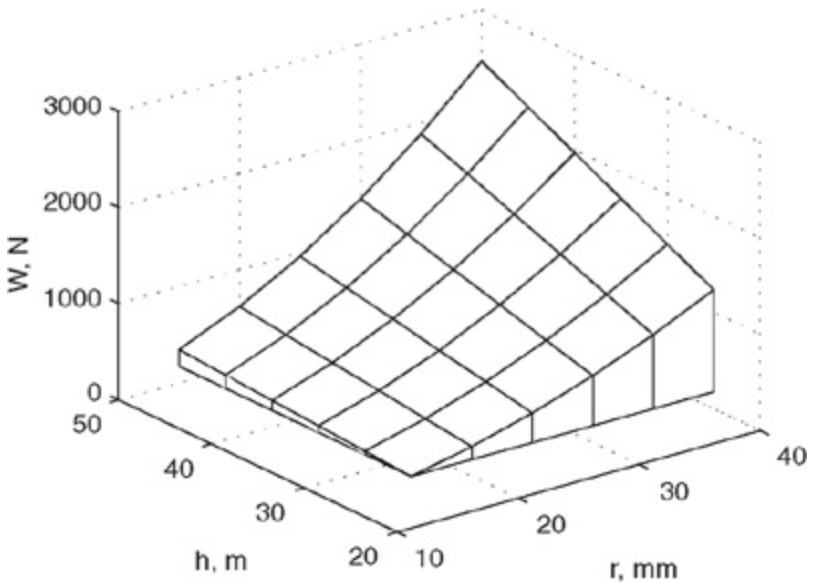
O *script* a seguir ilustra o uso da função `mesh` tomando como exemplo os dados do problema da bomba manual.

```
mesh(mat_r,mat_h,mat_W)
xlabel(' r, mm ')
ylabel(' h, m ')
zlabel(' W, N ')
```



A função `meshz` é semelhante à função `mesh`, mas acrescenta uma "cortina" ao gráfico para realçar os valores de *z* nas bordas.

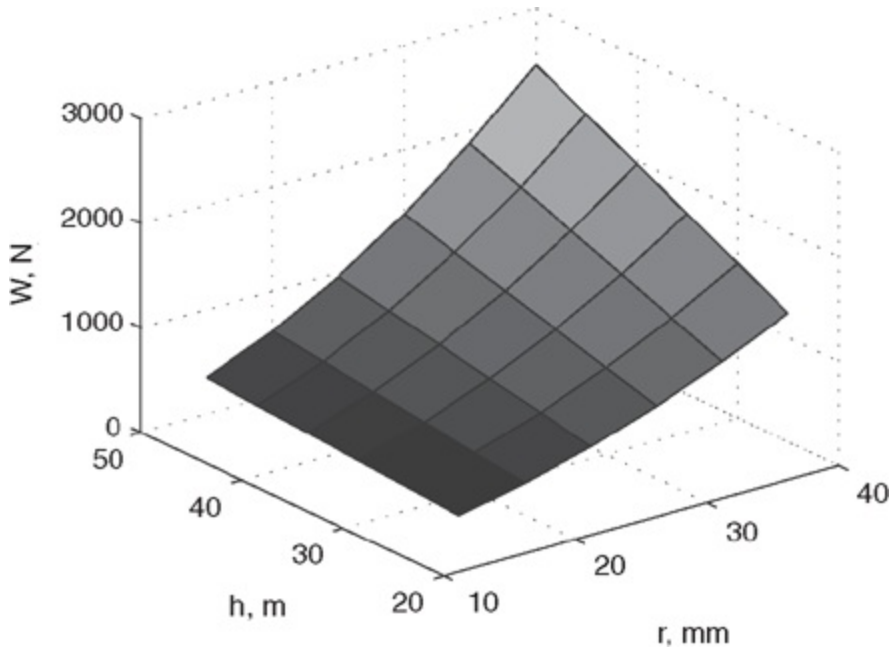
```
meshz(mat_r,mat_h,mat_W)
xlabel('r, mm')
ylabel('h, m')
zlabel('W, N')
```



A função `surf` sombreia as faces do gráfico de malha de acordo

com o valor de *z*, produzindo um gráfico de superfície.

```
surf(mat_r,mat_h,mat_W)
xlabel('r, mm')
ylabel('h, m')
zlabel('W, N')
```



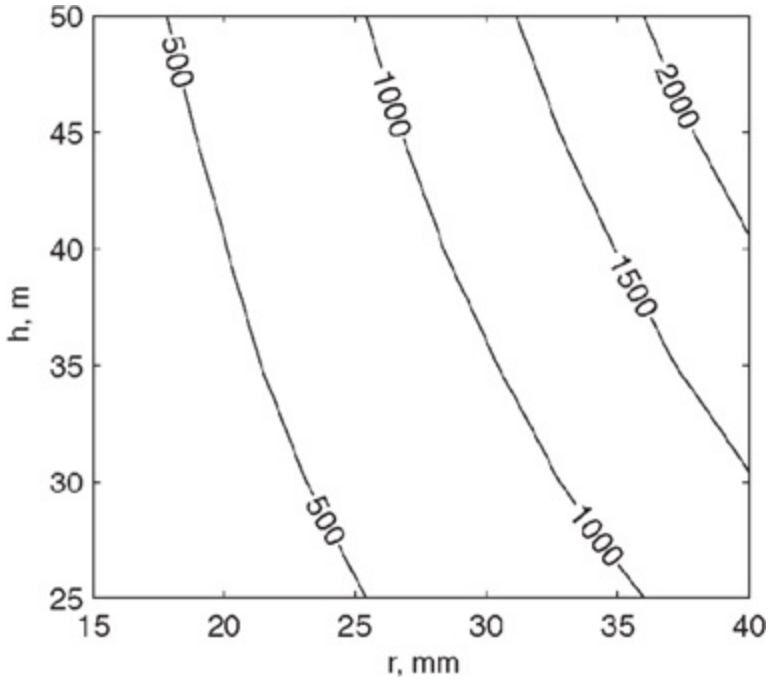
11.3.2 Gráficos de Contorno

Um gráfico de contorno é a "vista superior" de um gráfico tridimensional, como um gráfico de malha ou um gráfico de superfície, que mostra curvas de mesmo valor de *z*, conhecidas como curvas de nível. Os gráficos de contorno foram descritos em detalhes na Seção 5.5. No MATLAB, são gerados pela função `contour`, que usa os mesmos argumentos que a função `mesh`.

Além de gerar um gráfico, a função `contour` atribui valores a dois parâmetros: um "objeto gráfico" e o "handle" deste objeto. Para quem está começando a usar o MATLAB, não é importante conhecer detalhes a respeito desses parâmetros; basta saber que, para rotular as curvas de nível de um gráfico de contorno, é preciso usar esses

parâmetros como argumentos da função `clabel`. O exemplo a seguir ilustra o uso das funções `contour` e `clabel`.

```
[C, hdl] = contour(mat_r,mat_h,mat_W);
clabel(C,hdl)
xlabel('r, mm');
ylabel('h, m')
```

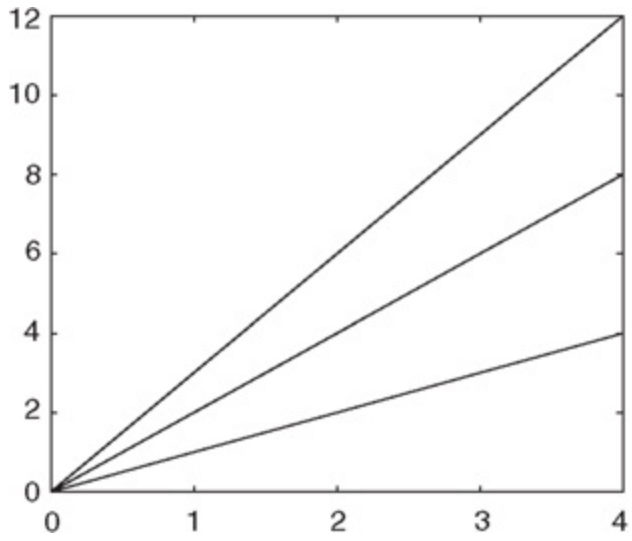


11.3.3 Gráficos de Vistas Laterais

Os gráficos de vistas laterais são um pouco mais difíceis de gerar porque é preciso tomar cuidado com a orientação dos dados. As vistas laterais da Seção 5.5 foram geradas com a função `plot` do MATLAB, mas usando matrizes como argumentos em vez de vetores.

Quando os argumentos da função `plot` são matrizes de mesmo tamanho, a função produz uma família de curvas que representam os gráficos das colunas de uma matriz em função das colunas correspondentes da outra matriz. Considere, por exemplo, as duas matrizes X e Y.

```
>> X = [0 0 0; 1 1 1; 2 2 2; 3 3 3; 4 4 4]
X =

     0  0  0
     1  1  1
     2  2  2
     3  3  3
     4  4  4
>> Y = [0 0 0; 1 2 3; 2 4 6; 3 6 9; 4 8 12]
Y =

     0  0  0
     1  2  3
     2  4  6
     3  6  9
     4  8 12
>> plot(X,Y)
```



O gráfico resultante tem três curvas: a da primeira coluna de `Y` em função da primeira coluna de `X`, a da segunda coluna de `Y` em função da segunda coluna de `X`, e a da terceira coluna de `Y` em função da terceira coluna de `X`.

Vamos agora à parte difícil. Como mostra a Figura 11.1, baseada nos dados da Seção 11.2.2, existem duas vistas laterais de um gráfico de malha tridimensional—uma perpendicular ao plano *h*-*W* e outra perpendicular ao plano *r*-*W*— que devem ser tratadas separadamente. Vamos considerar primeiro a vista da "esquerda", perpendicular ao plano *h*-*W*. Nesse caso, a vista lateral é um gráfico X-Y com uma família de curvas nas quais as colunas de `mat_W` são plotadas no `eixo` *y* e as colunas correspondentes de `mat_h` são plotadas no `eixo` *x*.

Podemos gerar esse gráfico usando o comando

```
plot(mat_h,mat_W) % vista lateral da "esquerda"
```

como mostra a Figura 11.1. A segunda vista lateral, obtida olhando da "direita" para o plano *r*-*W*, pode ser obtida plotando as *linhas* de `mat_W` no eixo *y* e as *linhas* correspondentes de `mat_r` no eixo x. Como a função `plot` plota as *colunas* de uma matriz em função das colunas de outra matriz, precisamos transpor as duas matrizes antes de usá-las como argumentos da função plot. Assim, o comando para gerar a vista lateral da "direita" é

```
plot(mat_r',mat_W') % vista lateral da "direita"
```

Rótulos nas curvas de cada família ajudam a esclarecer a que vista as curvas pertencem. Embora existam meios de introduzir esses rótulos como parte de um *script*, em geral eles são acrescentados manualmente usando as ferramentas de edição da janela de gráficos do MATLAB.

11.4 ARITMÉTICA MATRICIAL

Assim como as operações de adição, subtração e multiplicação de números são definidas na aritmética comum, as operações de adição, subtração e multiplicação de matrizes são definidas na *aritmética matricial*. As regras e operações básicas da aritmética matricial e os comandos correspondentes do MATLAB são discutidos nesta seção.

11.4.1 Matriz Nula

A matriz nula é definida como uma matriz cujos elementos são todos iguais a 0. Para criar uma matriz nula $m \times n$ no MATLAB, basta usar o comando `zeros`.

```
>> zeros(2, 3)
ans =

     0  0  0

     0  0  0
```

11.4.2 Igualdade de Matrizes

Duas matrizes são iguais se e somente se têm o mesmo tamanho e se todos os elementos correspondentes são iguais. Em outras palavras, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ se e somente se $a_{ij} = b_{ij}$ para todos os valores e i e j.

11.4.3 Adição de Matrizes

Duas matrizes podem ser somadas se e somente se forem do mesmo tamanho. A soma de duas matrizes é uma matriz de mesmo tamanho que as matrizes originais e cujos elementos são a soma dos elementos correspondentes das matrizes originais. De maneira mais formal, dadas duas matrizes **A** e **B**, ambas $m \times n$,

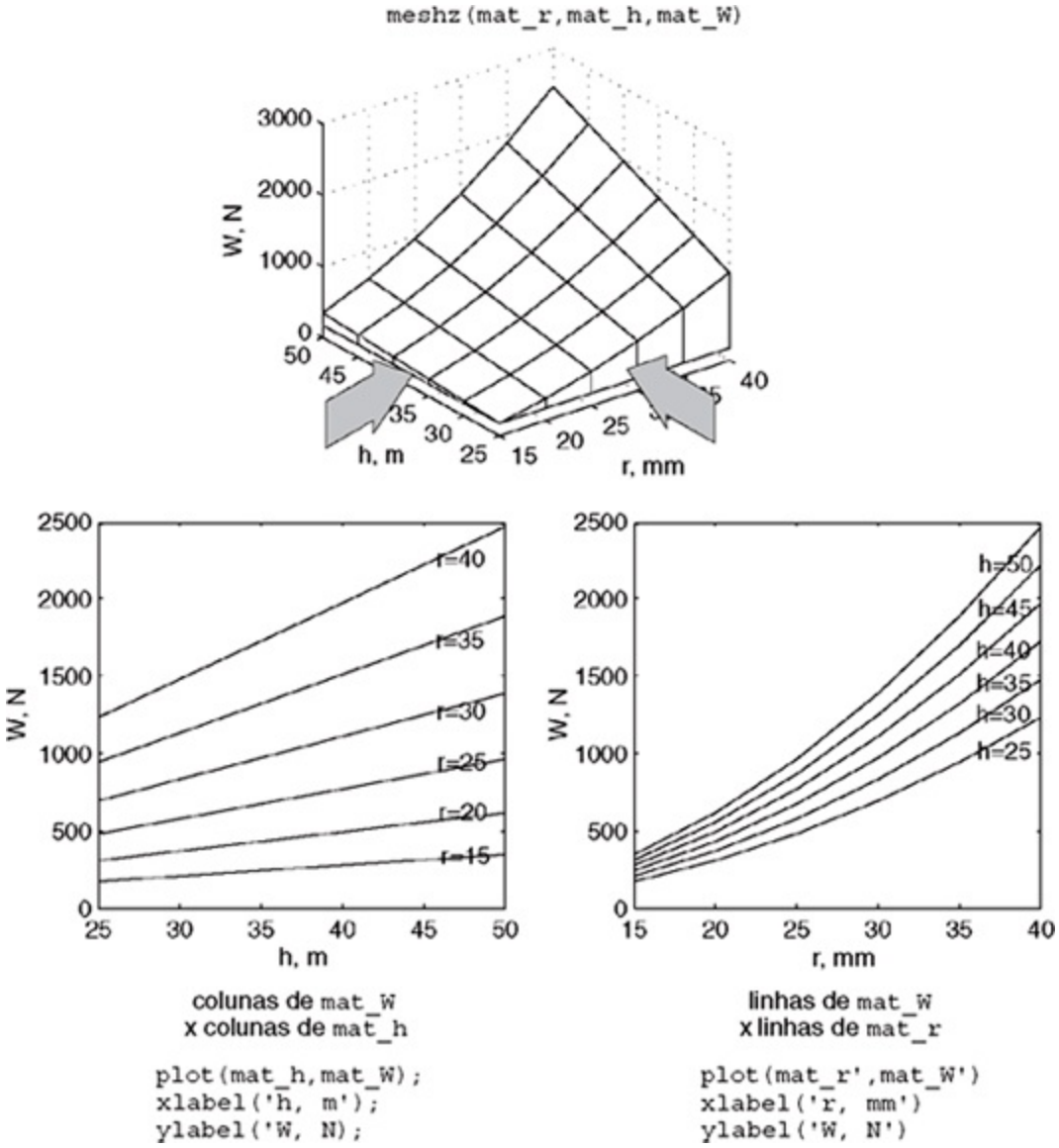


Figura 11.1 Geração de vistas laterais.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

os elementos da matriz $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ são iguais a $a_{ij} + b_{ij}$ e, portanto,

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

A adição de matrizes é comutativa e associativa.

- Propriedade Comutativa da Adição de Matrizes: **A** + **B** = **B** + **A**
- Propriedade Associativa da Adição de Matrizes: **A** + (**B** + **C**) = (**A** + **B**) + **C**

O MATLAB usa o operador de adição (+) para somar duas matrizes. Se as matrizes não são do mesmo tamanho, o programa gera uma mensagem de erro. Tomando como exemplo as matrizes definidas na Seção 11.1,

```
>> M + M'
ans =

    32  8 11 17

    8 20 17 23

    11 17 14 26

    17 23 26 2

>> R + V
??? Error using ==> plus
Matrix dimensions must agree.
```

11.4.4 Multiplicação de uma Matriz por um Escalar

O produto de uma matriz por um escalar é igual a uma matriz cujos elementos são os elementos correspondentes da matriz original multiplicados pelo escalar. Assim, os elementos de $\alpha\mathbf{A}$ são $\alpha \cdot a_{ij}$ e, portanto,

$$\alpha\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Isso significa que a multiplicação de uma matriz por um escalar é comutativa: $\alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha$.

O MATLAB usa o operador de multiplicação (*) para indicar a multiplicação de uma matriz por um escalar, como mostram os exemplos a seguir.

```
>> 2*M
ans =

    32 10 18 8

    6 20 12 30

    4 22 14 28

    26 16 24 2
>> R*2
ans =

    2 10 6
```

O inverso aritmético de uma matriz **A**, $-\mathbf{A}$, é definido como $(-1) \cdot \mathbf{A}$, de modo que a soma de uma matriz com seu inverso aritmético (negativo) é uma matriz nula de mesmo tamanho. O MATLAB usa o operador de subtração ($-$) para gerar o inverso aritmético (negativo) de uma matriz.

```
>> -V
ans =

    -1

    -5

    -3
```

11.4.5 Subtração de Matrizes

A diferença de duas matrizes, $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, é definida como $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$. Como na aritmética comum, a subtração de matrizes não é comutativa nem associativa. No MATLAB, o operador de subtração $(-)$ é usado para indicar a subtração de matrizes.

11.4.6 Multiplicação de Matrizes

Duas matrizes **A** e **B** podem ser multiplicadas se e somente se o número de colunas da matriz **A** for igual ao número de linhas da matriz **B**. O produto resultante é uma matriz com o mesmo número de linhas que a matriz **A** e o mesmo número de colunas que a matriz **B**. Assim, se **A** é uma matriz $m \times p$ e **B** é uma matriz $p \times n$, o produto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ é uma matriz $m \times n$. Os elementos da matriz produto **C** são dados pela seguinte expressão:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Em outras palavras, o valor de c_{ij} é obtido tomando os elementos da linha i de **A**, multiplicando esses elementos pelos elementos correspondentes da coluna j de **B** e somando os resultados. Para obter o valor de c_{12}, por exemplo, multiplicamos os elementos da primeira linha de **A** pelos elementos correspondentes da segunda coluna de **B** e somamos os resultados.

A título de ilustração, seja **P** a matriz 3×3.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

O produto $\mathbf{N} = \mathbf{QP}$, onde **Q** é a matriz 2×3 definida na seção 11.1, também é uma matriz 2×3. O elemento n_{11} é dado por

$$
\begin{aligned}
n_{11} &= \sum_{k=1}^{3} q_{1k} \cdot p_{k1} \\
&= (2)(4) + (6)(-1) + (5)(0) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Da mesma forma,

$$
\begin{aligned}
n_{12} &= \sum_{k=1}^{3} q_{1k} \cdot p_{k2} \\
&= (2)(-1) + (6)(6) + (5)(-2) \\
&= 24
\end{aligned}
$$

Para calcular um produto de matrizes com o MATLAB, basta usar o operador de multiplicação (*).

```
>> P = [4 -1 0; -1 6 2; 0 -2 7]
P =

     4 -1 0

     -1 6 2

     0 -2 7

>> N = Q*P
N =

     2 24 47

     11 -5 30
```

Observe que o produto **PQ** não é definido porque o número de linhas de **P** não é igual ao número de colunas de **Q**.

```
>> P*Q
??? Error using ==> mtimes
Inner matrix dimensions must agree.
```

A multiplicação de matrizes é associativa e distributiva em relação à adição, mas *não é* comutativa.

- Propriedade Associativa: (**AB**)**C** = **A** (**BC**)

- Propriedade Distributiva da Multiplicação em Relação à Adição: $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- Não Comutativa: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

Note que a multiplicação de matrizes não é comutativa, mesmo que as duas matrizes sejam quadradas, caso em que os dois produtos (**AB** e **BA**) são definidos. O exemplo a seguir mostra que o produto de uma matriz quadrada pela sua transposta não pode ser comutado (repare nos sinais):

```
>> P*P'
ans =

    17 -10 2
    -10 41 2
    2 2 53
>> P'*P
ans =

    17 -10 -2
    -10 41 -2
    -2 -2 53
```

Observe que o produto de um vetor linha por um vetor coluna com o mesmo número de elementos é uma matriz com apenas um elemento, ou seja, um escalar:

```
>> R*V
ans =

    35
```

Por outro lado, o produto de um vetor coluna por um vetor linha com o mesmo número de elementos é uma matriz quadrada (e simétrica).

```
>> V*R
ans =
```

```
    1  5  3
    5  25  15
    3  15  9
```

A multiplicação de matrizes pode ser usada, por exemplo, para tabular os valores de uma série de encomendas. Suponha que uma empresa tenha recebido quatro encomendas, cada uma especificando um número diferente de unidades de três produtos, e precise calcular o valor total de cada encomenda, como mostra a tabela abaixo.

Produtos	Produto 1	Produto 2	Produto 3	Todos
Preço	1,25	7,50	4,99	Total
Encomenda 1	27	42	12	?
Encomenda 2	14	0	9	?
Encomenda 3	18	6	24	?
Encomenda 4	15	21	7	?

Podemos expressar a solução deste problema como o produto de uma matriz de encomendas por um vetor (coluna) de preços, como mostra o *script* do MATLAB a seguir.

```
precos_unitarios = [1.25 7.50 4.99]'
encomendas = [
27 42 12
14 0 9
18 6 24
15 21 7
]
valores = encomendas * precos_unitarios
```

Executando este *script*, obtemos o seguinte resultado:

```
precos_unitarios =
    1.2500
    7.5000
```

```
     4.9900
encomendas =
     27 42 12
     14 0 9
     18 6 24
     15 21 7
valores =
     408.6300
     62.4100
     187.2600
     211.1800
```

11.5 SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

11.5.1 Equações Lineares em Forma Matricial

Uma das aplicações mais importantes das matrizes é o estudo dos sistemas de equações lineares. Uma *equação linear* de variáveis x_1, x_2, …, x_n é qualquer equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

onde a_1, a_2, …, a_n são coeficientes constantes e b também é uma constante, que recebe o nome de *termo independente* da equação. A equação a seguir é uma equação linear de variáveis x_1, x_2 e x_3.

$$-x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 5$$

A equação a seguir *não é* uma equação linear, pois contém um produto de duas variáveis.

$$3x_1 + 2x_2x_3 = 5$$

Considerando os coeficientes de uma equação vetorial como um vetor linha e as variáveis como um vetor coluna, podemos expressar a equação como um produto dos dois vetores:

$$[a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n] = [b]$$

$$\mathbf{aX} = \mathbf{B}$$

onde

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n] \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = [b]$$

Um *sistema de equações lineares* é um conjunto de equações lineares, com as mesmas variáveis x_1, x_2, ..., x_n e diferentes coeficientes e termos independentes, cuja forma geral é a seguinte:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Um sistema de equações lineares pode ser expresso como uma equação matricial da forma

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

A matriz **A** é chamada de matriz dos coeficientes; a matriz **X**, de matriz das variáveis; e a matriz **B**, de matriz dos "termos independentes".

Para dar um exemplo, o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 2 \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 5 \\ -2x_2 + 7x_3 &= 17 \end{aligned}$$

pode ser expresso na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 17 \end{bmatrix}$$

No MATLAB, a matriz **A** e o vetor **B** são

```
>> A = [4 -1 0; -1 6 -2; -2 7]
A =

     4 -1 0

     -1 6 -2

     0 -2 7

>> B = [2 5 17]'
B =

     2

     5

     17
```

11.5.2 A Matriz Identidade e a Matriz Inversa

Antes de discutir a solução de um sistema de equações lineares usando métodos matriciais, precisamos definir os conceitos de *matriz identidade* e *matriz inversa*.

Matriz Identidade Uma matriz identidade **I** é definida como uma matriz da forma

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

Assim, **I** é uma matriz quadrada na qual os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e todos os outros elementos são iguais a 0. Usando a definição de multiplicação de matrizes, é fácil mostrar que, para qualquer matriz **A**,

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A},$$

o que justifica o nome da matriz identidade. Para criar uma matriz identidade no MATLAB, basta usar o comando `eye`, como no exemplo a seguir.

```
>> >> eye(3)
ans =

     1  0  0

     0  1  0

     0  0  1
```

Matriz Inversa A inversa de uma matriz quadrada **A**, representada como $\mathbf{A}^{-1}$, é uma matriz tal que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Para determinar a inversa usando o MATLAB, basta usar o comando `inv`. No exemplo a seguir, vamos calcular a inversa da matriz de coeficientes do sistema de equações mostrado no início desta seção.

```
>> inv(A)
ans =

    0.2621  0.0483  0.0138

    0.0483  0.1931  0.0552
```

```
    0.0138 0.0552 0.1586
>> A*inv(A)
ans =
    1.0000 0 0
    0.0000 1.0000 0
    -0.0000 -0.0000 1.0000
>> inv(A)*A
ans =
    1.0000 0.0000 -0.0000
    0 1.0000 -0.0000
    0 0 1.0000
```

Nem todas as matrizes quadradas possuem inversa. Uma matriz que não possui inversa é chamada de matriz *singular*. Assim, por exemplo, a matriz a seguir não possui inversa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ao tentarmos obter a inversa de uma matriz singular usando o MATLAB, o programa produz uma mensagem de erro:

```
>> inv([1,1,1; 1,1,1; 1 1 1])
Warning: Matrix is singular to working precision.
ans =
    Inf Inf Inf
    Inf Inf Inf
    Inf Inf Inf
```

11.5.3 Solução de Equações Matriciais Usando Matrizes Inversas

O objetivo de resolver um sistema de equações lineares é encontrar um conjunto de valores das variáveis que satisfaça simultaneamente todas as equações. Em termos de matrizes, dada uma equação matricial da forma

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B},$$

onde **A** é uma matriz quadrada de coeficientes $n \times n$, **X** é um vetor coluna de variáveis $n \times 1$ e **B** é um vetor coluna $n \times 1$ de termos independentes, queremos encontrar um valor do vetor **X** que satisfaça a equação.

Suponha que estivéssemos trabalhando com uma equação escalar em vez de uma equação matricial. Nesse caso, de acordo com as regras da álgebra, poderíamos explicitar **X** dividindo ambos os membros da equação por **A**. Naturalmente, *não podemos* fazer isso no caso de uma equação matricial, já que a operação de divisão não é definida no caso de matrizes. Existe uma forma, porém, de explicitar **X** que obedece às regras aritméticas para matrizes que foram definidas na seção anterior. Como vimos, o produto de uma matriz pela sua inversa é igual à matriz identidade, e o produto de uma matriz pela matriz identidade é igual à própria matriz. Pré-multiplicando, ou seja, multiplicando pela esquerda os dois membros da equação por $\mathbf{A}^{-1}$ (lembre-se de que o produto de matrizes não é comutativo), obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\mathbf{AX} &= \mathbf{B} \\
\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX}) &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\
(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\
\mathbf{IX} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\
\mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}
\end{aligned}$$

Assim, para obter o valor de **X**, devemos pré-multiplicar **B** pela inversa de **A**, $\mathbf{A}^{-1}$.

Vamos fazer isso no MATLAB para o exemplo da seção anterior, no qual

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 17 \end{bmatrix}$$

A sequência de comandos a seguir define as matrizes e obtém o valor de **X** usando a inversa de **A**:

```
>> A = [4 -1 0; -1 6 -2; 0 -2 7]
A =
     4 1 0
     1 6 -2
     0 -2 7
>> B = [2 5 17]'
B =
     2
     5
     17
>> X = inv(A)*B
X =
     1.0000
     2.0000
     3.0000
```

Assim, **X** é igual ao vetor coluna $\mathbf{X} = [1\ 2\ 3]^T$. Para verificar se a solução está correta, podemos calcular o produto **AX** e ver se realmente é igual **B**.

```
>> A*X
ans =
     2.0000
     5.0000
     17.0000
```

A resposta é afirmativa.

11.5.4 Solução de Equações Matriciais Usando o Operador Barra Invertida

Acabamos de apresentar um método para resolver sistemas de equações lineares usando o MATLAB: calcular o inverso da matriz dos coeficientes e pré-multiplicar o vetor dos termos independentes por essa matriz. Do ponto de vista numérico, porém, esta abordagem é pouco eficiente. O algoritmo para calcular a inversa é relativamente lento; existem métodos mais rápidos para calcular **X** que não envolvem a inversão explícita de uma matriz. Uma técnica para obter **X** é o algoritmo de *eliminação gaussiana*. O operador barra invertida (\) do MATLAB usa o método de eliminação gaussiana para obter com mais eficiência o equivalente de $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, como no exemplo a seguir:

```
>> X = A\B
X =

    1.0000
    2.0000
    3.0000
```

No caso de sistema de equações com poucas incógnitas, praticamente não há diferença entre calcular explicitamente a inversa usando o comando `inv` e utilizar o método da eliminação gaussiana por meio do operador barra invertida. No caso de sistemas de equações com muitas incógnitas, porém, a diferença é considerável. O melhor é usar *sempre* o operador barra invertida para resolver sistemas de equações lineares em vez de inverter explicitamente a matriz dos coeficientes usando o operador `inv`.

11.5.5 Exemplo: Análise de uma Treliça

Na Seção 6.2.6, executamos uma análise estática da treliça de três

elementos mostrada na Figura 11.2 para calcular as forças externas nos suportes e as forças internas de tração ou compressão nos elementos. A análise deu origem a um sistema de 6 equações com 6 incógnitas, que foi resolvido manualmente. Nesta seção, vamos usar o MATLAB para resolver esse sistema de equações.

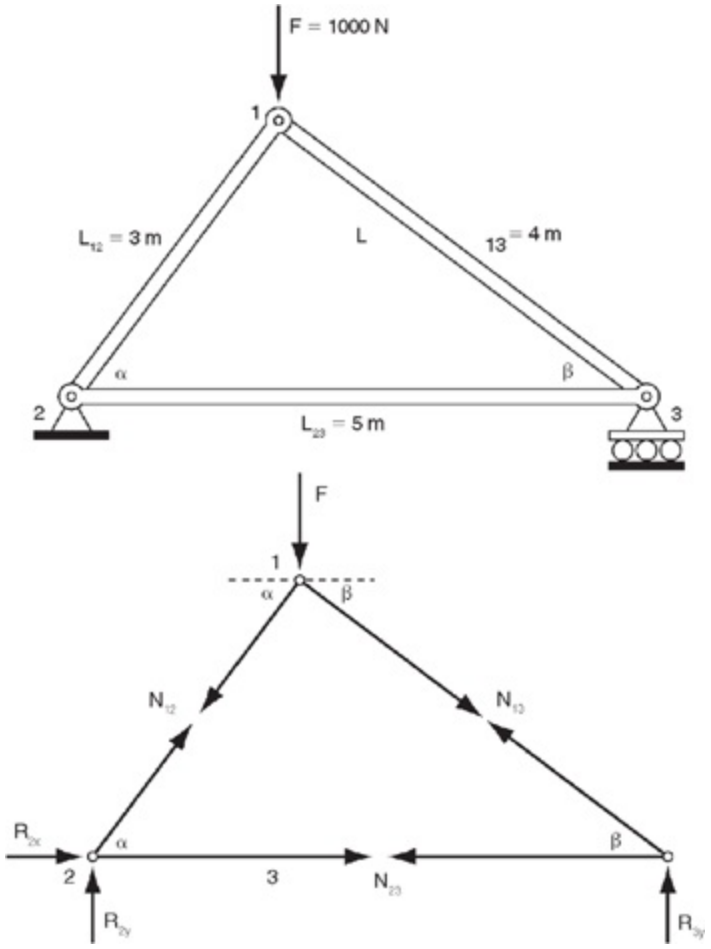


Figura 11.2 Uma treliça de três elementos com forças internas e externas a serem calculadas.

Uma descrição detalhada do problema e a solução são apresentadas na Seção 6.2.6, mas, resumidamente, as 6 incógnitas são as três forças internas N_{12}, N_{23} e N_{13} e as três reações dos suportes R_{2_x}, R_{2_y} e R_{3_y}, como mostra a Figura 11.2. As 6 equações expressam o fato de que a soma das componentes x e y das forças deve ser nula em cada um dos nós. Como foi visto na Seção 6.2.6, essas equações são as seguintes:

Componentes x das forças no nó 1: $-\cos\alpha N_{12} + \cos\beta N_{13} = 0$
Componentes y das forças no nó 1: $-\text{sen}\,\alpha N_{12} - \text{sen}\,\beta N_{13} = 1000$
Componentes x das forças no nó 2: $\cos\alpha N_{12} + N_{23} + R_{2x} = 0$
Componentes y das forças no nó 2: $\text{sen}\,\alpha N_{12} + R_{2y} = 0$
Componentes x das forças no nó 3: $-N_{23} - \cos\beta N_{13} = 0$
Componentes y das forças no nó 3: $\text{sen}\,\beta N_{13} + R_{3y} = 0$

Quando resolvemos este problema pela primeira vez, na Seção 6.2.6, substituímos os senos e cossenos por seus valores numéricos para facilitar a solução manual. Agora que estamos usando o MATLAB, vamos deixar que o programa faça esses cálculos para nós. Note também que manipulamos as equações (na verdade, apenas a segunda) para que os termos independentes ficassem todos do lado direito e pudéssemos escrever as equações em forma matricial. A forma matricial do sistema de equações é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} -\cos\alpha & 0 & \cos\beta & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\,\alpha & 0 & -\text{sen}\,\beta & 0 & 0 & 0 \\ \cos\alpha & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{sen}\,\alpha & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\cos\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen}\,\beta & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_{12} \\ N_{23} \\ N_{13} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ R_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vamos agora escrever um *script* do MATLAB para resolver este sistema de equações.

```
% Solução de uma treliça de 3 elementos do Capítulo 6

% Resolver o sistema de equações AX = B, onde X

% é um vetor coluna de forças desconhecidas, da forma

%

% X = [N_12 N_23 N_13 R_2x R_2y R_3y]'

sen_a = 4/5;
```

```
cos_a = 3/5;
sen_b = 3/5;
cos_b = 4/5;

% matriz dos coeficientes A = [

    -cos_a 0 cos_b 0 0 0
    -sen_a 0 -sen_b 0 0 0
    cos_a 1 0 1 0 0
    sen_a 0 0 0 1 0
    0 -1 -cos_b 0 0 0
    0 0 sen_b 0 0 1
];

% termos independentes, forças externas
B = [0 1000 0 0 0 0]';

% calcular as forças desconhecidas
X = A\B;

% mostrar os resultados
disp('Solução:')
disp(' N_12 N_23 N_13 R_2x R_2y R_3y ') %
nomes das forças
disp(X') % mostrar a transposta de X
```

Salvando o *script* com o nome de `trelica` e executando-o, obtemos o seguinte resultado:

```
>> trelica
Solução:

    N_12 N_23 N_13 R_2x R_2y R_3y
    -800 480 -600 0 640 360
```

Esses são os mesmos resultados que obtivemos quando resolvemos o problema manualmente; mas observe como o processo foi muito mais

simples (e menos sujeito a erros) usando o MATLAB! Em particular, na solução manual, perdemos um bom tempo tentando encontrar uma forma simples de resolver as equações. Quando resolvemos um sistema de equações usando o MATLAB, não precisamos nos preocupar com isso; basta escrever as equações em forma matricial e deixar que o computador faça o resto.

11.5.6 Exemplo: Análise de Circuitos Elétricos

Na Seção 7.4.3, apresentamos um método para calcular correntes e tensões desconhecidas em circuitos elétricos. Da mesma forma que a análise de treliças descrita na Seção 6.2.6, a análise de circuitos envolve a solução de sistemas de equações lineares. Na Seção 7.4.3, analisamos um circuito muito simples, mostrado na Figura 11.3, e resolvemos manualmente um sistema de 5 equações com 5 incógnitas. Nesta seção, vamos primeiro usar o MATLAB para calcular as correntes e tensões para este mesmo exemplo e depois analisar um circuito mais complexo que converte um sinal digital, que representa um número binário, em uma tensão analógica correspondente. Esse tipo de circuito, conhecido como *conversor analógico-digital* ou *DAC,*[1] é usado em aparelhos, como CD players ou MP3 players, que transformam os bits das gravações digitais em sinais de áudio.

A análise de um circuito, descrita em detalhes na Seção 7.4.3, envolve dois tipos de incógnitas:

- correntes desconhecidas em elementos do circuito, que recebem o nome de *ramos*
- tensões desconhecidas em pontos de ligação do circuito, que recebem o nome de *nós*

  Existem também dois tipos de equações:
- as equações da Lei das Correntes de Kirchhoff (LCK), segundo a qual a soma das correntes que entram em um nó é zero.
- as Relações Constitutivas (RCs), que são relações entre a corrente e a tensão em cada ramo. Assim, por exemplo, para um

resistor, a RC é a Lei de Ohm; para uma fonte de tensão, é o fato de que a tensão entre os nós nas extremidades do ramo é constante e igual à tensão da fonte.

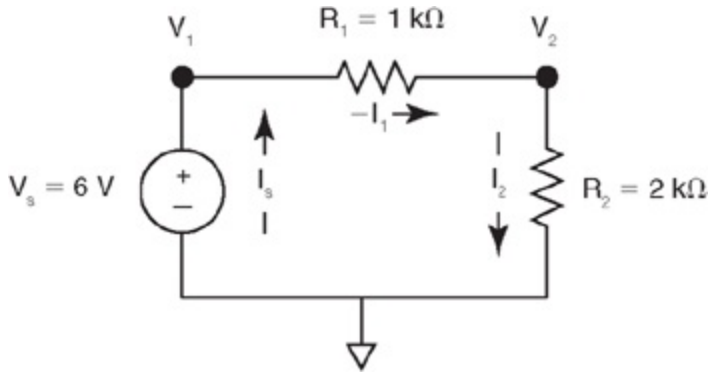


Figura 11.3 Exemplo de análise de um circuito usando o método dos nós.

Um Exemplo Simples Para começar, vamos repetir a análise da Seção 7.4.3 usando técnicas matriciais e o MATLAB. As correntes e tensões desconhecidas no circuito da Figura 11.3 são:

Tensões de nó desconhecidas:	v_1	v_2	
Correntes de ramo desconhecidas:	I_s	I_1	I_2

As equações do circuito são:

LCK no nó 1:	$I_s - I_1 = 0$
LCK no nó 2:	$I_1 - I_2 = 0$
RC para V_s:	$v_1 - 0 = V_s$
RC para R_1:	$v_1 - v_2 = R_1 I_1$
RC para R_2:	$v_2 - 0 = R_2 I_2$

Este sistema de equações é muito fácil de resolver manualmente; podemos, por exemplo, obter v_1 diretamente na terceira equação. O que queremos mostrar é que é possível resolver as equações *automaticamente*, sem nos preocuparmos com a álgebra. Além disso, a abordagem que usamos neste exemplo pode ser facilmente aplicada a circuitos mais complicados, que seriam extremamente tediosos de resolver sem o auxílio de um computador. Para resolver as equações

usando o MATLAB, precisamos primeiro expressá-las em forma matricial. Para isso, vamos manipular as equações de tal forma que os termos independentes fiquem do lado direito, e as variáveis do lado esquerdo estejam na mesma ordem em todas as equações, com as correntes aparecendo antes das tensões. Isso nos dá o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} -I_1 + I_s &= 0 \\ I_1 - I_2 &= 0 \\ v_1 &= V_s \\ -R_1 I_1 + v_1 - v_2 &= 0 \\ -R_2 I_2 + v_2 &= 0 \end{aligned}$$

Passando para a forma matricial, obtemos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -R_1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -R_2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_s \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A partir deste ponto, é trivial escrever um *script* do MATLAB, mostrado a seguir, para determinar os valores das tensões e correntes.

```
% Análise de um circuito resistivo simples
% usando um sistema de equações da forma
AX = B, onde
% X = [I1 I2 Is v1 v2]'

Vs = 6; % tensão da fonte, volts
R1 = 1000; % resistência, ohms
R2 = 2000; % resistência, ohms

% matriz dos coeficientes
A = [

    -1 0 1 0 0

    1 -1 0 0 0
```

```
    0 0 0 1 0
    -R1 0 0 1 -1
    0 -R2 0 0 1
];
% vetor coluna dos termos independentes
B = [0 0 Vs 0 0]';

% calcular as correntes e tensões
X = A\B;

% mostrar os resultados
disp('Solução:')
disp(' I1 I2 Is v1 v2')
disp(X')
```

Salvando o *script* com o nome de `circuito` e executando-o, obtemos o seguinte resultado:

```
>> circuito
Solução:

    I1 I2 Is v1 v2
    0.002 0.0020 0.0020 6.0000 4.0000
```

que é a mesma solução que obtivemos na Seção 7.4.3.

Circuito Conversor Analógico-Digital Depois de ver como é possível analisar um circuito elétrico simples usando matrizes e o MATLAB, vamos passar para um exemplo mais interessante. A Figura 11.4 mostra um circuito, conhecido como escada R-2R, usado para converter uma entrada digital na forma de um número binário em uma tensão analógica correspondente de saída. Neste exemplo, vamos analisar uma escada R-2R que recebe um número de 2 bits como entrada, mas o circuito pode ser facilmente ampliado para um número maior de bits, como na escada R-4R, também mostrada na figura.

Na versão de 2 bits, as entradas do circuito são o bit mais significativo, MSB,[2] e o bit menos significativo, LSB.[3] Esses sinais digitais de entrada controlam pares de comutadores de tal forma que as tensões de nó V_{MSB} e V_{LSB} podem ser de 1 V ou de 0 V. O circuito escada processa essas tensões para produzir a tensão de saída, v_1. Uma das características interessantes deste circuito é o fato de que a tensão de saída não depende do valor da resistência R. As variáveis desconhecidas deste circuito são as correntes nos resistores, I_1, I_2, I_3 e I_4, e as tensões dos nós v_1 e v_2. As tensões dos nós de entrada, V_{MSB} e V_{LSB}, *não são* desconhecidas; podem ser apenas de 0 V ou de 1 V, dependendo da posição dos comutadores. Em nossa análise do circuito, portanto, vamos tratá-las como constantes. Como fizemos no caso do circuito simples do exemplo anterior, vamos escrever as equações do circuito aplicando a Lei das Correntes de Kirchhoff (LCK) e as Relações Constitutivas (RCs):

LCK no nó 1	$I_1 + I_2 = 0$
LKC no nó 2:	$-I_2 + I_3 + I_4 = 0$
RC para R_1:	$V_{\text{MSB}} - v_1 = 2RI_1$
RC para R_2:	$v_2 - v_1 = RI_2$
RC para R_3:	$V_{\text{LSB}} - v_2 = 2RI_4$
RC para R_4:	$0 - v_2 = 2RI_3$

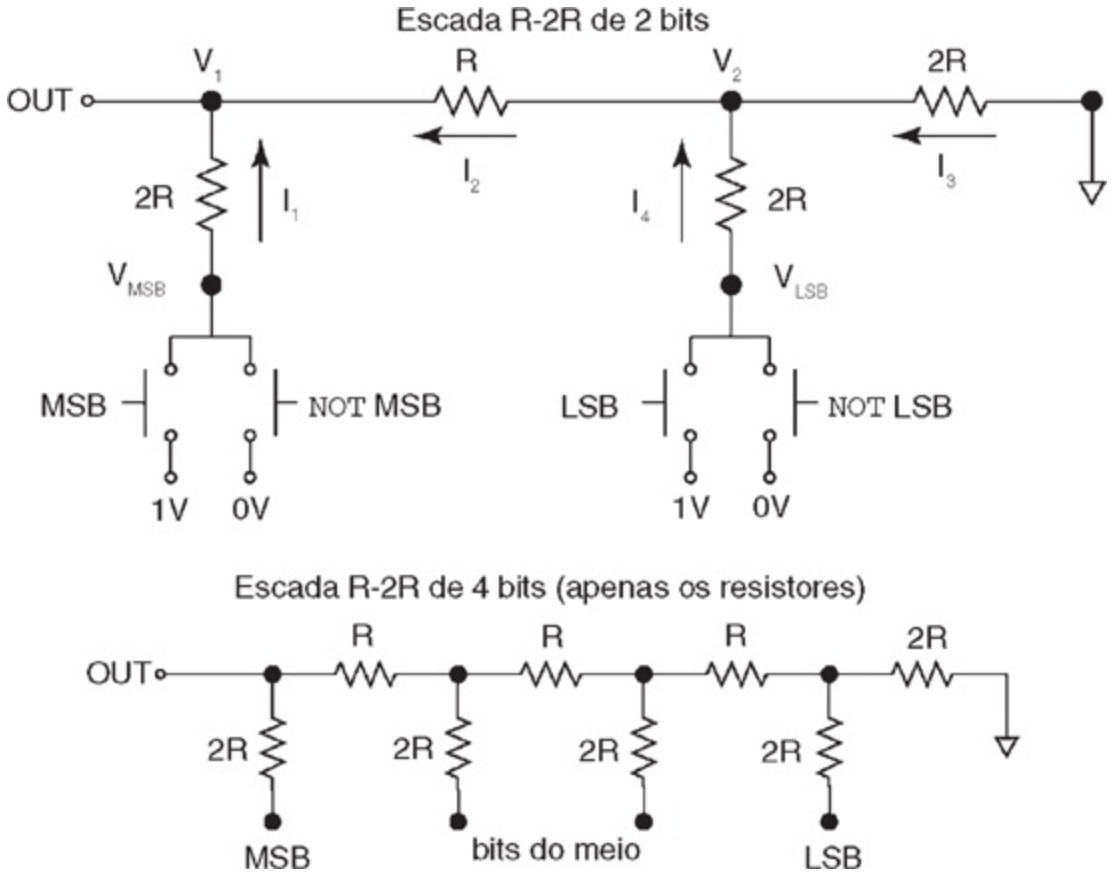


Figura 11.4 Circuito conversor analógico-digital tipo escada R-2R.

Como no exemplo anterior, vamos manipular as equações para deixar as variáveis do lado esquerdo, em uma ordem predeterminada, e os termos constantes do lado direito:

$$\begin{aligned} -I_2 + I_3 + I_4 &= 0 \\ I_1 + I_2 &= 0 \\ -2RI_1 - v_1 &= -V_{\text{MSB}} \\ -RI_2 - v_1 + v_2 &= 0 \\ -2RI_4 - v_2 &= -V_{\text{LSB}} \\ -2RI_3 - v_2 &= 0 \end{aligned}$$

Passando para a forma matricial, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2R & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -R & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2R & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2R & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -V_{\text{MSB}} \\ 0 \\ -V_{\text{MSB}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

A partir deste ponto, é trivial escrever um *script* do MATLAB, mostrado a seguir, para determinar os valores das tensões e correntes.

```
% Análise de um circuito escada R-2R de 2 bits
% Usando um sistema de equações da forma
AX = B, onde
% X = [I1 I2 I3 I4 V1 V2]'
% executada para 4 combinações de Vmsb e
Vlsb = 0 OU 1

Vmsb = 0; % tensão do bit mais significativo, volts
Vlsb = 0; % tensão do bit menos significativo, volts
R = 1000; % resistência, ohms

% matriz dos coeficientes
A = [

    1 1 0 0 0 0
    0 -1 1 1 0 0
    -2*R 0 0 0 -1 0
    0 -R 0 0 -1 1
    0 0 0 -2*R 0 -1
    0 0 -2*R 0 0 -1
];
% vetor coluna dos termos independentes
B = [0 0 -Vmsb 0 -Vlsb 0]';
% calcular as correntes e tensões
X = A\B;
```

```
% mostrar a tensão de saída
disp(' Vmsb')
disp (Vmsb)
disp(' Vlsb')
disp (Vlsb)
disp('tensão de saída')
disp(X(5))
```

Salvando o *script* com o nome de `conversor` e executando-o quatro vezes, mudando apenas as linhas referentes aos valores possíveis de V_{MSB} e V_{MLB}, obtemos os seguintes resultados:

```
>> conversor

    Vmsb

    0

    Vlsb

    0

tensão de saída

    0

>> conversor

    Vmsb

    0

    Vlsb

    1

tensão de saída

    0.2500

>> conversor

    Vmsb

    1

    Vlsb
```

```
     0
tensão de saída
     0.5000
>> conversor
     Vmsb
     1
     Vlsb
     1
tensão de saída
     0.7500
```

O que vemos é que, quando a entrada varia de 00 a 11 em binário, ou de 0 a 3 em decimal, a tensão de saída varia de 0 a 0,75 V em incrementos de 0,25 V. De forma geral, o incremento de tensão de uma escada R-2R com n bits de entrada é igual a $1/2^n$. Assim, quanto maior o número de bits, mais suavemente varia a tensão de saída com o valor dos bits de entrada. Isso é importante, por exemplo, para gerar um sinal de áudio de boa qualidade.

PROBLEMAS

1. **Quadrado Mágico**

   Considere uma matriz do MATLAB que é um quadrado mágico de lado n (n é um número inteiro escolhido pelo usuário; suponha que os valores permitidos de n vão de 5 a 10). Para gerar esta matriz, vamos fazer uso da função `magic` do MATLAB. Crie um programa que comece com os seguintes comandos:

   ```
   clear all
   format compact
   n = input(' Entre com o tamanho do quadrado mágico: ');
   ```

```
quadrado = magic(n);
```

Continue o programa escrevendo comandos de uma linha do MATLAB para mostrar os seguintes itens a partir da matriz (use como nome da variável a letra correspondente a cada item; para mostrar os resultados, não termine as linhas com ponto e vírgula).

(a) O quadrado mágico.
(b) O elemento da 4ª linha e 5ª coluna.
(c) A 3ª linha.
(d) A 5ª coluna, mostrada como um vetor linha.
(e) A matriz retangular formada pelas duas primeiras linhas e as três primeiras colunas.
(f) O valor do maior elemento.
(g) A diagonal principal (do canto superior esquerdo para o canto inferior direito).
(h) A diagonal secundária (do canto superior direito para o canto inferior esquerdo)
(i) O produto, elemento por elemento, da primeira coluna pela última.
(j) A soma de todos os elementos que pertencem simultaneamente a linhas e colunas ímpares.

2. Operações com Matrizes

Escreva um *script* do MATLAB que gere uma matriz 5×5 de números aleatórios entre 1 e 9 e mostre os seguintes itens a partir da matriz através de comandos de uma linha (use como nome da variável a letra correspondente a cada item; para mostrar os resultados, não termine as linhas com ponto e vírgula).

(a) A diagonal principal (do canto superior esquerdo para o canto inferior direito).
(b) A diagonal secundária (do canto superior direito para o canto

inferior esquerdo).

(c) O produto, elemento por elemento, da primeira pela última linha.

(d) A matriz retangular formada pelas quatro primeiras linhas e as duas primeiras colunas.

(e) A soma de todos os elementos que pertencem simultaneamente a linhas e colunas pares.

(f) O determinante da matriz. (Consulte o manual do MATLAB para descobrir a função que executa esta operação.)

(g) A matriz transposta.

(h) A matriz inversa.

(i) Os quadrados dos elementos da matriz.

(j) O quadrado da matriz.

3. Leitura e Escrita de Dados como Arquivos de Texto

O MATLAB oferece várias funções para ler e escrever dados como arquivos de texto. Um dos formatos mais comuns para armazenar dados na forma de texto é um *valor separado por vírgulas* ou arquivo CSV.[4] Como exemplo de um conjunto de dados, suponha que a tabela a seguir mostre a velocidade de um objeto em movimento, medida a intervalos regulares de tempo.

Tempo t (s)	Velocidade v (m/s)
5,0	3,4
10,0	4,1
15,0	6,0
20,0	8,8
25,0	11,9
30,0	12,6
35,0	16,1
40,0	16,8
45,0	20,2

(a) Abra um novo *script* do MATLAB e comece por definir uma matriz chamada `m1`, de duas colunas, que contenha os dados

da tabela.

(b) Consulte o manual do MATLAB para aprender a usar a função `csvwrite`. Acrescente ao *script* um comando para escrever a matriz `m1` em um arquivo CSV chamado `data.csv`.

(c) Use um editor de texto para abrir o arquivo `data.csv`. Descreva o que você vê. Mude a velocidade no instante $t = 30{,}0$ para 14 m/s e salve o arquivo.

(d) Use uma planilha eletrônica para abrir a versão modificada do arquivo `data.csv`. Descreva o que você vê. Mude a velocidade no instante $t = 40{,}0$ s para 18 m/s e salve o arquivo.

(e) Consulte o manual do MATLAB para aprender a usar a função `csvread`. Acrescente ao *script* um comando para ler os valores do arquivo `data.csv` para uma matriz chamada `m2` e mostrar na tela os valores da matriz.

(f) Dê um exemplo de situação na qual seria útil ler e escrever arquivos do MATLAB em arquivos CSV.

4. Criação de Tabelas com Operações Matriciais

Usando a função `meshgrid` e operações do MATLAB elemento por elemento, crie tabelas dos valores de z em função de x e y para as funções a seguir. Use o comando `disp` para alinhar corretamente as linhas e colunas de cada tabela.

(a) $z = x - 4y$
(b) $z = 2x^2 + y^2 - xy - 2$
(c) $z = 2x^3 - y^3 + y + 2$

5. Gráficos de Malha

Crie gráficos de malha para as funções de duas variáveis a seguir. Os valores de x e y devem variar de -5 a $+5$, com um incremento de 0,1. Use a função `meshgrid` para criar os pontos para os quais os valores de z são calculados.

(a) $z = x - 4y$
(b) $z = 2x^2 + y^2 - xy - 2$
(c) $z = 2x^3 - y^3 + y + 2$

6. Gráficos de Contorno

Crie gráficos de contorno para as funções de duas variáveis a seguir. Os valores de x e y devem variar de -5 a $+5$, com um incremento de 0,1. Use a função `meshgrid` para criar os pontos para os quais os valores de z são calculados. Use a função `clabel` para rotular as curvas de nível com os valores correspondentes de z.

(a) $z = 5x + 4y$
(b) $z = 2x^2 + 3(y - 1)^2 + 3$
(c) $z = x^3 - 2y^2 + 2x^2y - xy + 2$

7. Determinação do Valor Mínimo em um Gráfico de Malha

O *script* do MATLAB a seguir gera um gráfico de malha da função

$$z = 0{,}05x + 0{,}03y = 0{,}01x^2 + 0{,}03y^2 + 0{,}8$$

```
[x,y] = meshgrid(-5:.1:8);

z = .05*x + .03*y - .01*x.^2 - .03*y.^2 + .8;

mesh(x,y,z);

grid on

xlabel('x')

ylabel('y')
```

Rode o *script* e, observando o gráfico, estime o valor mínimo de z e as coordenadas (x, y) do ponto de mínimo.

8. Identificação de Pontos em um Gráfico de Contorno

O *script* do MATLAB a seguir gera um gráfico de contorno da função $z = 0{,}1x^2 + 0{,}5y$:

```
[x,y] = meshgrid(-10:.1:10);
```

```
z = (x.^2)/10 + y/2;

[C,h] = contour(x,y,z);

clabel(C,h);

xlabel('x')

ylabel('y')

grid on
```

Rode o *script* e observe as curvas de nível. Para cada um dos itens a seguir, estime o valor pedido e verifique matematicamente a resposta substituindo os valores dados na equação da função.

(a) Determine z para $x = 2$ e $y = 4$.

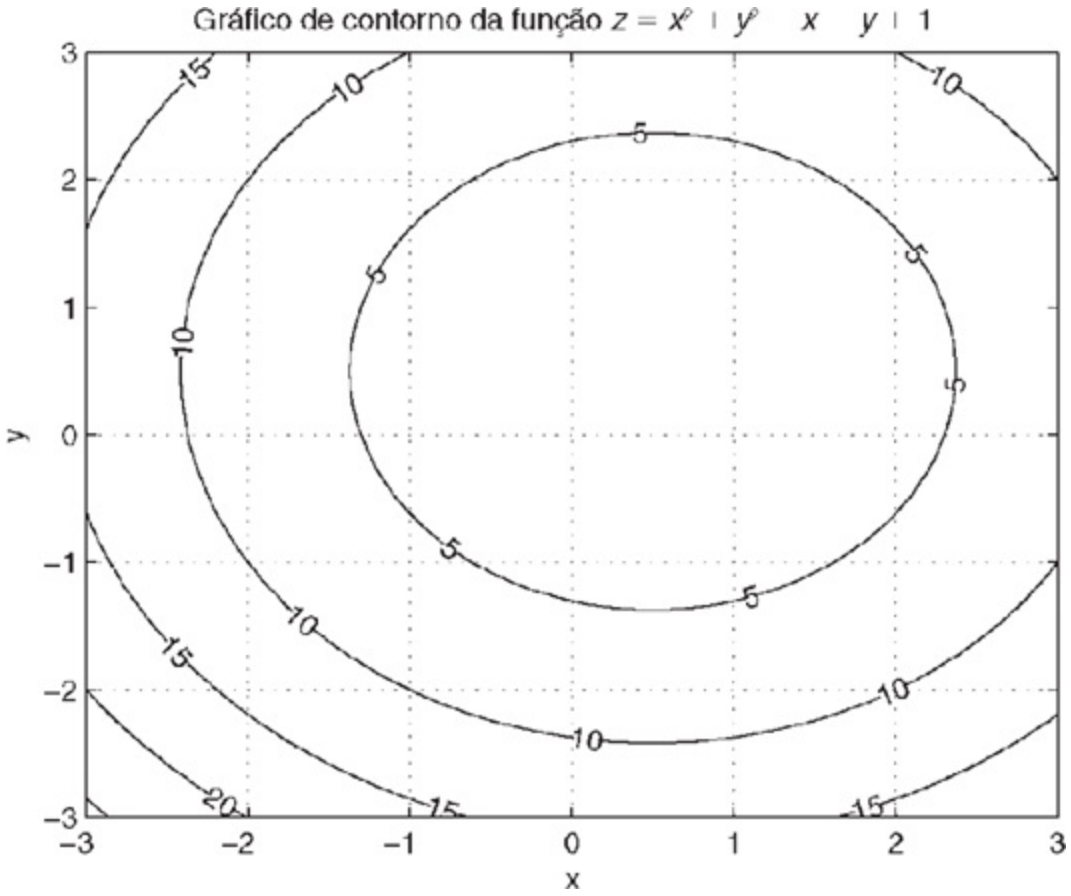
(b) Determine y para $z = 6$ e $x = 6$.

(c) Determine x para $z = 2$ e $y = -2$.

(d) Com $y = x$, determine o valor de x para que $z = 2$ (note que isso equivale a determinar as raízes de uma equação do segundo grau).

9. Determinação de Valores em um Gráfico de Contorno

A figura mostra um gráfico de contorno da função $z = x^2 y^2 - x - y + 1$.



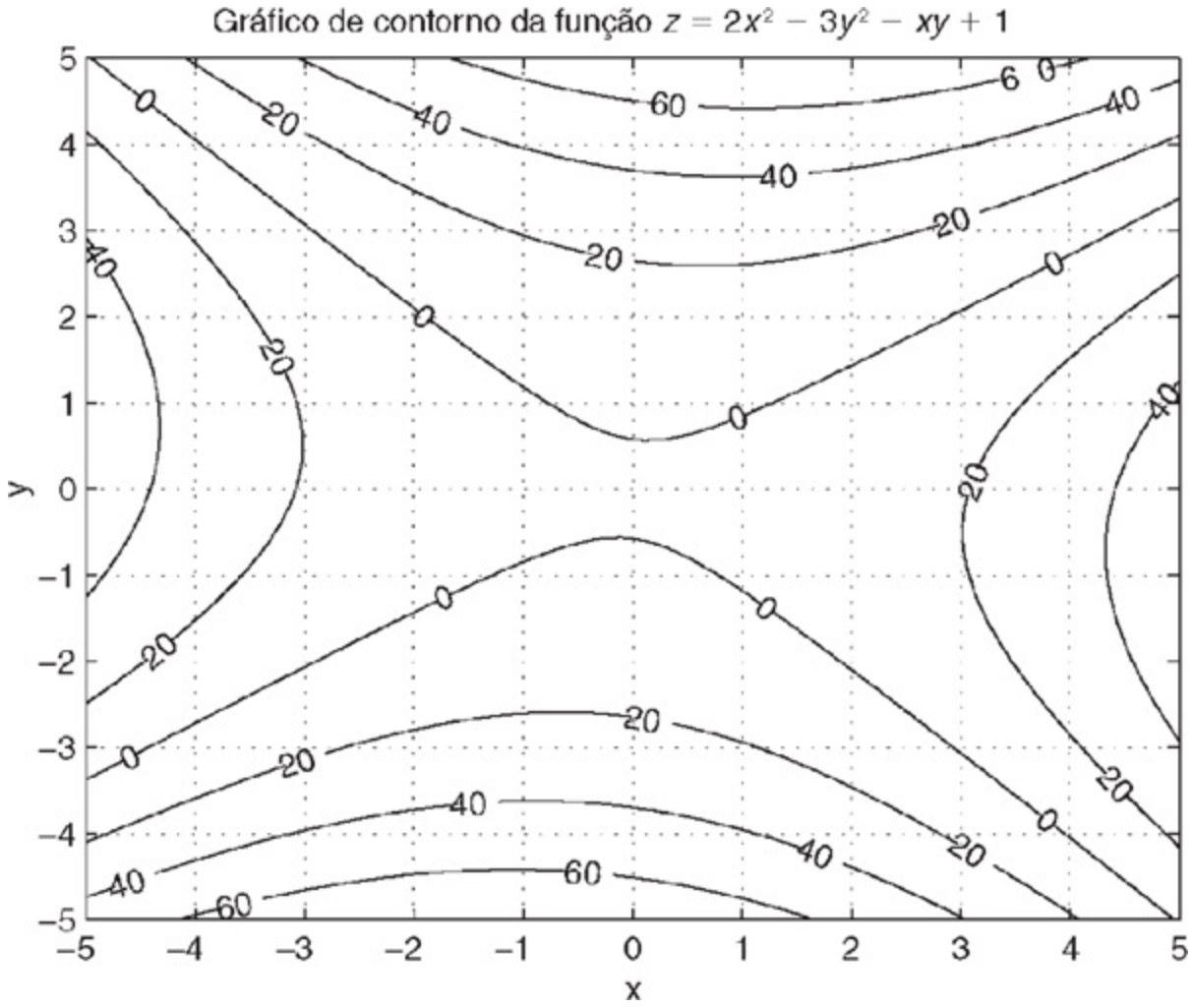
Use o gráfico para estimar:

(a) o valor de z para $x = 2$ e $y = 2$;
(b) o valor de y para $x = 1$ e $z = 5$;
(c) o valor de x para $y = 1{,}5$ e $z = 10$.

10. Valores e Restrições em um Gráfico de Contorno

A figura a seguir é um gráfico de contorno da equação

$$z = 2x^2 - 3y^2 - xy + 1$$



(a) Se $x = 4$, estime os valores de y para os quais $z = 20$.

(b) Se $y = 1$, estime os valores de x para os quais $z = 20$.

(c) Plote a restrição $y = 2x - 2$ no gráfico de contorno.

(d) Dada a restrição $y\ 2x - = 2$, estime as posições dos pontos de coordenadas (x, y) nos quais $z = -20$.

(e) Plote a restrição $x^2 + y^2 = 4$ no gráfico de contorno.

(f) Dada a restrição $x^2 + y^2 = 4$, estime as posições dos pontos de coordenadas (x, y) nos quais $z = 0$.

11. Uso de Gráficos para Determinar o Mínimo de uma Função

Considere a seguinte função:

$$f(x, y) = -(x^3 - 25x^2 - 7y^2 + 30x + 10y - 40)/100$$

(a) Escreva um *script* do MATLAB para gerar um gráfico de malha de *f*em função de x e y no intervalo $-10 \leq x \leq 25$ e $-25 \leq y \leq 25$.

(b) Escreva um *script* do MATLAB para gerar um gráfico de contorno de f em função de x e y no intervalo $-10 \leq x \leq 25$ e $-25 \leq y \leq 25$.

(c) A partir dos gráficos, estime o valor mínimo de f no intervalo $-10 \leq x \leq 25$ e $-25 \leq y \leq 25$.

12. Juros Compostos

A fórmula de juros compostos mostrada a seguir é usada para determinar o valor futuro de uma aplicação a partir da taxa de juros e do prazo da aplicação (supondo que os juros são capitalizados uma vez por ano):

$$F = D(1 + r)^t$$

onde

F é o valor futuro da aplicação

D é a aplicação inicial

r é a taxa anual de juros (na forma de fração, $0 < r < 1$)

t é o prazo da aplicação em anos.

Um casal está interessado em investir R$ 40.000,00. Eles querem saber qual será o valor futuro da aplicação, dependendo da taxa de juros e do tempo durante o qual o dinheiro permanecerá aplicado, com o objetivo de maximizar o valor futuro. Escreva um *script* de MATLAB para plotar curvas de nível que mostrem o que esperar de um investimento a uma taxa de juros entre 4% e 6% ao ano (em incrementos de 0,1%), por um prazo de 5 a 10 anos.

13. Determinação do Ponto de Interseção de Duas Retas

Duas retas são descritas pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= -12 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}$$

Escreva um programa do MATLAB para resolver o sistema de equações resultante e plotar as duas retas. Use um intervalo apropriado de valores de x e y para que as duas retas e o ponto de interseção sejam visíveis. Depois de plotar as retas, use um zoom para verificar se o ponto de interseção está no lugar previsto.

14. Solução de um Sistema de Quatro Equações com Quatro Incógnitas

Considere o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} 16a + 32b + 33c + 13d &= 91 \\ 5a + 11b + 10c + 8d &= 16 \\ 9a + 7b + 6c + 12d &= 5 \\ 34a + 14b + 15c + d &= 43 \end{aligned}$$

Escreva um *script* do MATLAB para determinar os valores de a, b, c e d.

15. Solução de um Sistema de Cinco Equações com Cinco Incógnitas

Escreva um *script* do MATLAB para resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} 2{,}1a - 3{,}4b + 6{,}8c + 7{,}3d + 4{,}2e &= 7{,}1 \\ 5a + 2{,}3b - 5{,}1d &= -3{,}2 \\ 8{,}3a - b + 4{,}8c + 2{,}9e &= 4{,}2 \\ 3b - 5{,}5d - 8{,}3e &= -5{,}7 \\ -2{,}7a + 2{,}5c - 7{,}1d + 4{,}5e &= -3{,}1 \end{aligned}$$

16. Determinação de Preços

Considere as seguintes afirmações a respeito dos preços de frutas

e legumes:

- Três maçãs, uma banana e quatro cenouras custam R$ 3,80.
- Uma maçã e duas cenouras custam dois centavos a menos que três bananas.
- Duas bananas e três cenouras custam o mesmo que quatro maçãs.

Escreva um *script* do MATLAB que use operações matriciais para determinar o preço de uma maçã, uma banana e uma cenoura.

[1]Do inglês *digital-to-analog converter*. (N.T.)

[2]Do inglês *most significant bit*. (N.T.)

[3]Do inglês *least significant bit*. (N.T.)

[4]Do inglês *comma-separated value*. (N.T.)

CAPÍTULO 12

Introdução a Algoritmos e Programação em MATLAB

OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- usar fluxogramas e pseudocódigo para descrever algoritmos;
- usar funções do MATLAB para dividir programas em segmentos de tamanho razoável;
- usar comandos IF-THEN-ELSE para implementar ramificações condicionais;
- usar os comandos FOR e WHILE para produzir loops;
- usar o debugger do MATLAB para acompanhar a execução de programas e localizar erros.

12.1 ALGORITMOS, FLUXOGRAMAS E PSEUDOCÓDIGO

12.1.1 O que É um Algoritmo?

Como vimos em capítulos anteriores, é possível formular soluções complexas para problemas complexos dividindo o problema em subproblemas e formando uma cadeia de soluções mais simples. Esta capacidade de descobrir novos caminhos é fundamental quando um problema é encontrado pela primeira vez. Ao encontrar novamente o

mesmo problema, porém, ou um problema semelhante, não há necessidade de refazer todos os passos para chegar à solução. Em vez disso, é muito mais fácil seguir a trilha já desbravada por você mesmo ou por outra pessoa. Considere, por exemplo, o problema de fazer um pão. Alguém já resolveu o problema de usar uma cultura de fermento vivo para produzir bolhas de gás e assim tornar o pão mais leve, além de estabelecer o tempo e temperatura ideais para assá-lo, de modo que você não tem que passar por tudo isso de novo; basta seguir a receita. O tipo de conhecimento usado para escrever uma receita é chamado de conhecimento *algorítmico*. Um *algoritmo* é uma lista detalhada, sequencial, de instruções para resolver um problema. O nome vem de Muhammad ibn Musa Al-Khawarizmi (780-850), o mesmo matemático persa que introduziu os números arábicos e os cálculos decimais no ocidente. Assim como é preciso talento e paciência para ensinar um motorista como chegar a um destino, é preciso talento e paciência para escrever um algoritmo eficiente e, mais importante, que leve ao resultado correto.

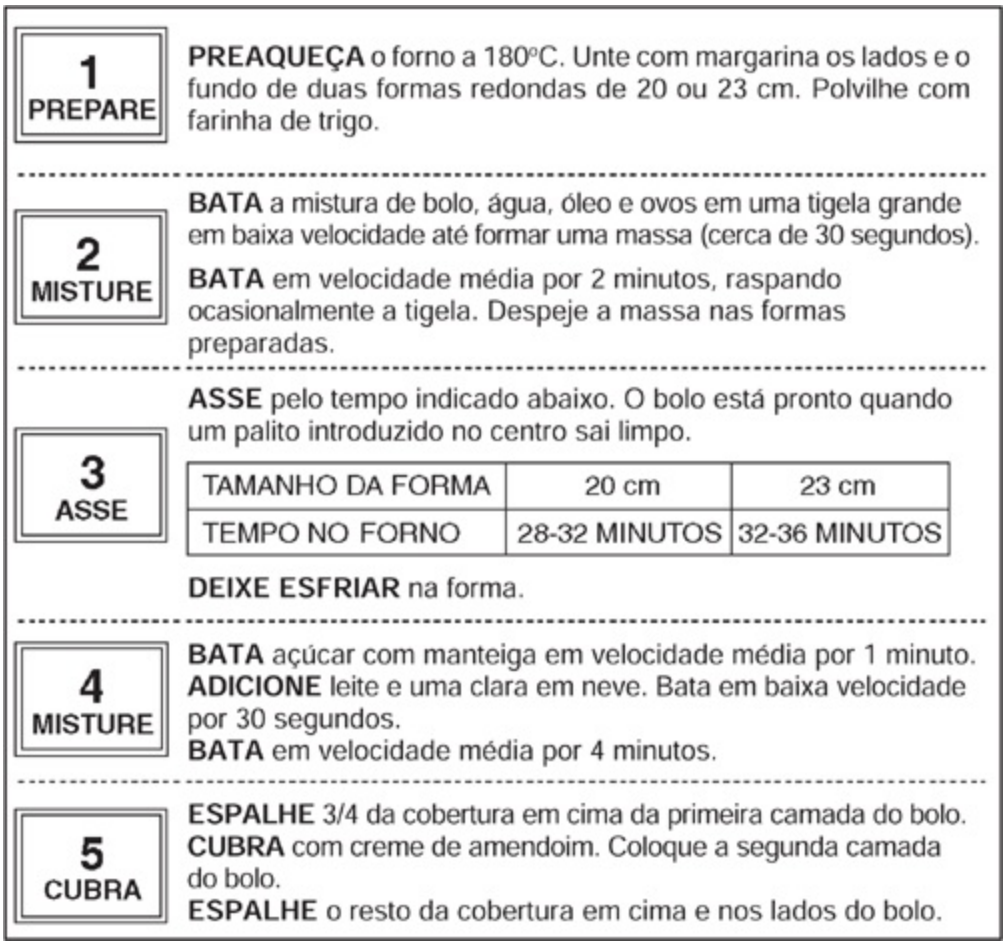


Figura 12.1 Instruções para fazer um bolo, tiradas da caixa.

Existem duas formas comuns de descrever algoritmos. A primeira é uma forma gráfica, usando diagramas conhecidos como *fluxogramas*. A segunda é uma forma descritiva, usando uma linguagem precisa chamada *pseudocódigo*. Para ilustrar os aspectos básicos das duas abordagens, considere o exemplo da descrição do processo de fazer um bolo. A Figura 12.1 mostra as instruções que podem ser encontradas na caixa de uma mistura de bolo, neste caso um bolo de chocolate e amendoim [Dun05]. Antes de discutir a notação dos fluxogramas e do pseudocódigo, vamos examinar algumas das propriedades das instruções para fazer este bolo.

- O processo é uma sequência de cinco passos principais: `PREPARAR`, `MISTURAR A MASSA`, `ASSAR`, `MISTURAR A COBERTURA`,

APLICAR A COBERTURA.

- Cada um desses passos principais é formado por uma série de passos secundários.
- O passo de ASSAR pode ser executado de duas formas diferentes, dependendo do tamanho da forma.

12.1.2 Descrição de Sequências Simples de Operações

O fluxograma é um gráfico orientado, no qual cada nó corresponde a um passo de um processo e as setas indicam as ligações entre os passos. A Figura 12.2 mostra um fluxograma dos cinco passos principais do processo de fazer o bolo. Por convenção, os passos são representados como retângulos. O nome do processo é indicado em um retângulo com os vértices arredondados no alto do fluxograma. Por convenção, vamos sempre começar o nome de um processo com a palavra “Para”. No caso, o nome do processo é “Para fazer um bolo”.

O pseudocódigo é a descrição de um processo que utiliza um vocabulário restrito e um formato bem definido para evitar ambiguidades. O nome vem do fato de que muitos programadores usam o nome “código” para se referir às instruções de um programa de computador. Enquanto o código se destina a ser interpretado pelos computadores, o pseudocódigo se destina a ser interpretado por pessoas. Para um processo simples como o de fazer um bolo, que consiste em uma sequência linear de passos, sem alternativas, a descrição em pseudocódigo do processo principal não é particularmente interessante. Cada passo do processo é simplesmente descrito em uma linha separada:

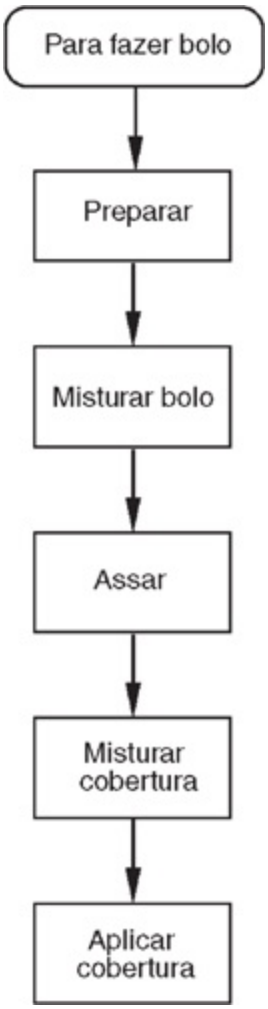


Figura 12.2 Fluxograma do processo de fazer um bolo.

```
para fazer um bolo:
preparar
misturar massa
assar
misturar cobertura
aplicar cobertura
```

Se a descrição de um passo é longa demais para caber em uma linha, a convenção é continuar a descrição na linha seguinte, com uma indentação:

```
execute o primeiro passo
```

```
execute o segundo passo, que é muito mais complicado que o
  primeiro
execute o terceiro passo
```

12.1.3 Sub-Rotinas

Na linguagem dos algoritmos, o termo para uma sequência detalhada que está incluída em um passo mais geral é *sub-rotina*. O termo usado para o ato de passar do processo principal para uma sub-rotina é *chamar uma sub-rotina*. Cada um dos cinco passos do processo principal para fazer um bolo chama uma sub-rotina que implementa uma sequência de passos mais detalhados. A Figura 12.3 mostra o fluxograma do processo principal e os fluxogramas de três sub-rotinas, “Para preparar”, “Para misturar a massa” e “Para misturar a cobertura”. A descrição das sub-rotinas em pseudocódigo, que não será mostrada, é simplesmente uma lista dos passos a serem seguidos, um por linha. A sub-rotina “Para assar”, que envolve uma decisão, será discutida mais tarde.

As sub-rotinas não mudam os passos de um processo, mas simplesmente dividem um processo complexo em partes menores e as organizam hierarquicamente para tornar o processo mais fácil de ser gerenciado. As sub-rotinas proporcionam um mecanismo de abstração a um processo que permite ao projetista ignorar detalhes menores e se preocupar apenas com o conjunto. Este é um conceito que as pessoas que planejaram a caixa da mistura de bolo compreendem muito bem. Poderiam ter usado uma versão “rasa” das instruções, sem hierarquia, como a da Figura 12.4. Os passos envolvidos na preparação do bolo seriam exatamente os mesmos, mas o processo parece mais complicado neste caso, já que são mencionados 11 passos, enquanto na lista hierárquica da Figura 12.1 aparecem apenas 5. Em termos da diagramação do rótulo da caixa e da capacidade do usuário de digerir as informações, o processo *é* mais complicado. Isso pode fazer diferença na hora de o consumidor (que, afinal de contas, está

comprando uma caixa de *mistura de bolo* para simplificar o processo de fazer um bolo) escolher a marca. Um algoritmo sem sub-rotinas é como um livro sem capítulos: difícil de ler e folhear. Como regra geral, lembre-se de que as pessoas conseguem manter apenas de 5 a 9 conceitos na memória de curto prazo, de modo que, se o processo tem um número de passos maior que 7, provavelmente é melhor dividi-lo em sub-rotinas. Isso também se aplica à divisão das sub-rotinas em sub-rotinas ainda menores.

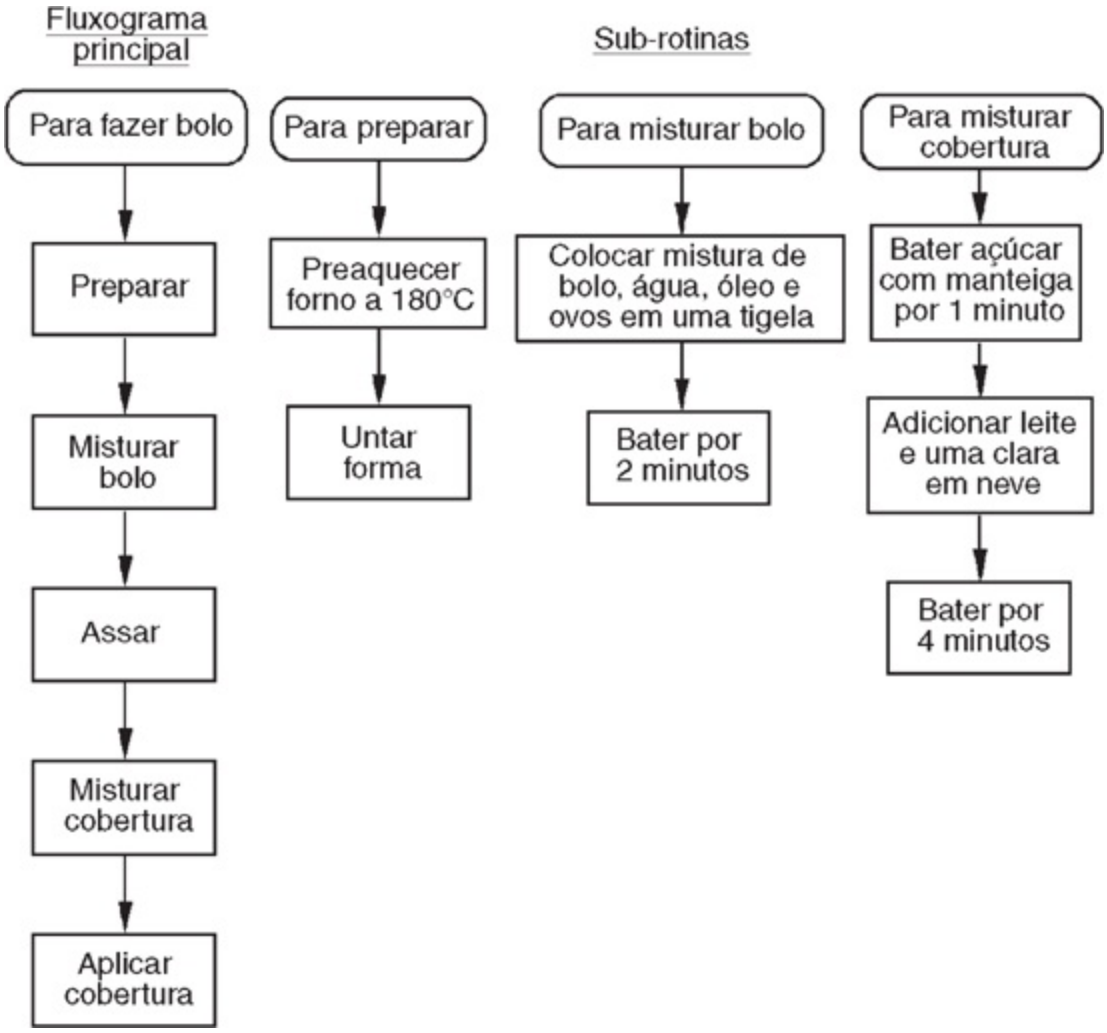


Figura 12.3 Processo principal e sub-rotinas para fazer um bolo.

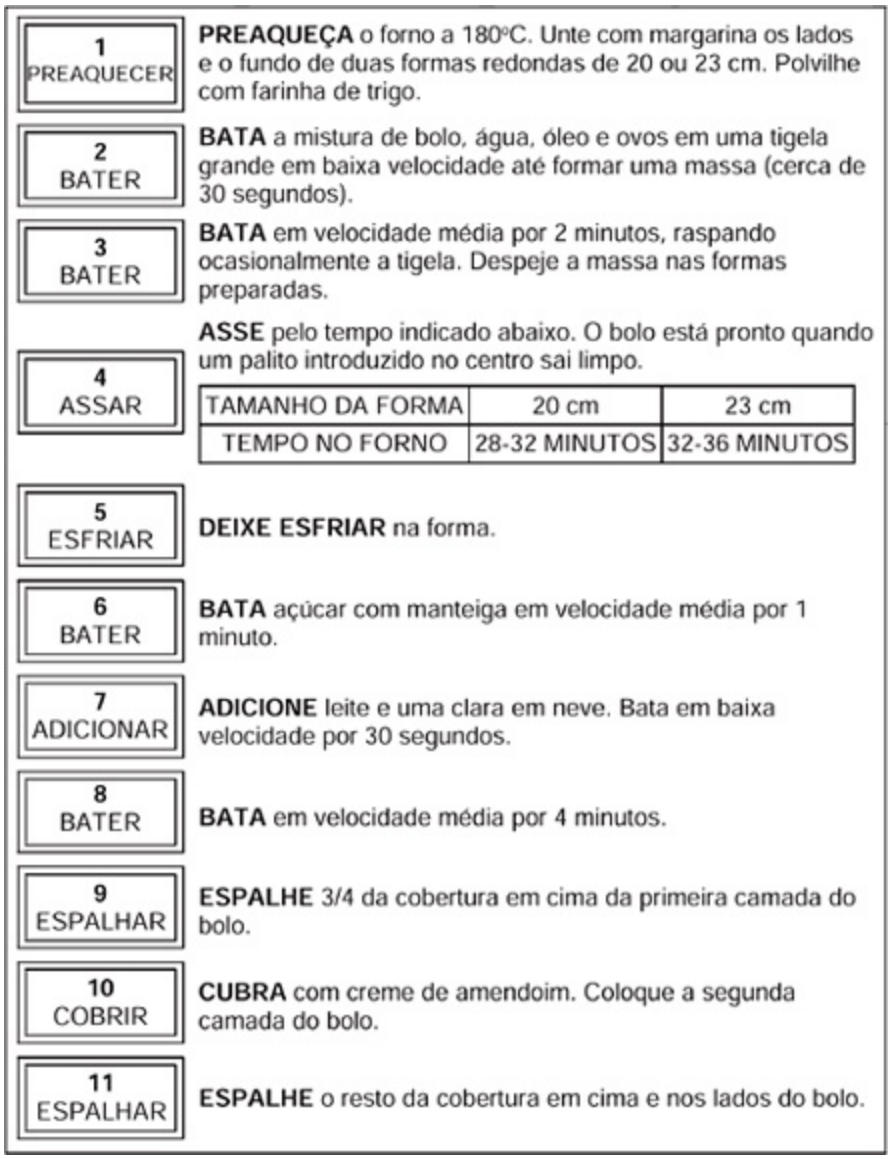


Figura 12.4 Uma versão “rasa” das instruções para fazer um bolo, sem uma descrição hierárquica do processo.

12.1.4 Ramificações Condicionais

Na linguagem dos algoritmos, uma escolha entre diferentes possibilidades é chamada de *ramificação condicional,* ou simplesmente *ramificação*. No exemplo da preparação de um bolo, a sub-rotina “Para assar” contém uma ramificação para o tempo que a mistura deve permanecer no forno, que depende do tamanho da forma. Este ramo aparece no fluxograma da sub-rotina “Para assar”, mostrado na

Figura 12.5. Toda ramificação de um fluxograma tem duas partes. A primeira parte é um passo especial de decisão no ponto onde começa a ramificação. Este passo testa a condição que determina a linha de ação a ser seguida; no caso que estamos examinando, a condição é o tamanho da forma. Como mostra a Figura 12.5, os passos de decisão são representados por losangos nos fluxogramas, para distingui-los dos outros passos. A segunda parte são duas ou mais setas no passo de decisão, que levam aos passos seguintes, e rotuladas de acordo com o valor da condição associado a cada ramo. Neste exemplo, os dois valores possíveis da condição são “20 cm” e “23 cm”. Depois da ramificação, os caminhos separados podem continuar independentes por vários passos, ou podem se unir novamente após apenas um passo. Neste caso, os dois ramos se mantêm separados apenas em um passo do processo, o passo em que a mistura permanece no forno, e voltam a se unir para o passo de resfriamento.

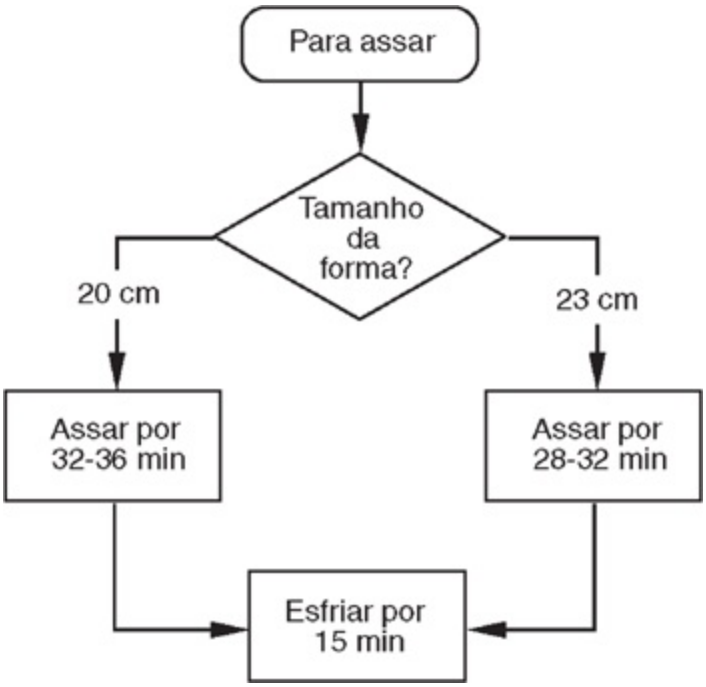


Figura 12.5 Representação de uma ramificação em um fluxograma.

Na descrição de uma sequência simples de operações, como os passos principais para fazer um bolo, a representação em

pseudocódigo não é muito diferente da linguagem comum. Na descrição de uma ramificação, porém, o pseudocódigo começa a adquirir uma forma diferente da linguagem natural, do tipo que usamos no dia a dia. Na linguagem natural, existem muitas formas de descrever a ramificação mostrada na Figura 12.5. Aqui está uma:

> Assar o bolo durante 32 a 36 minutos ou durante 28 a 32 minutos se estiver usando uma forma de 20 ou de 23 centímetros, respectivamente.

Pode ser necessário ler o texto mais de uma vez para compreender que equivale ao fluxograma da Figura 12.5. A frase é longa e não é fácil identificar a condição de ramificação. Para que um pseudocódigo seja eficaz, toda afirmação seve ser concisa e livre de ambiguidades. Conseguimos isso limitando as expressões de controle do processo, como as que estão presentes nos passos de decisão, a um vocabulário restrito de *palavras-chave*. Nas ramificações, vamos adotar a mesma construção que usamos na Seção 2.1.3 para gerar regras de produção: um par condição-ação, usando as palavras-chave IF e THEN, da forma

```
IF condição THEN execute ação
```

Usando esta construção, o pseudocódigo da sub-rotina “Para assar” se torna

```
para assar:
IF o tamanho da forma é de 20 centímetros
  THEN asse por 32 a 36 minutos
IF o tamanho da forma é de 23 centímetros
  THEN asse por 28 a 32 minutos
```

Esta forma de descrição é muito mais clara que a versão em linguagem natural mostrada anteriormente.

Tanto o fluxograma como a versão em pseudocódigo da sub-rotina “Para assar” fornecem instruções claras a respeito do que é preciso fazer para assar um bolo em uma forma de 20 ou 23 centímetros. O

que fazer, porém, se a forma for de outro tamanho qualquer? As instruções da caixa não mencionam essa possibilidade, possivelmente porque o bolo não assaria bem em uma forma de tamanho diferente, e a melhor providência seria parar e trocar a forma. Na presença dessa nova possibilidade, precisamos introduzir uma terceira opção em nossas descrições do algoritmo, tanto no fluxograma como no pseudocódigo.

A Figura 12.6 mostra duas versões de um fluxograma. Nessas versões foi incluída uma ramificação adicional para o caso em que nenhuma das outras ramificações é escolhida. Na versão da esquerda, definimos explicitamente o valor da condição para esta ramificação em termos dos valores das outras condições: “nem 20 centímetros nem 23 centímetros”. Esta forma, porém, não é prática. Uma abordagem mais concisa consiste em usar uma nova palavra-chave, ELSE, para designar a condição “caso nenhuma das outras condições seja satisfeita”. A presença da opção ELSE em uma ramificação condicional torna a definição da sub-rotina completa e isenta de ambiguidades, pois agora existe uma ação claramente especificada para formas de qualquer tamanho.

Podemos também acrescentar a opção ELSE a uma declaração do tipo IF-THEN na representação em pseudocódigo, para criar uma produção da forma

```
IF condição THEN execute ação ELSE execute
  ação alternativa
```

Antes de escrever o pseudocódigo da sub-rotina “Para assar” com três opções, vamos considerar um exemplo mais simples, com apenas duas opções. Suponhamos que as instruções da caixa contivessem apenas o tempo durante o qual o bolo deve permanecer no forno em uma forma de 20 centímetros. Se a forma fosse de outro tamanho qualquer, seria necessário interromper o processo e trocar a forma. O pseudocódigo para esta situação, usando a opção ELSE, seria o

seguinte (observe que partimos a declaração IF-THEN-ELSE em duas linhas e usamos uma indentação na segunda linha, começando com a palavra ELSE, para mostrar que se trata de uma continuação da primeira):

```
para assar:
IF o tamanho da forma é de 20 centímetros
  THEN asse por 32 a 36 minutos
   ELSE pare e troque a forma
```

Suponha agora que seja necessário incluir um terceiro caso no algoritmo, como o de uma forma de 23 centímetros. Como ficará a descrição em pseudocódigo? Uma declaração tipo IF-THEN-ELSE pode testar apenas *uma* condição, mas precisamos de uma produção que permita testar *duas* condições. Em outras palavras, a declaração IF-THEN-ELSE cria apenas dois ramos, mas temos que criar três ramos. Uma solução é encadear duas declarações IF-THEN-ELSE da seguinte forma:

```
para assar:
IF o tamanho da forma é de 20 centímetros
  THEN asse por 32 a 36 minutos
ELSE IF o tamanho da forma é de 23 centímetros
  THEN asse por 28 a 32 minutos
ELSE pare e troque a forma
```

Embora esta construção tenha exatamente o mesmo efeito que uma ramificação com três opções, note que um fluxograma que a represente literalmente terá dois passos de decisão em vez de apenas um. A Figura 12.7 mostra o fluxograma resultante. Em geral, porém, vamos usar a convenção de representar opções múltiplas em fluxogramas usando um único passo de decisão com várias opções, que é mais fácil de interpretar, mesmo que a implementação em pseudocódigo use declarações IF-THEN-ELSE encadeadas. No caso do

pseudocódigo, para melhorar a legibilidade das opções múltiplas, a convenção mais comum é *não usar* a indentação. Assim, o pseudocódigo do algoritmo "Para assar" seria escrito da seguinte forma:

```
para assar:
IF o tamanho da forma é de 20 centímetros
  THEN asse por 32 a 36 minutos
ELSE IF o tamanho da forma é de 23 centímetros
  THEN asse por 28 a 32 minutos
ELSE pare e troque a forma
```

Quando as instruções são escritas desta forma, tudo fica mais simples.

Um ponto sutil, que precisa ser levado em consideração, é a ordem em que os testes das ramificações são executados, que, em certos casos, pode ser importante. Considere, por exemplo, o pseudocódigo de um algoritmo "Para acordar na hora" de acordo com o dia da semana. Uma descrição do algoritmo em linguagem natural poderia ser:

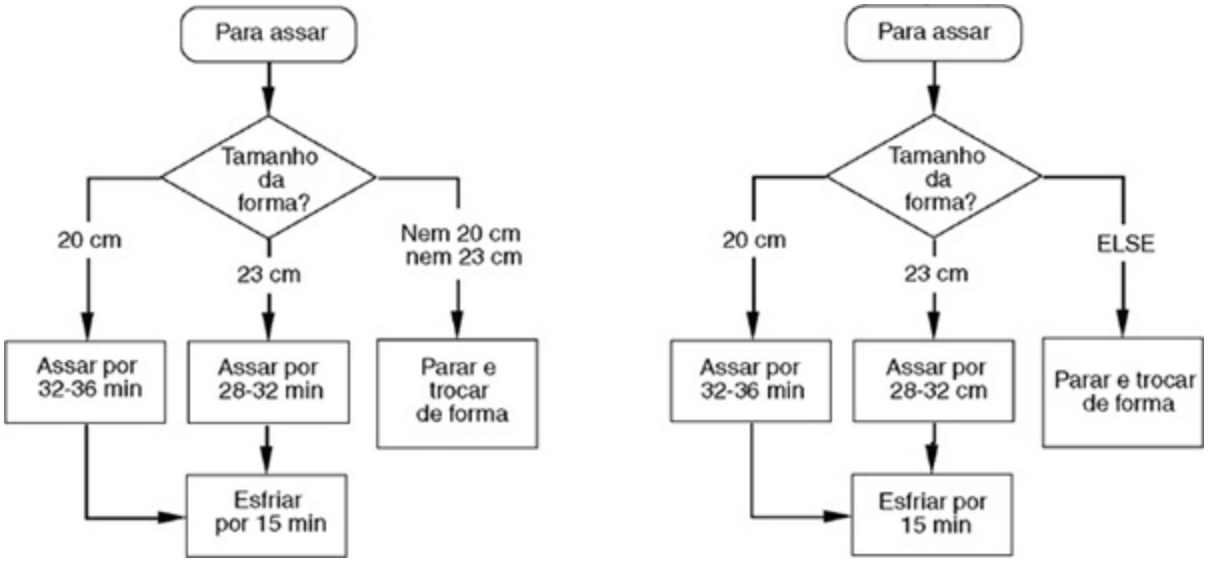


Figura 12.6 Uso da condição ELSE em uma ramificação.

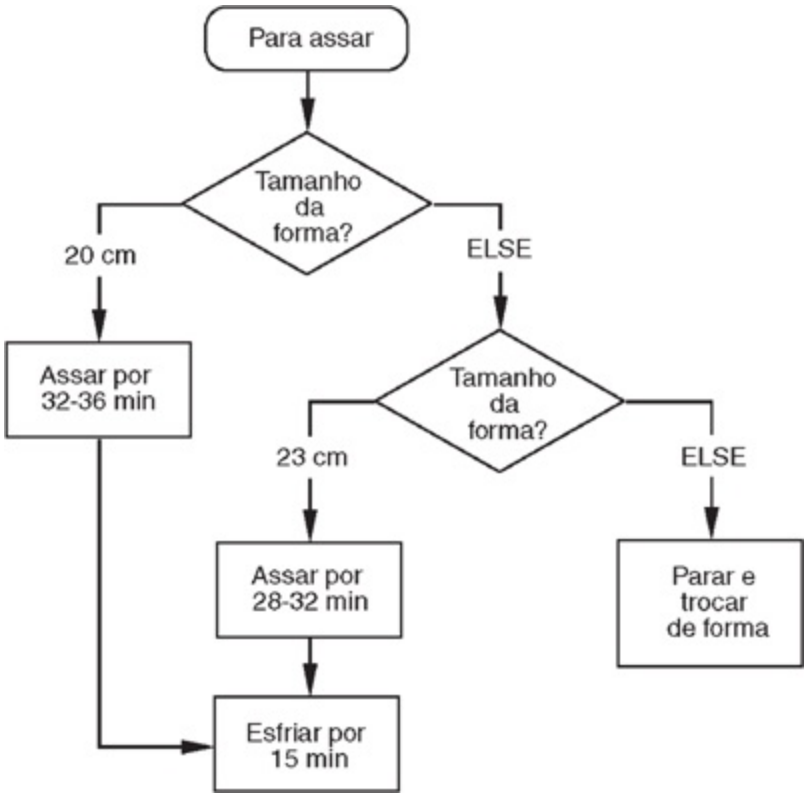


Figura 12.7 Uma ramificação com três opções obtida encadeando duas ramificações com duas opções.

> Na segunda-feira, ponha o despertador para 6 horas. Nos outros dias úteis, ponha o despertador para 7 horas. Em todos os outros dias, deixe o despertador desligado.

Aqui está uma descrição correta do algoritmo em pseudocódigo:

```
para acordar na hora:
IF é segunda-feira THEN ponha o despertador
  para 6 horas
ELSE IF é um dia útil THEN ponha o despertador
  para 7 horas
ELSE deixe o despertador desligado
```

Veja o que acontece se a ordem das duas primeiras partes da declaração for trocada:

```
para acordar na hora:
```

```
IF é um dia útil THEN ponha o despertador
 para 7 horas
ELSE IF é segunda-feira THEN ponha o
 despertador para 6 horas
ELSE deixe o despertador desligado
```

De acordo com as instruções deste algoritmo, o despertador tocará às 7 horas em *todos* os dias úteis da semana, incluindo a segunda-feira. A ação que se segue a ELSE é executada *apenas* se as condições dos outros ramos não forem satisfeitas. Como a condição da primeira linha foi satisfeita para segunda-feira, a segunda linha não será executada e você dormirá demais na segunda-feira. Generalizando, declarações da forma representam um conjunto de $n + 1$ ações mutuamente excludentes, constituídas por n escolhas explícitas mais uma ação default, definidas de tal forma que em qualquer caso possível uma e apenas uma condição seja satisfeita e uma e apenas uma ação seja executada.

```
IF condição 1 THEN ação 1
ELSE IF condição 2 THEN ação 2
   …
ELSE IF condição 2 THEN ação n
ELSE ação default
```

Como exemplo final, vamos examinar o que acontece se deixarmos as duas primeiras partes da declaração na ordem trocada e removermos a palavra-chave ELSE da segunda linha:

```
para acordar na hora:
IF é um dia útil THEN ponha o despertador
 para 7 horas
IF é segunda-feira ponha o despertador para
 6 horas
ELSE deixe o despertador desligado
```

Nesta versão do algoritmo, o despertador é ajustado para 7 horas na segunda-feira e depois é *reajustado* para 6 horas. O método funciona, mas à custa de um trabalho adicional. Se você achar esta abordagem confusa, não se surpreenda, pois não se trata de uma implementação elegante do algoritmo. Sempre que você escrever um algoritmo em pseudocódigo, seu objetivo deve ser especificar o algoritmo da forma mais clara possível, evitando combinações de declarações que tornem o algoritmo difícil de acompanhar ou que levem a resultados imprevistos.

12.1.5 Loops

Muitos processos envolvem algum tipo de repetição. Uma parte de um algoritmo no qual uma série de declarações é executada várias vezes é chamada de *loop*. Como exemplo de um processo com loop, considere um algoritmo para contar o número de moedas que você tem no bolso. Uma descrição em linguagem natural do algoritmo para executar esta tarefa seria a seguinte:

> Comece com uma contagem de zero. Remova as moedas do bolso, uma por uma, e aumente a contagem de uma unidade cada vez que remover uma moeda. Quando não restarem mais moedas, a contagem será igual ao número total de moedas.

A Figura 12.8 mostra um fluxograma deste algoritmo. O loop do algoritmo é mostrado graficamente como um "percurso fechado" do fluxograma, no qual a seta que sai de um dos passos direciona o fluxo "para trás", ou seja, para um passo anterior. Para que o algoritmo chegue ao final, é preciso que um dos passos do loop seja uma ramificação condicional com um ramo para fora do loop; se não for assim, o loop será repetido indefinidamente, uma situação indesejável conhecida como *loop infinito*. No caso que estamos examinando, a ramificação condicional é o primeiro passo do loop e é usada para testar se ainda existem moedas no seu bolso. Se o valor da condição é "sim", então uma moeda é removida, o contador é incrementado de

uma unidade e o loop é repetido; se o valor da condição é “não”, o valor do contador é exibido como resultado final.

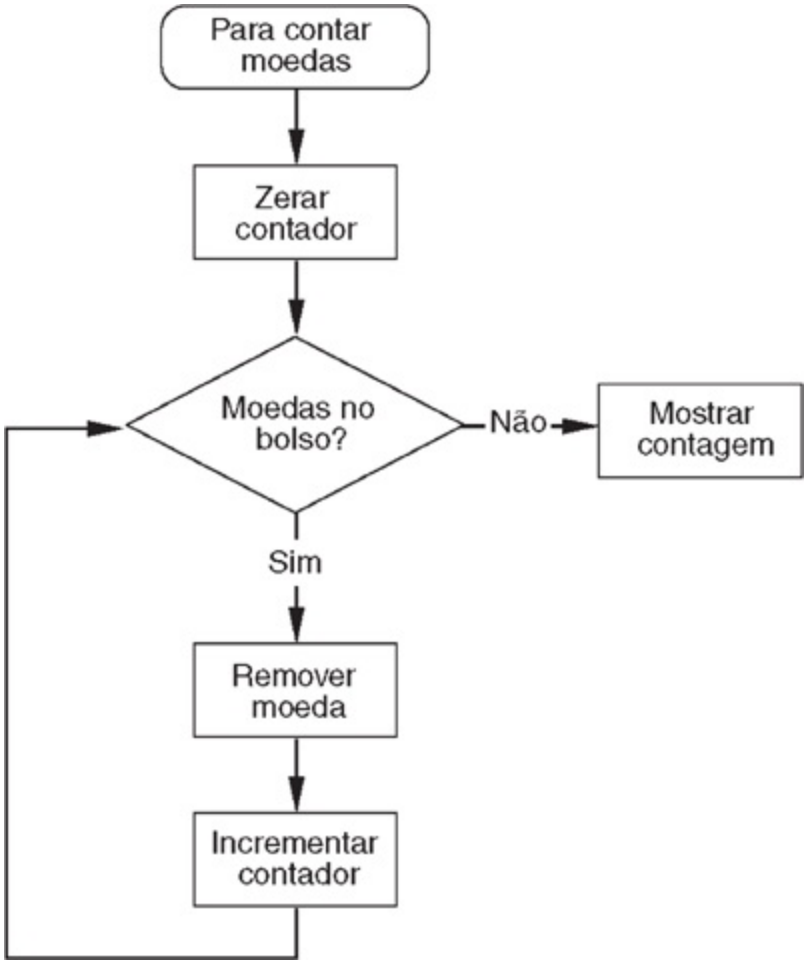


Figura 12.8 Representação de um loop em um fluxograma para contar o número de moedas que você tem no bolso.

Para desenhar um fluxograma do loop, não é necessário introduzir novos conceitos; o loop pode ser construído apenas com passos e uma ramificação condicional. Tecnicamente, o mesmo pode ser feito em pseudocódigo se usarmos uma técnica chamada *recursão*, na qual uma sub-rotina chama a si própria. A recursão é uma ferramenta poderosa (na próxima seção será apresentado um exemplo simples do seu uso), mas muitas pessoas têm dificuldade para entendê-la. Na maioria das situações, a abordagem mais intuitiva consiste em descrever o loop explicitamente, o que requer a introdução de novos conceitos e

palavras-chave em nosso repertório. Existem várias formas de fazer isso, e vamos considerar três opções nos parágrafos a seguir.

A primeira abordagem consiste em introduzir um comando que permite especificar diretamente qual é o passo seguinte a ser executado. Esta abordagem é normalmente usada nos manuais de assembly. A versão seguinte do algoritmo demonstra essa abordagem:

```
para contar moedas:
passo 1: zerar contador
passo 2: IF ainda existem moedas no bolso
            THEN GOTO passo 3
             ELSE GOTO passo 5
passo 3: remover uma moeda do bolso
passo 4: acrescentar uma unidade ao contador,
            GOTO passo 2
passo 5: mostrar o valor do contador
```

Para esta versão do algoritmo, introduzimos duas novidades. Em primeiro lugar, rotulamos os comandos usando nomes como “passo 1”, “passo 2”, etc. Em segundo lugar, definimos uma palavra-chave, GOTO, que indica qual é o passo seguinte a ser executado. Esta abordagem constitui uma tradução bastante fiel do fluxograma, na qual uma combinação de comandos GOTO e rótulos é usada para substituir as setas.

Embora esta abordagem seja simples, apresenta algumas desvantagens. Uma dessas desvantagens é que qualquer modificação do algoritmo é trabalhosa e sujeita a erros. Se por alguma razão houver necessidade de acrescentar um passo no meio do algoritmo, será preciso mudar não só os números de alguns passos, mas também os números de destino de alguns comandos GOTO. Uma segunda desvantagem tem a ver diretamente com a transformação dos algoritmos em programas de computador. Algumas linguagens de programação não possuem o equivalente a um comando GOTO;

mesmo nas linguagens em que um comando desse tipo existe, seu uso não é recomendado. Sendo assim, vamos agora examinar duas formas de descrever loops usando comandos existentes em quase todas as linguagens de programação.

A primeira forma utiliza o comando WHILE. Um loop WHILE tem a seguinte estrutura:

```
WHILE condição é verdadeira
  continue a executar uma ação
```

Usando um loop WHILE, podemos escrever o algoritmo para contar moedas da seguinte forma:

```
para contar moedas:
zerar contador
WHILE ainda existem moedas no bolso
  remover uma moeda do bolso
  acrescentar uma unidade ao contador
mostrar o valor do contador
```

Neste exemplo, a parte de ação do loop, conhecida como *corpo do loop*, é constituída por dois comandos: remover uma moeda do bolso e acrescentar uma unidade ao contador. Os dois comandos foram indentados para mostrar que fazem parte do corpo do loop. Observe que a estrutura de um loop WHILE é muito parecida com a estrutura do loop no fluxograma da Figura 12.8, com o teste da condição no início do loop. Quando a condição é verdadeira, todos os passos do corpo do loop são executados antes que a condição seja novamente verificada. Como no caso do fluxograma, para evitar um loop infinito é preciso que um dos comandos do corpo do loop torne a condição falsa em algum momento. No caso que estamos examinando, o comando que desempenha esse papel é o de remover uma moeda do bolso. Quando a condição se torna falsa, o algoritmo passa para o primeiro comando que se segue ao final do loop, que, neste caso, é o

comando de mostrar o valor do contador.

A segunda forma de construir loops usando comandos existentes em quase todas as linguagens de programação utiliza o comando FOR, que opera, sequencialmente, em todos os elementos de um conjunto. Um loop FOR tem a seguinte estrutura:

```
FOR cada elemento de um conjunto
  executar uma ação no elemento
```

Usando um loop FOR, podemos escrever o algoritmo para contar moedas da seguinte forma:

```
para contar moedas:
zerar contador
FOR cada moeda no bolso
  remover a moeda
  acrescentar uma unidade ao contador
mostrar o valor do contador
```

O uso do loop FOR é especialmente vantajoso nos casos em que o conjunto é uma série de números e o objetivo é realizar uma operação usando todos esses números, um por um. Considere, por exemplo, o algoritmo para calcular o fatorial de um número inteiro positivo. O fatorial de um número é o produto de todos os números inteiros desde 1 até o número considerado. Usando um loop FOR, podemos escrever o algoritmo para calcular o fatorial da seguinte forma:

```
para calcular o fatorial de n:
fazer o produto igual a 1
FOR cada número inteiro i no intervalo de
  1 até n
    multiplicar o produto por i
mostrar o produto
```

Observe que foi necessário introduzir uma variável, *i*, para

representar o número que está sendo usado a cada passagem pelo loop. O algoritmo para calcular o fatorial também pode ser escrito usando o loop WHILE, como na descrição a seguir:

```
para calcular o fatorial de n:
fazer o produto igual a 1
fazer i igual a 1
WHILE i é menor ou igual a 1
  multiplicar o produto por i
  aumentar i de uma unidade
mostrar o produto
```

Observe que a versão WHILE do algoritmo é ligeiramente mais complicada. Mais especificamente, é preciso inicializar o valor da variável *i,* antes de entrar no loop, e incrementá-lo explicitamente dentro do loop. No caso do loop FOR, essas operações são executadas implicitamente.

Como exemplo final de loop, vamos examinar um caso em que existe uma ramificação dentro do corpo do loop. Considere um algoritmo para o processo de calcular a quantia em moedas que você carrega no bolso. A Figura 12.9 mostra o fluxograma de uma versão do algoritmo; nessa versão, para simplificar o problema, supomos que existem no seu bolso apenas moedas de 1, 5, 10 e 25 centavos. O fluxograma contém duas ramificações separadas: uma para determinar o valor a ser somado, que depende do tipo de moeda, e outra para implementar o loop que remove e avalia todas as moedas que você tem no bolso. Uma versão em pseudocódigo do programa usando o loop FOR é a seguinte:

```
para somar moedas:
fazer o total igual a zero
```

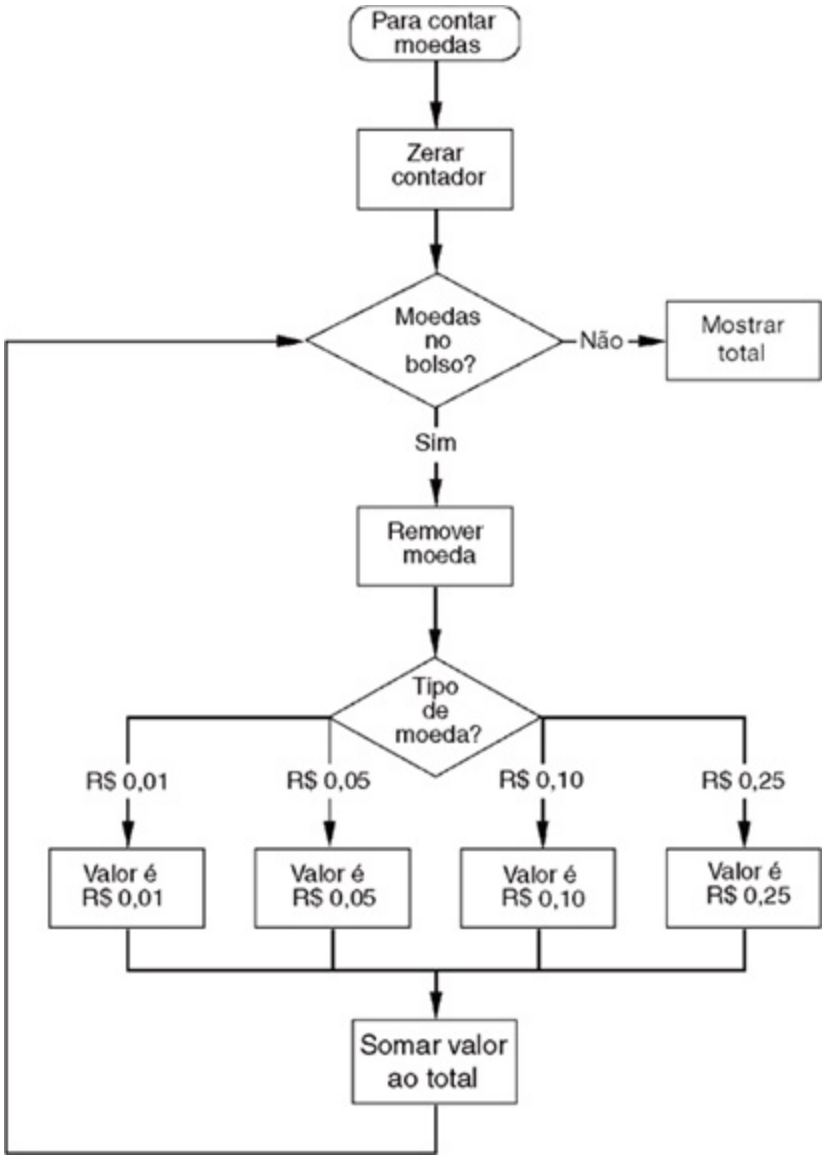


Figura 12.9 Fluxograma para calcular a quantia em moedas que você carrega no bolso.

```
FOR cada moeda no bolso
  remover a moeda
  IF a moeda é de 1 centavo THEN o valor é 1
  ELSE IF a moeda é de 5 centavos THEN
    o valor é 5
  ELSE IF a moeda é de 10 centavos THEN
    o valor é 10
```

```
  ELSE IF a moeda é de 25 centavos THEN
    o valor é 25
   somar o valor ao total
mostrar o total
```

12.2 FUNÇÕES DO MATLAB

12.2.1 Funções Matemáticas e Funções do MATLAB

O conceito de função nas linguagens de programação é parecido com o da matemática, mas os dois não são exatamente iguais. Vamos agora rever sucintamente algumas propriedades das funções matemáticas para poder compará-las com as das funções do MATLAB. Na matemática, função é uma operação que determina uma "saída" unívoca ao ser aplicada a uma lista ordenada de valores de "entrada". Ao definir uma função, expressamos as entradas e saídas da função como variáveis. Um exemplo de uma função *f* com uma única variável de entrada é o seguinte:

$$y = f(x) = 3x + 2 \qquad (12.1)$$

Na Equação (12.1), *x* é a entrada da função e *y* é a saída. Dizemos que *y* é função de *x* e que o valor de *y* para um valor particular de *x* pode ser obtido substituindo esse valor de *x* no lado direito da equação. Assim, por exemplo, o valor de *y* para *x* igual a 4 é

$$y = f(4) = (3 \times 4) + 2 = 14 \qquad (12.2)$$

Quando definimos uma função como *f*, a escolha do *símbolo* (caractere) a ser usado para a variável de entrada não afeta a definição. Assim, por exemplo, se escrevemos a Equação (12.1) com *a* como variável de entrada em vez de *x*,

$$f(a) = 3a + 2 \qquad (12.3)$$

o valor de *f*(4) continua a ser (3 × 4) + 2 = 14. A variável de entrada serve apenas como um curinga a ser substituído quando a

função for calculada para um valor particular da entrada.

Como as funções matemáticas, as funções do MATLAB também têm um nome e variáveis de entrada e saída, e expressam uma relação entre essas variáveis. A listagem a seguir mostra a definição de uma função do MATLAB chamada `f` que expressa a mesma relação que a Equação (12.1):

```
function y = f(x)
% f(x)
% Calcula o valor de 3x + 2
y = 3*x + 2;
```

A primeira linha da definição de uma função é chamada de *cabeçalho* da função. A palavra-chave `function` é usada para indicar que se trata do início da definição de uma função. Neste exemplo, o nome da função é `f`, o nome da variável de saída é `y` e o nome da variável de entrada é `x`. A forma geral do cabeçalho de uma função do MATLAB é a seguinte:

```
function variável-de-saída = nome-da-
  função(variáveis-de-entrada)
```

As duas linhas seguintes da definição da função, que começam com sinais de porcentagem, são comentários, cuja importância será discutida mais adiante. As linhas que se seguem aos comentários constituem o *corpo* da função, que será executado quando usarmos ou *chamarmos* a função. O corpo de uma função *deve* ter pelo menos uma linha que atribua um valor à variável de saída. Se mais de uma linha atribui um valor à variável de saída, o último valor a ser atribuído é tomado como sendo o valor da saída.

Como os scripts, as funções do MATLAB devem ser salvas em um arquivo M antes de serem chamadas. Enquanto o arquivo de um script pode ter qualquer nome, o nome do arquivo M de uma função *deve* ser igual ao nome da função. Assim, por exemplo, o nome do

arquivo M da função `y = f(x)` deve ser `f.m`. Quando o usuário manda salvar o arquivo M de uma função, o MATLAB propõe o nome da função como o nome do arquivo na caixa de diálogo da opção `Save` e este nome não deve ser modificado.

Depois que a definição da função é salva em um arquivo M, é possível chamar a função com um valor particular da variável de entrada. Para chamar a função `f` com um valor de entrada de 4, entre no prompt com o seguinte comando:

```
>> f(4)
```

O MATLAB responde:

```
ans =
     14
```

Como na definição matemática de uma função, a escolha dos nomes das variáveis de entrada e saída não tem nenhum efeito sobre a operação realizada pela função. Para se convencer de que isto é verdade, experimente mudar o nome da variável de saída da função `f` para `z` e o nome da variável de entrada para `a`, criando a seguinte função:

```
function z = f(a)
% f(a)
% Calcula o valor de 3a + 2
z = 3*a + 2;
```

A função criada é exatamente a mesma que no caso anterior. Como as funções matemáticas, as funções do MATLAB podem ter mais de uma variável de entrada.[1] Quando uma função tem mais de uma variável de entrada, essas variáveis são especificadas por uma lista ordenada. Assim, por exemplo, a função matemática *g* a seguir tem duas variáveis de entrada, *x* e *y*.

$$z = g(x, y) = x^2 + y \qquad (12.4)$$

Neste caso, (*x*, *y*) é a lista ordenada de variáveis de entrada. Quando o valor da função é calculado para valores particulares das variáveis de entrada, *x* e *y* são substituídos por esses valores na ordem em que foram declarados. Assim, por exemplo,

$$g(4, 5) = 4^2 + 5 = 21$$

onde *x* foi substituído por 4 e *y* foi substituído por 5 porque esta é a ordem na qual aparecem as variáveis na definição da função. Como no exemplo das Equações (12.1) e (12.3), a mudança dos nomes das variáveis de entrada e saída não tem nenhum efeito sobre a operação realizada pela função, contanto que a ordem das variáveis seja preservada. Assim, se a função *g* fosse definida através da relação

$$w = g(b, a) = b^2 + a \qquad (12.5)$$

o valor de *g*(4, 5) continuaria a ser 21. Uma função do MATLAB que implementa a função *g* da Equação (12.4) é a seguinte:

```
function z = g(x,y)
% g(x,y)
% Calcula o valor de x^2 + y
z = x^2 + y;
```

Depois de salvar a definição da função no arquivo `g.m`, podemos chamar `g` da janela de comando com valores particulares das variáveis de entrada, como no exemplo a seguir:

```
>> g(4,5)
ans =
     21
```

Um aspecto interessante do modo como as funções são implementadas no MATLAB é o fato de que o comando `help` pode ser usado para mostrar os comentários que se seguem ao cabeçalho da função. Assim, se nos esquecermos da ordem dos parâmetros de entrada da função `g`, podemos digitar:

```
>> help g
```

```
  g(x,y)
Calcula o valor de x^2 + y
```

Para que este recurso possa ser usado com o máximo de proveito, os comentários da função devem sempre conter uma lista dos parâmetros e uma breve descrição da função.

Agora sabemos que existem dois mecanismos para escrever e salvar programas de MATLAB: scripts e funções. A principal diferença é que é possível passar variáveis de entrada e saída, também chamadas de *parâmetros* e *argumentos*, para dentro e para fora de funções, mas não é possível fazer o mesmo com scripts. Existe outra diferença importante: o valor de qualquer variável definida em um script pode ser obtido a partir da janela de comando depois de terminada a execução do script, enquanto não é possível fazer o mesmo com as variáveis das funções. Ao contrário do que acontece nos scripts, as variáveis usadas nas funções são definidas apenas no interior da função e são "invisíveis" fora da função. O exemplo a seguir ilustra esse fato. Vamos definir um script chamado `teste_de_variaveis` que chama as funções `f` e `g` definidas anteriormente:

```
% teste_de_variaveis.m
% Script para testar a "visibilidade"
  de variáveis
clear;
p = f(5)
q = g(3,2)
```

Executando o script, obtemos os seguintes resultados:

```
>> teste_de_variaveis
p =
     17
q =
     11
```

Vamos agora verificar quais são as variáveis que estão definidas no espaço de trabalho global usando o comando `who`.

```
>> who
Your variables are:
p q
```

Observe que `p` e `q` estão definidas no espaço de trabalho global, mas o mesmo não acontece com `x` e `y`, embora variáveis com esses nomes sejam usadas nas definições de `f` e `g`. Quando uma função é chamada no MATLAB, todas as variáveis declaradas no interior da função são mantidas em um espaço de trabalho particular que é invisível para o espaço de trabalho global. O fato de que as funções operam em seus espaços de trabalho particulares facilita a preparação de sistemas de software modulares, menos sujeitos a erros de programação. Uma das consequências principais da existência de um espaço de trabalho particular para cada função é o fato de que os programadores podem usar o mesmo nome para as variáveis de duas ou mais funções diferentes sem que haja um conflito. Em outras palavras, a variável de nome "`x`" usada na definição da função `f` não tem nenhuma relação com a variável de mesmo nome usada na definição da função `g`. Se *não* fosse assim, as operações da função `f` afetariam as operações da função `g`, o que, evidentemente, teria consequências indesejáveis.

12.2.2 Funções que Chamam Funções

Do mesmo modo como uma função matemática pode chamar outra função matemática, uma função do MATLAB também pode chamar outra função do MATLAB. Assim, por exemplo, dada a expressão matemática

$$
\begin{aligned}
r &= g(f(1),\ f(2)) \\
&= f(1)^2 + f(2) \\
&= [3(1) + 2]^2 + [3(2) + 2] \\
&= 25 + 8 \\
&= 33
\end{aligned}
$$

a expressão correspondente do MATLAB é

```
>> r = g(f(1),f(2))

r =

     33
```

As funções que chamam funções permitem dividir um problema complexo em partes menores, mais fáceis de programar. A título de ilustração, a Seção 12.5.1 mostra uma implementação no MATLAB da receita de bolo discutida na Seção 12.1.3.

12.2.3 Acompanhamento da Execução de uma Função Usando o Debugger do MATLAB

Para ter uma ideia mais clara de como funcionam as funções do MATLAB, podemos examinar a execução de um programa usando o debugger do MATLAB. O debugger é uma ferramenta que permite acompanhar a execução de um programa passo por passo e observar os valores das variáveis a cada passo. A ferramenta tem o nome de "debugger" porque é usada principalmente para localizar *bugs* (erros de programação) através da comparação dos valores das variáveis com os valores esperados. Neste exemplo, não estamos interessados em localizar erros e sim em observar como é executado um programa escrito corretamente. Mais especificamente, vamos usar o debugger para acompanhar, passo a passo, a execução do script `teste_de_variaveis`, que foi apresentado na Seção 12.2.1.

A Figura 12.10 mostra os botões usados para controlar o debugger, que estão situados na parte superior da janela de edição do MATLAB. As funções desses botões são descritas a seguir.

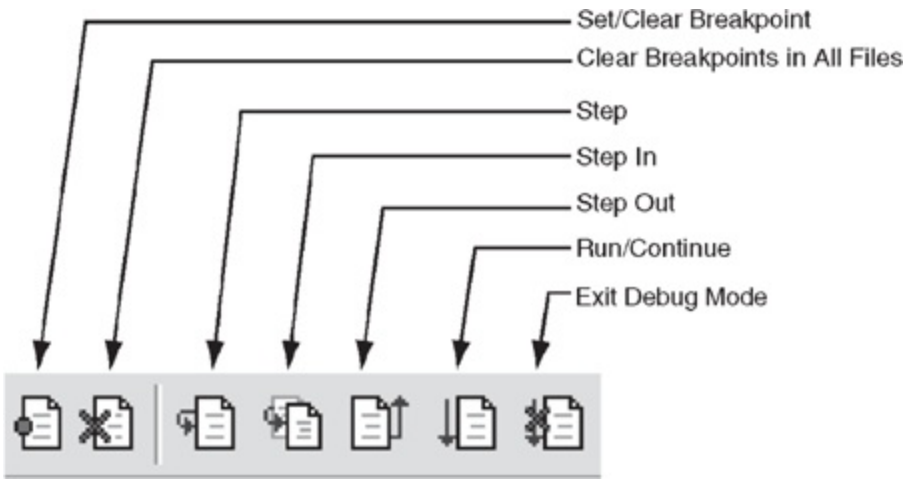


Figura 12.10 Botões de controle do debugger do MATLAB.

Set/clear breakpoint (Marcar/desmarcar breakpoint) Um *breakpoint* é um sinal que indica uma linha do programa no qual a execução deve ser interrompida temporariamente. Quando o usuário marca um breakpoint e roda o programa, este é executado apenas até o local do breakpoint. O mesmo programa pode ter vários breakpoints; nesse caso, o programa é interrompido temporariamente ao chegar a cada um desses breakpoints.

Clear breakpoints in all files (Desmarcar os breakpoints de todos os arquivos) Desmarca os breakpoints de todos os arquivos de scripts e funções.

Step Executa uma linha do programa. Se a linha é a chamada de uma função, executa todos os comandos da função sem mostrá-los. **Step in** Semelhante ao `step`, mas, se a linha é a chamada de uma função, "entra" na função, permitindo que sua execução seja acompanhada passo a passo.

Step out Se a última linha a ser executada pertence a uma função, sai da função e retorna à linha do programa que chamou a função.

Run/Continue Executa ou continua a executar o programa até o breakpoint seguinte. Se não existem mais breakpoints, executa o programa até o final.

Exit debug mode Sai do debugger.

O primeiro passo para usar o debugger é abrir o programa que você deseja acompanhar na janela de edição do MATLAB. Neste exemplo, abra o arquivo `teste_de_variaveis`, criado na Seção 12.2.1. Como queremos acompanhar o programa a partir do primeiro comando, crie um breakpoint na linha do comando `clear` dando um

clique com o mouse com o cursor nessa linha e, em seguida, clicando no botão `set/clear breakpoint`. Um círculo vermelho deve aparecer à esquerda da linha para indicar o breakpoint, como mostra a Figura 12.11.

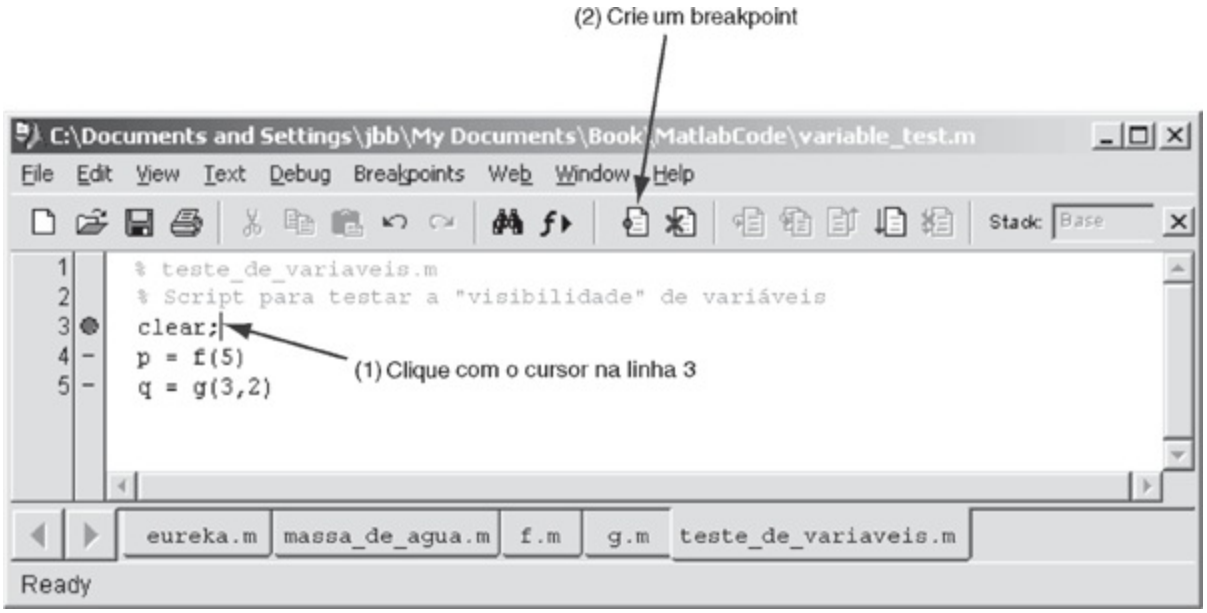


Figura 12.11 Marcação de um breakpoint usando o debugger do MATLAB.

Clique no botão `run`. Uma seta verde vai aparecer à esquerda da linha do comando `clear`, indicando que o programa foi interrompido temporariamente neste ponto. A seta verde sempre indica a linha que será executada a seguir, ou seja, a esta altura o comando `clear` ainda não foi executado. Agora clique no botão `step`. A seta verde vai passar para a linha seguinte. A esta altura, a janela de edição deve ter o aspecto mostrado na Figura 12.12.

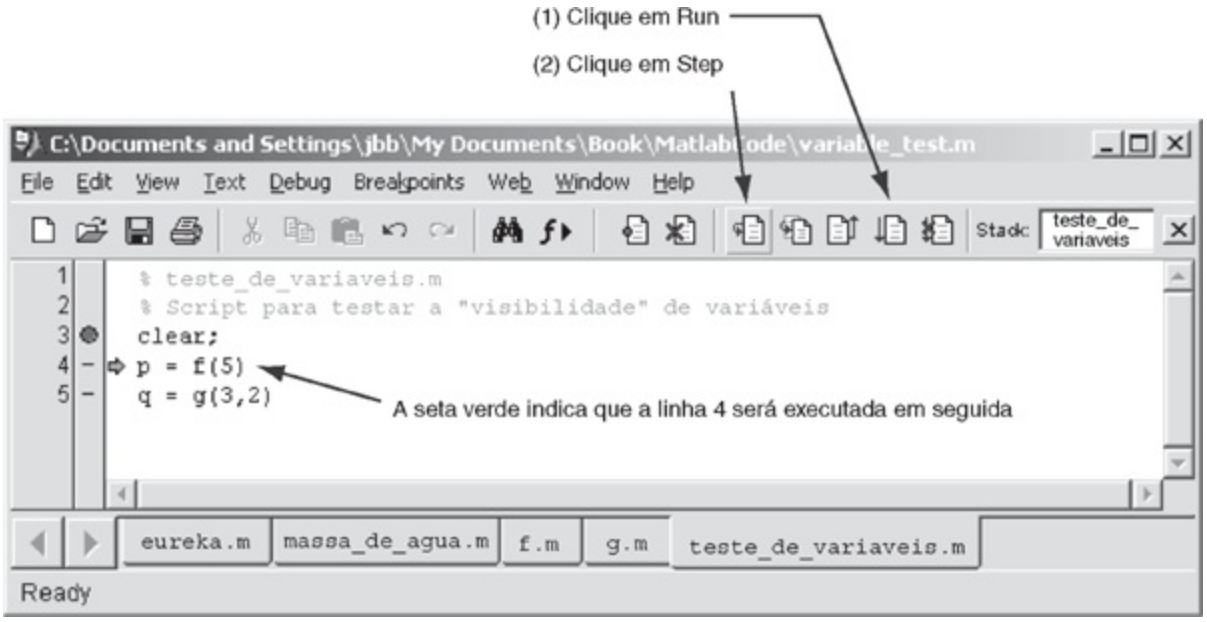


Figura 12.12 O debugger é executado até o primeiro breakpoint e passa para a linha seguinte.

A seta verde agora está apontando para a primeira linha do programa que contém uma chamada de uma função, ou seja, uma chamada para a função `f` com um valor de entrada de 5. Temos a escolha de executar a função e passar para a linha 5, ou "entrar" na função `f`. Vamos optar por entrar na função. Clique no botão `step in` e o arquivo mostrado na janela de edição deverá mudar para o arquivo `f.m`, com a seta verde apontando para a primeira linha que contém um comando, a linha 4. A esta altura, a janela de edição deve ter o aspecto mostrado na Figura 12.13.

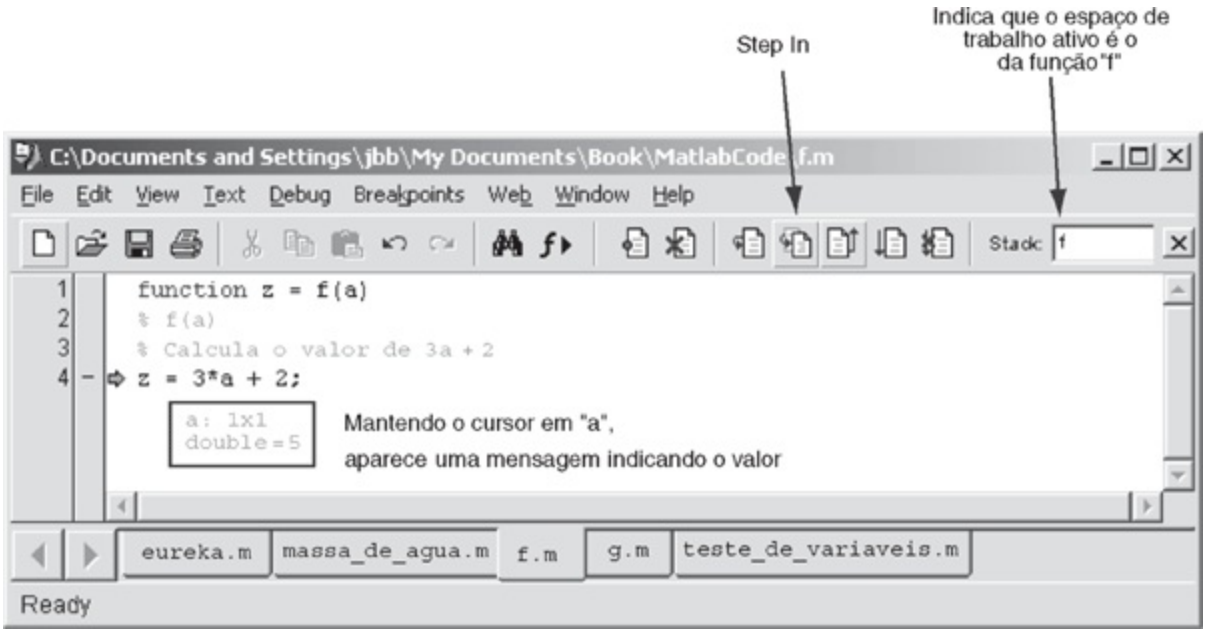


Figura 12.13 O debugger é executado até a primeira linha de comando da função `f`.

Agora que deixamos o espaço de trabalho global e entramos no espaço de trabalho da função `f`, as únicas variáveis visíveis são as que foram definidas dentro da função `f`. Existem várias formas de observar os valores dessas variáveis; a mais simples é posicionar o cursor sobre a variável; isso faz aparecer um pequeno retângulo indicando que `a = 5`. Por quê? Porque a chamada da função no script `teste_de_variaveis` foi `f(5)`, o que fez com que o parâmetro único de entrada da função `f` assumisse o valor 5.

Outra forma de observar os valores das variáveis durante a utilização do debugger é passar para a janela de comando. A primeira coisa que você vai notar quando observar a janela de comando é que o prompt mudou para `K>>`, indicando que o MATLAB está parado no meio da execução de um programa. Para verificar quais são as variáveis ativas, use o comando `who`. Em seguida, entre com os nomes das variáveis para conhecer seus valores. O resultado é o seguinte:

```
K>> who
Your variables are:
```

```
a ans
K>> a
a =
     5
```

A única variável definida no espaço de trabalho ativo (ou seja, no espaço de trabalho da função `f`) é `a`; nenhuma das variáveis do espaço de trabalho global é visível. A variável `z` não aparece porque a linha do programa que cria a variável `z` ainda não foi executada.

Clique mais uma vez no botão `step`. Isso faz com que a linha 4 da função `f` seja executada. Agora você pode observar o valor da variável `z`, seja colocando o cursor sobre a variável na janela de edição, seja entrando com o nome da variável na janela de comando. Observe que a seta verde passou a apontar para baixo, o que mostra que todos os comandos da função `f` foram executados e o programa está pronto para voltar ao script que chamou a função.

Clique novamente no botão `step`. Isso faz com que o debugger volte para o script `teste_de_variaveis` com a seta verde apontando para a linha 5, como mostra a Figura 12.14. A execução da função `f` terminou e o programa está pronto para executar o comando seguinte, que é uma chamada para a função `g`. Vá para a janela de comando e entre com o comando `who` para observar quais são as variáveis visíveis no espaço de trabalho ativo. As variáveis que eram usadas enquanto a função `f` era executada não são mais visíveis; a única variável visível é `p`, que foi definida quando o comando da linha 4 foi executado. A variável `q` só será definida depois que o comando da linha 5 for executado.

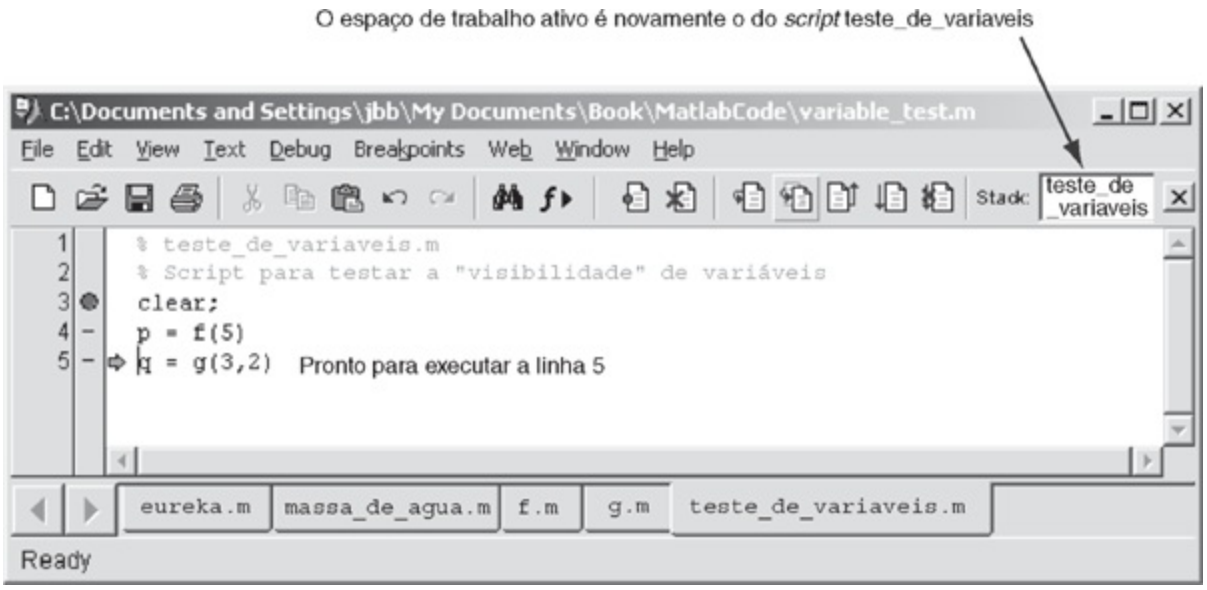


Figura 12.14 Quando a execução da função `f(5)` termina, o debugger volta para o script `teste_de_variaveis`.

Mais uma vez, temos a escolha de entrar em uma função ou executá-la e passar diretamente para a linha seguinte do script. Desta vez, vamos passar diretamente para a linha seguinte. Clique no botão `step`. Com isso, o comando da linha 5 é executado integralmente, ou seja, a execução não é interrompida nos comandos da função `g`. A seta verde passa a apontar para baixo, mostrando que todos os comandos do script `teste_de_variaveis` foram executados. Verifique quais são os valores das variáveis `p` e `q`; devem ser os esperados.

Finalmente, clique no botão `exit debug mode` para sair do debugger. Este exercício está concluído.

12.3 COMANDOS CONDICIONAIS

Os comandos condicionais são usados para fazer com que linhas diferentes de um programa sejam executadas, dependendo das circunstâncias. O MATLAB dispõe de vários comandos condicionais, dos quais o mais usado é o comando `if`. Nesta seção, vamos discutir o

comando `if` e algumas formas de usá-lo.

12.3.1 Revisão de Expressões Lógicas

O comando `if` faz com que um ou mais comandos de um programa sejam, ou não, executados dependendo de uma condição que pode ser "verdadeira" ou "falsa". Essa condição é uma *expressão lógica*, como as que foram apresentadas na Seção 10.4.2 e serão revistas aqui. Um exemplo de expressão lógica é a afirmação "seis é menor que cinco". No MATLAB, o valor "0" significa que a expressão é "falsa" e qualquer valor diferente de zero significa que a expressão é "verdadeira". Isto é mostrado no exemplo a seguir.

```
>> 6 < 5
ans =
     0
>> 5 < 6
ans =
     1
```

Os operadores que comparam dois valores, como o operador "<", são chamados *operadores relacionais*. A tabela a seguir mostra os operadores relacionais do MATLAB.

Símbolo	Operação
==	Igual a
~=	Diferente de
<	Menor que
>	Maior que
<=	Menor ou igual a
>=	Maior ou igual a

Observe que o símbolo "==" representa o operador relacional "igual a", enquanto o símbolo "=" é o operador usado para atribuir um

valor a uma variável. A confusão entre os dois símbolos é uma causa frequente de erros nos scripts de MATLAB.

Expressões lógicas podem ser associadas para formar expressões lógicas mais complexas com o auxílio de *operadores booleanos*. A tabela a seguir mostra os símbolos usados para representar os operadores booleanos "and", "or" e "not" no MATLAB.

Assim, por exemplo, a expressão a seguir é verdadeira para qualquer valor de `x` no intervalo $5 \leq$ `x` ≤ 12:

```
(x >= 5) & (x <= 12)
```

Símbolo	Operação
&	and
|	or
~	not

Uma expressão equivalente é a seguinte:

```
~ ((x < 5) | (x > 12))
```

12.3.2 Comandos IF/ELSE/ELSEIF

O comando `if` examina uma condição, escrita na forma de uma expressão lógica, e executa um ou mais comandos se a condição é "verdadeira". A sintaxe do comando `if` é a seguinte:

```
if condição
   comandos
end
```

O fragmento de programa a seguir mostra a mensagem "Você passou" se a variável `nota` for maior que 60:

```
if (nota > 60)
   disp('Você passou');
end
```

O fragmento de programa a seguir mostra a mensagem “Você acertou” se a variável `x` estiver entre 5 e 12, inclusive:

```
if (x >= 5) & (x <= 12)
   disp('Você acertou');
end
```

O mesmo resultado pode ser obtido *aninhando* um comando `if` dentro de outro:

```
if (x >= 5)
   if (x <= 12)
            disp('Você acertou');
   end
end
```

A palavra-chave `else` pode ser acrescentada ao comando `if` para especificar comandos a serem executados se a condição for “falsa”. A sintaxe do comando `if-else` é a seguinte:

```
if condição
   comandos
else
   comandos alternativos
end
```

A função a seguir, `valor_absoluto`, usa um comando `if-else` para calcular o valor absoluto de um número:

```
function y = valor_absoluto(x)
% valor_absoluto(x)
% Calcula o valor absoluto de x
 if x < 0
  y = -x;
 else
```

```
   y = x;
end
```

Finalmente, a palavra-chave `elseif` pode ser usada para especificar diferentes comandos para diferentes condições. A sintaxe do comando `if-elseif-else` é a seguinte:

```
if condição 1
  comandos 1
elseif condição 2
  comandos 2
. . .
elseif condição n
  comandos n
else
  comandos alternativos
end
```

A função a seguir testa o valor da variável `t` e informa se a água a essa temperatura, em graus Celsius, é sólida, líquida ou gasosa a uma atmosfera de pressão:[2]

```
function estado_da_agua(t)
% estado_da_água(temperatura_celsius)
% Informa o estado da água,
% dada a temperatura em graus Celsius
if t <= 0
  estado = 'gelo';
elseif t >= 100
  estado = 'vapor';
else
  estado = 'líquido';
end
```

```
disp(estado);
```

12.3.3 Acompanhamento da Execução de um Comando IF Usando o Debugger

Como fizemos com as funções, nesta seção vamos usar o debugger do MATLAB para acompanhar a execução de um comando condicional e ilustrar o funcionamento desse tipo de comando. Além disso, vamos mostrar como o debugger pode ser usado para localizar um erro de programação.

1. Salve a função `estado_da_agua` da seção anterior em um arquivo e abra o arquivo na janela de edição do MATLAB. Crie um breakpoint no comando `if`. Passe para a janela de comando e digite o comando `estado_da_agua(-10);` a janela de edição ficará com o aspecto mostrado na Figura 12.15.
2. Coloque o cursor sobre a variável `t` e confirme que o valor da variável é `-10`.
3. Clique no botão `Step`. A seta verde deverá apontar para a linha `estado = 'gelo';` porque a condição `t <= 0` é verdadeira.
4. Clique novamente no botão `Step`. A seta verde salta para a linha `disp(estado);`. Isso acontece porque uma estrutura do tipo `if…elseif…else` é dada como concluída no momento em que a primeira condição verdadeira é encontrada.
5. Clique mais uma vez no botão `Step`. A mensagem `gelo` aparece na janela de comando e a seta verde passa a apontar para baixo, mostrando que a execução da função foi concluída.
6. Clique no botão `Exit Debug Mode`.
7. Repita os passos anteriores mais duas vezes, para as temperaturas de 50 e 110°C. Observe quais são as linhas efetivamente executadas e quais são as linhas saltadas.

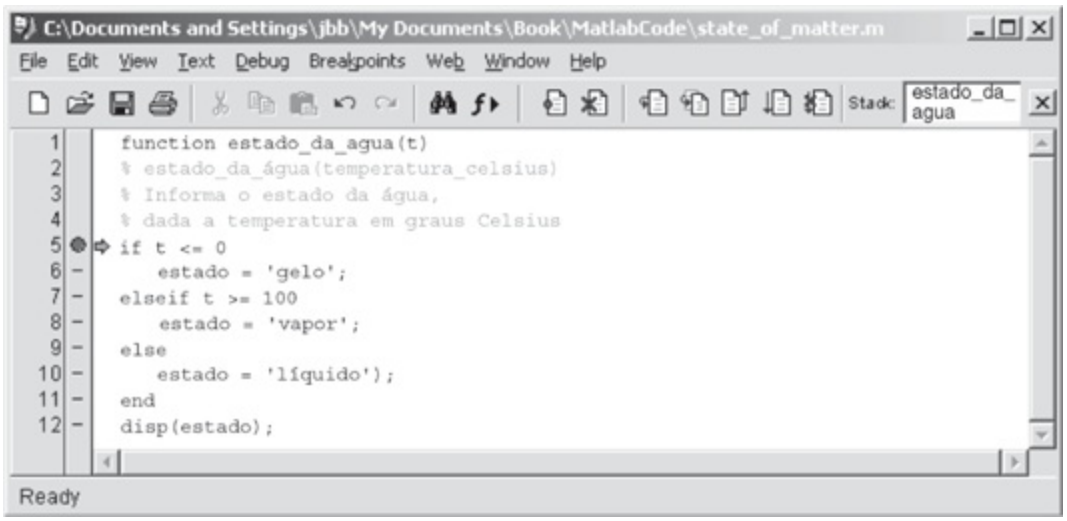


Figura 12.15 Uso do debugger para acompanhar a execução de um comando condicional.

Vamos agora mostrar como o debugger pode ser usado para localizar um erro. Suponha que a função para determinar o estado da água tenha sido implementada da seguinte forma:

```
function estado_da_agua_com_erro(t)
% estado_da_água(temperatura_celsius)
% Informa o estado da água,
% dada a temperatura em graus Celsius
if t <= 0
  estado = 'gelo';
end
if t <= 100
  estado = 'líquido';
else
  estado = 'vapor';
end
disp(estado);
```

Executando esta função com o valor -10, obtemos o seguinte resultado:

```
>> estado_da_agua_com_erro(-10) líquido
```

O que deu errado? Sempre é possível localizar um erro de programação revendo manualmente todos os comandos; entretanto, já que estamos supondo que foi você que cometeu o erro, talvez você tenha dificuldade para encontrá-lo. O debugger pode ajudá-lo a verificar se o programa está se comportando da forma que você esperava. Neste programa, a expectativa principal é de que a variável `estado` tenha o valor '`sólido`' quando o comando da última linha da função é executado. Para localizar o erro usando o debugger, faça o seguinte:

1. Abra o arquivo `estado_da_agua_com_erro.m` na janela de edição do MATLAB. Crie um breakpoint na linha `if t <= 0`. Passe para a janela de comando e digite o comando `estado_da_agua_com_erro(-10)`.
2. Coloque o cursor sobre a variável `t` e confirme que o valor da variável é `-10`.
3. Clique no botão `Step`. A seta verde deverá apontar para a linha `estado = 'gelo'`; porque a condição `t <= 0` é verdadeira.
4. Clique novamente no botão `Step`. A seta verde passa para a linha `7` (o primeiro `end`), indicando que a primeira estrutura `if` foi concluída.
5. Clique mais uma vez no botão `Step`. A seta verde passa para a linha `if t <= 100`, indicando que o programa está prestes a testar a segunda condição.
6. Clique novamente no botão `Step`. Aha! A seta verde agora está na linha `estado = 'líquido ';`. O valor anterior de `estado`, que era '`sólido`', passou a ser '`líquido`'. O erro está no fato de que queríamos que os três casos fossem mutuamente excludentes, mas, ao usarmos duas estruturas `if` separadas, o efeito não foi o

desejado. A substituição da segunda estrutura `if` por uma condição `elseif` resolveria o problema.

12.4 COMANDOS DE REPETIÇÃO

Os comandos de repetição são usados para produzir *loops*, ou seja, fazer com que blocos de comandos sejam repetidos várias vezes. O MATLAB dispõe de dois comandos de repetição: o comando `while`, que faz com que um bloco de comandos seja repetido enquanto uma condição for "verdadeira", e o comando `for`, que faz com que um bloco de comandos seja repetido um certo número de vezes.

12.4.1 O Comando WHILE

O comando `while` faz com que um bloco de comandos seja repetido enquanto uma condição, especificada através de uma expressão lógica, for "verdadeira". A sintaxe do comando `while` é a seguinte:

```
while condição
  comandos
end
```

O script a seguir mostra na tela os números de 1 a 3, em linhas separadas.

```
i = 1;
while i <= 3
  disp(i);
  i = i + 1;
end
disp('Terminei');
```

Executando este script, obtemos o seguinte resultado:

```
>> conta_ate_3
     1
     2
     3
Terminei
```

12.4.2 O Comando FOR

O comando `for` faz com que um bloco de comandos seja repetido um certo número de vezes. A sintaxe do comando `for` é a seguinte:

```
for variável = v
  comandos
end
```

onde `v` é um vetor.

Os comandos são repetidos por um número de vezes igual ao número de elementos do vetor `v`. O vetor `v` pode ser definido de várias formas, mas na prática quase sempre é uma sequência construída com o operador dois pontos (:). Assim, por exemplo, o script a seguir calcula a soma da série 0,0; 0,1; 0,2; ...; 10,0 e guarda o resultado na variável `total`.

```
total = 0;
for i = 0:0.1:10
  total = total + i;
end
```

Note que este exemplo é equivalente ao comando

```
total = sum(0:0.1:10)
```

Nos dois casos, o valor resultante da variável `total` é 505.

Qualquer loop executado usando o comando `for` também pode ser executado usando o comando `while`. O script a seguir, que utiliza o

comando `while`, é equivalente ao script anterior, que usa o comando `for`.

```
total = 0;
i = 0;
while i <= 10
  total = total + i;
  i = i + 0.1;
end
```

Na prática, a principal diferença entre o uso do comando `while` e o uso do comando `for` para construir um loop é que, no caso do comando `while`, o contador do loop deve ser incrementado no corpo do loop, ao passo que, no caso do comando `for`, o contador assume automaticamente, a cada passagem, o valor do elemento seguinte de um vetor que foi definido na primeira linha do loop. Na maioria dos casos, não existe vantagem em usar um ou outro comando; o importante é ter certeza de que o comando seja usado de forma correta.

12.4.3 Uso do Debugger para Acompanhar a Execução de um Comando de Repetição

Como fizemos com as funções e com o comando `if`, nesta seção vamos usar o debugger do MATLAB para acompanhar a execução de um comando de repetição e ilustrar o funcionamento desse tipo de comando.

1. Salve o script `conta_ate_3` da Seção 12.4.1 em um arquivo e abra o arquivo na janela de edição do MATLAB. Crie um breakpoint na primeira linha, `i = 1;`. Passe para a janela de comando e execute o script; a seta verde apontará para a primeira linha do script, como na Figura 12.16.

2. Clique no botão `Step`. A seta verde apontará para a linha `while i <= 3`, mostrando que o script está pronto para testar a condição. Coloque o cursor sobre a variável `i` para confirmar que o valor da variável é 1.
3. Clique novamente no botão `Step`. A seta verde passará para o corpo do loop. Clique mais uma vez no botão `Step`; o número 1 será mostrado na janela de comando e a seta verde indicará que o comando `i = i + 1` está pronto para ser executado. Coloque o cursor sobre a variável `i` e confirme que o valor da variável ainda é `1`.
4. Clique mais uma vez no botão `Step`. A seta verde passará para o comando `end` do loop. Coloque o cursor sobre a variável `i` e observe que o valor da variável aumentou para `2`.
5. Clique de novo no botão `Step`. A seta verde voltará ao início do loop para testar a condição `i <= 3`. Como o valor de `i` é `2`, a condição é verdadeira e o corpo do loop será executado novamente.
6. Continue a clicar no botão `Step` até a seta verde apontar para o comando `end`. A essa altura, o valor de `i` deve ser `3`. Como a condição `i <= 3` ainda é verdadeira, o corpo do loop será executado mais uma vez.
7. Continue a clicar no botão `Step` até a seta verde apontar de novo para o comando `end`. Confirme que o valor de `i` agora é `4`.
8. Clique novamente no botão `Step`. A seta verde voltará ao início do loop, mas desta vez a condição `i <= 3` é falsa.
9. Clique de novo no botão `Step`. A seta verde saltará para a primeira linha após o final do loop, que contém o comando `disp(' Terminei')`. Clique mais uma vez para que esta

mensagem apareça na tela de comando. Em seguida, saia do debugger.

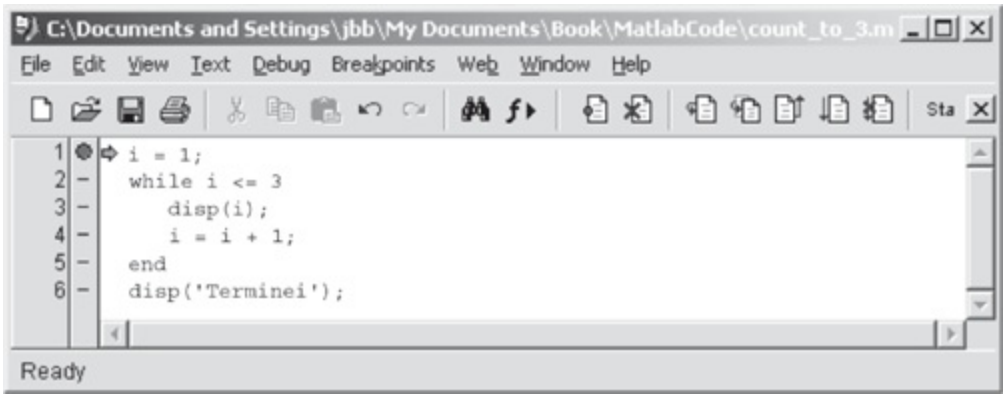


Figura 12.16 Uso do debugger para acompanhar a execução de um comando de repetição.

12.4.4 Loops Aninhados

Da mesma forma como podemos "aninhar" um comando `if` dentro de outro, também é possível aninhar um loop dentro de outro. O script a seguir mostra um exemplo muito simples de dois loops aninhados que usam o comando `for`.

```
disp(' i j')
disp(' - - - - - - -')
for i = 1:2
  for j = 1:3
    disp([i j]) % mostrar i e j
  end
end
```

O loop externo, que usa a variável `i` como contador, executa o loop interno 2 vezes. O loop interno, que usa a variável `j` como contador, executa o comando `disp` 3 vezes. Em consequência, o comando `disp` é executado 6 vezes. O comando `disp` simplesmente mostra os valores de `i` e `j` cada vez que é executado. O resultado da execução do script

é mostrado a seguir.

```
% i j
% -------
1 1
1 2
1 3
2 1
2 2
2 3
```

Como se pode ver, nas primeiras três vezes em que o comando `disp` é executado, `i` vale 1 e `j` varia de 1 a 3. Em seguida, o valor de `i` aumenta para 2 e o loop externo é repetido. No loop interno, `j` varia novamente de 1 a 3. A esta altura, o contador do loop externo chegou ao limite superior, e o script é encerrado.

12.4.5 Erros Comuns Associados a Loops

Existem dois erros muito comuns associados a loops. O primeiro é conhecido como *loop infinito* e acontece quando a condição do loop é sempre verdadeira, o que faz com que os comandos do corpo do loop sejam repetidos indefinidamente. Poderíamos obter "acidentalmente" um loop infinito no script `conta_ate_3` da Seção 12.4.1 se nos esquecêssemos de aumentar o valor de `i` a cada iteração:

```
1 = 1; while i '= 3
  disp(i);
  % xi, esqueci de incrementar i!
end
disp('Terminei');
```

É muito fácil saber se o programa que está sendo executado contém um loop infinito: o prompt de comando desaparece para sempre! Para

interromper um loop infinito no MATLAB, digite Ctrl-C na janela de comando.

O segundo tipo comum de erro associado a loops é chamado de *erro de uma unidade*. Uma forma de erro de uma unidade acontece quando um loop é executado uma vez a mais ou a menos que o necessário. Isso pode ocorrer se as condições do loop não forem especificadas corretamente, como, por exemplo, se o operador “menor que” for usado em vez do operador “menor que ou igual a”. Outra forma de erro de uma unidade está relacionada à ordem na qual os comandos são executados no corpo de um loop. Suponha que a terceira e a quarta linhas do script `conta_ate_3` da Seção 12.4.1 tenham suas posições invertidas. Nesse caso, o script ficará assim:

```
i = 1;
while i <= 3
  i = i + 1;
  disp(i);
end
disp('Terminei');
```

Executando este script, obtemos o seguinte:

```
>> conta_ate_3
   2
   3
   4
Terminei
```

Este não é, obviamente, o resultado desejado. Erros desse tipo podem ser identificados e corrigidos usando o debugger do MATLAB para examinar um loop problemático e comparar os valores esperados das variáveis com os valores que realmente assumem durante a execução do programa.

12.5 EXEMPLOS DO USO DE FUNÇÕES, COMANDOS CONDICIONAIS E COMANDOS DE REPETIÇÃO

12.5.1 Subfunções: A Receita de Bolo

Na Seção 12.1.3, vimos que a forma de tornar um algoritmo complexo mais fácil de interpretar é dividi-lo em sub-rotinas. No MATLAB, isto pode ser feito através de "subfunções", que são funções chamadas por outras funções dentro do mesmo programa.

O programa a seguir implementa o algoritmo para fazer um bolo que foi descrito na Seção 12.1. Os comandos da função principal devem aparecer em primeiro lugar e o programa deve ser salvo em um arquivo com o mesmo nome, no caso `fazer_bolo.m`. As subfunções podem aparecer em qualquer ordem. Observe que nem todas as funções precisam ter parâmetros de entrada ou de saída.

```
function fazer_bolo(tamanho_da_forma)
% fazer_bolo(tamanho_da_forma)
% Instruções para fazer um bolo.
% tamanho_da_forma é um número em centímetros
%
preparar;
misturar_massa;
assar(tamanho_da_forma);
misturar_cobertura;
aplicar_cobertura;

function preparar
disp ('PREPARAR:');
disp ('preaquecer forno a 180 graus Celsius')
disp ('untar forma')

function misturar_massa
disp ('MISTURAR MASSA:');
```

```
disp ('misturar farinha' água, óleo e ovos
 em uma tigela');
disp ('bater por 2 minutos');

function assar(tamanho_da_forma)
disp ('ASSAR:');
if tamanho_da_forma == 20
 disp ('assar por 32 a 36 minutos');
elseif tamanho_da_forma == 23
 disp ('assar por 28 a 32 minutos');
else
 disp ('parar e trocar a forma por uma
  de 20 cm')
 disp ('assar por 32 a 36 minutos');
end

function misturar_cobertura
disp ('MISTURAR COBERTURA:');
disp ('bater açúcar com manteiga por 1
 minuto');
disp ('adicionar leite e 1 clara em neve');
disp ('bater por 2 minutos');

function aplicar_cobertura
disp ('APLICAR COBERTURA:');
disp ('aplicar cobertura no bolo depois de
 assado')
```

Quando o programa é executado para uma forma de 23 centímetros, o resultado é o seguinte:

```
>> fazer_bolo(23)
PREAPARAR:
preaquecer forno a 180 graus Celsius
```

```
untar forma
MISTURAR MASSA:
misturar farinha, água, óleo e ovos em uma
  tigela
bater por 2 minutos
ASSAR:
assar por 28 a 32 minutos
MISTURAR COBERTURA:
bater açúcar com manteiga por 1 minuto
adicionar leite e 1 clara em neve
bater por 2 minutos
APLICAR COBERTURA:
aplicar cobertura no bolo depois de assado
```

12.5.2 Funções Vetoriais e Matriciais

Entre os recursos mais importantes do MATLAB estão as funções nativas para realizar operações vetoriais e matriciais. Nos primórdios da computação, os programadores tinham que escrever suas próprias sub-rotinas para realizar operações como a soma de vetores e a multiplicação de matrizes, mas a criação de ambientes de programação como o MATLAB tornou essa prática desnecessária para muitos usuários.[3] Nesta seção, porém, para ilustrar o uso de comandos condicionais e de repetição, vamos mostrar como seria possível escrever funções do MATLAB para realizar algumas operações vetoriais e matriciais.

Soma de Vetores Como foi visto na Seção 11.4.3, dois vetores podem ser somados se e somente se forem do mesmo tamanho. Nesse caso, a soma é um vetor cujos elementos são a soma dos elementos correspondentes dos vetores originais. A função do MATLAB mostrada a seguir verifica se os dois vetores de entrada são do mesmo tamanho

e, em caso afirmativo, calcula a soma, usando um loop para somar um elemento de cada vez dos vetores `X` e `Y` e armazenar o resultado no elemento correspondente do vetor `Z`.[4]

```
function Z = soma_vetorial(X,Y)
% soma_vetorial(X,Y)
% Calcula a soma dos vetores X e Y

if length(X) ~= length(Y)
 disp ('Erro: X e Y devem ser do mesmo tamanho')
else
 n = length(X);
Z = zeros(1,n); % torna a função mais rápida
for i = 1:n
 Z(i) = X(i) + Y(i);
 end
end
```

Executando o comando `help`, podemos ver os comentários que foram colocados no início da função:

```
>> help soma_vetorial
   soma_vetorial(X,Y)
   Calcula a soma dos vetores X e Y
```

Se os vetores de entrada não são do mesmo tamanho, a função mostra uma mensagem de erro; caso contrário, a função mostra o vetor soma.

```
>> a = [1 2 3];
>> b = [4 5 6];
>> c = [7 8 9 10];

>> soma_vetorial(a,c)
Erro: X e Y devem ser do mesmo tamanho
>> soma_vetorial(a,b)
ans =
```

```
5 7 9
```

Note que a variável `i` neste exemplo representa o *índice* de um elemento dos vetores `X`, `Y` e `Z` e não o *valor* do elemento. As expressões `X(i)`, `Y(i)` e `Z(i)` são os valores dos elementos dos três vetores cujo índice é `i`. Como foi dito na Seção 10.2.1, muitos programadores inexperientes consideram confusa esta notação. Se você ainda tem dúvidas, releia a Seção 10.2.1 para entender bem a diferença entre o índice do elemento de um vetor e o valor desse elemento antes de passar para o próximo exemplo.

Uma observação final a respeito deste exemplo é que inicializamos os valores de todos os elementos do vetor `Z` com zeros antes de executar a soma. A função funcionaria mesmo sem essa medida, já que, como foi dito na Seção 10.2.1, o MATLAB pode acrescentar novos elementos a um vetor na medida das necessidades. Entretanto, como isso leva tempo, os programas do MATLAB são executados mais depressa se todos os elementos dos vetores são criados de uma só vez, mesmo que seus valores venham a ser modificados mais tarde.

Soma de Matrizes e Loops Aninhados Como a soma de vetores, a soma de matrizes é executada somando os elementos correspondentes das matrizes originais. Para isso são necessários dois loops, um dentro do outro. Como mostra o pseudocódigo a seguir, o loop externo faz variar a linha que está sendo somada, enquanto o loop interno executa a soma para os elementos da linha, um de cada vez.

```
para somar matrizes:
Verifique se as matrizes são do mesmo tamanho
FOR cada linha
  FOR cada elemento da linha
    Some os elementos correspondentes
```

Transformando o pseudocódigo em uma função do MATLAB, obtemos:

```
function Z = soma_de_matrizes(X,Y)
% soma_de_matrizes(X,Y)
% Calcula a soma de matrizes X + Y

if size(X) ~= size(Y)
  disp('Erro: X e Y devem ser do mesmo tamanho')
else
  dimensions = size(X); % gera um vetor de 2 elementos
  nlinhas = dimensions(1);
ncolunas = dimensions(2);
Z = zeros(nlinhas,ncolunas);
for i = 1:nlinhas
   for j = 1:ncolunas
            Z(i,j) = X(i,j) + Y(i,j);
   end
  end
end
```

No exemplo da soma de vetores, usamos uma única variável `i` como índice dos vetores. No caso da soma de matrizes, precisamos de dois índices para identificar os elementos das matrizes. As variáveis `i` e `j` são os índices que representam, respectivamente, as linhas e colunas das matrizes `X`, `Y` e `Z`. Assim, o comando `for i = 1:nlinhas` faz com que todas as linhas sejam processadas; o comando `for j = 1:ncolunas` faz com que todas as colunas sejam processadas; e a expressão `X(i,j)` indica o elemento da matriz `X` situado na linha `i` e na coluna `j`. Os comandos a seguir demonstram o funcionamento da função:

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6];
>> B = [10 20 30; 40 50 60];
>> soma_de_matrizes(A,B)
```

```
ans =
     11 22 33
     44 55 66
>> soma_de_matrizes(A,B')
Erro: X e Y devem ser do mesmo tamanho
```

12.6 ACÚMULO DE MUDANÇAS

No Capítulo 8, discutimos um método para modelar o comportamento de um sistema em função do tempo como uma série de instantâneos discretos. Nesse método, usamos as leis que descrevem a taxa de variação do sistema (como, por exemplo, o aumento da população a uma taxa fixa anual, ou a queda de um objeto de acordo com a lei da gravidade) para calcular o novo estado do sistema a partir do estado anterior. Expressamos os modelos na forma de equações diferença e usamos o método de Euler para simular o comportamento dos sistemas em função do tempo. No Capítulo 8, para implementar as simulações, construímos tabelas nas quais as colunas representam as variáveis de estado de interesse e as linhas representam os valores dessas variáveis em diferentes instantes de tempo. Embora completar uma tabela desse tipo não seja muito difícil do ponto de vista conceitual (basta conhecer as quatro operações), o trabalho pode ser extremamente tedioso. Uma abordagem para automatizar os cálculos consiste em usar uma planilha eletrônica. Outra abordagem, que será discutida nesta seção, é escrever um script do MATLAB. Depois que você se familiarizar com o MATLAB, provavelmente achará esta solução mais simples e flexível que a da planilha eletrônica, embora as duas abordagens sejam válidas.

12.6.1 Revisão: Modelagem do Crescimento Populacional

Na Seção 8.4.4, discutimos um modelo para a variação, com o tempo, do tamanho de uma população. Vamos rever brevemente esse modelo antes de mostrar como implementá-lo no MATLAB. Em nosso modelo, postulamos que a taxa de crescimento da população é proporcional ao aumento da população, ou seja,

$$\frac{\text{Variação de população}}{\text{Ano}} = \frac{\text{População (bilhões)}}{\text{Ano}} \times \text{População}$$

ou

$$\frac{\Delta P_i}{\Delta t} = gP_i$$

onde P_i é o tamanho da população no ano i e g é a *taxa de crescimento anual*, medida como uma porcentagem da população. Escrevendo esta relação na forma de uma equação diferença, obtemos:

$$\frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta t} = gP_i \quad P_{i+1} = P_i + gP_i\Delta t \qquad (12.6)$$

Na Seção 8.4.4, implementamos o modelo na forma de uma tabela na qual cada linha contém a população em um dado ano, calculada a partir da população no ano anterior usando a Equação (12.6). Dado que a população mundial era de aproximadamente 2,6 bilhões de habitantes em 1950 com uma taxa de crescimento de 0,18% ao ano, as primeiras linhas da tabela são

Passo	Ano	População (bilhões)
0	t_0 1950	P_0 2,56
1	$t_1 = t_0 + \Delta t$ $1950 + 1$ 1951	$P_1 = P_0 + gP_0\Delta t$ $2,56 + (0,018)(2,56)(1)$ 2,60
2	$t_2 = t_1 + \Delta t$ $1951 + 1$ 1952	$P_2 = P_1 + gP_1\Delta t$ $2,60 + (0,018)(2,60)(1)$ 2,65

Acrescentar manualmente novas linhas à tabela seria tedioso, mas o MATLAB pode fazer isso facilmente. Na implementação do MATLAB, podemos pensar em cada coluna da tabela (ano e população) como um vetor; calcular a população para o ano seguinte corresponde a acrescentar novos elementos aos vetores. Assim, se `ano` é o vetor dos anos, `P` é o vetor da população, `i` é o índice do ano corrente e `g` é a taxa de crescimento da população, podemos acrescentar aos vetores os resultados da simulação para o ano seguinte usando os seguintes comandos do MATLAB:

```
ano(i+1) = ano(i) + 1;
P(i+1) = P(i) + g*P(i);
```

Recuando um passo para ter uma visão global do problema, podemos agora escrever o pseudocódigo de toda a simulação:

```
Estabeleça os valores iniciais do ano,
  população e taxa de crescimento
FOR o número de anos da simulação
   Calcule e acrescente o valor seguinte ao vetor ano
   Calcule e acrescente o valor seguinte ao vetor população
Plote os resultados
```

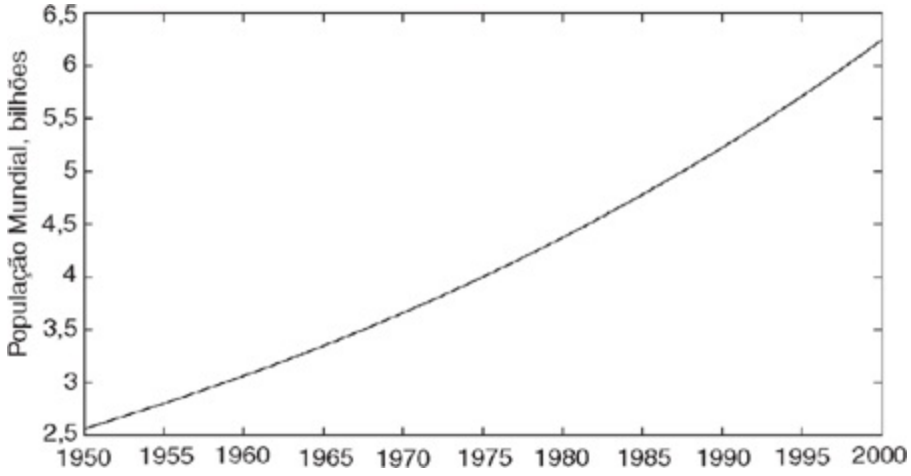


Figura 12.17 Simulação do crescimento da população mundial.

Traduzindo o pseudocódigo para o MATLAB, obtemos o script a seguir, que produz os resultados mostrados na Figura 12.17.

```
% Simulação da população mundial, 1950-
2000
clear; % zerar todas as variáveis
ano(1) = 1950; % ano inicial
P(1) = 2.56e9; % população no ano inicial
g = .018; % taxa de crescimento da
           população
for i=1:50
     ano(i+1) = ano(i) + 1;
     P(i+1) = P(i) + g*P(i);
end
plot(ano,P/1e9);
ylabel('População Mundial, bilhões')
```

Ao escrever scripts que acrescentam ou mudam elementos de vetores, é importante zerar todas as variáveis no início do script. A razão para isso é que não queremos deixar valores residuais em um vetor que não façam parte da execução corrente. Suponha, por exemplo, que depois de executar a simulação para 50 anos tenhamos decidido executar a simulação para apenas 25 anos usando uma taxa de crescimento diferente. Se as variáveis não forem zeradas, os vetores `ano` e `P` ainda estarão carregados com os valores da execução anterior, e os últimos 25 anos serão plotados indevidamente.

12.6.2 Modelagem da Trajetória de uma Bola com Arrasto

Como exemplo ligeiramente mais complexo de simulação de um sistema com o MATLAB, vamos apresentar nesta seção o script completo para determinar a trajetória de uma bola de softball,

incluindo os efeitos de arrasto, usando o modelo apresentado na Seção 8.3.3. O modelo consiste em equações diferença para a altura *y*, a velocidade *v* e a aceleração *a*:

$$y_{i+1} = y_i + v_i \Delta t$$
$$v_{i+1} = v_i + a_i \Delta t$$
$$a_{i+1} = \frac{mg - \text{sign}(v_{i+1})\, k_d v_{i+1}^2}{m}$$

onde

$$k_d = \frac{C_D}{2} \rho A$$

com as seguintes constantes físicas:

r:	raio da bola	4,85 cm
m:	massa da bola	0,185 kg
C_D:	coeficiente de arrasto da esfera	0,5
ρ:	massa específica do ar	1,29 kg/m^3

A principal diferença entre este exemplo e o anterior é que agora existem três variáveis de estado em vez de uma. O método usado para simular a trajetória da bola é semelhante ao que foi utilizado para simular o crescimento da população, exceto pelo fato de que agora, para cada instante de tempo, precisamos trabalhar com três equações. Outra diferença é que a simulação prossegue até a bola atingir o solo, em vez de ser limitada a um número fixo de intervalos. Segue uma descrição da simulação em pseudocódigo.

```
Estabeleça as constantes físicas
Estabeleça as condições iniciais
WHILE a altura da bola é maior que ou igual
 a 0
   Calcule acrescente o valor seguinte aos vetores tempo,
     altura, velocidade e aceleração
Determine a altitude máxima, o momento do impacto e a
```

```
  velocidade no momento do impacto
Plote a altura, a velocidade e a aceleração em função do tempo
```

Traduzindo o pseudocódigo para o MATLAB, obtemos o script a seguir.

```
% Modelo para a trajetória de uma bola de
    softball
% lançada verticalmente, incluindo os efeitos
    do arrasto.
clear;
% constantes físicas
g = -9.81;       % aceleração, m/s^2
r = 0.0485;      % raio da bola, m;
m = 0.185;       % massa da bola, kg;
ro = 1.29;       % massa específica do ar,
                   kg/m^3
Cd = 0.5;        % coeficiente de arrasto
                   de uma esfera
A = pi*r^2;      % área da seção reta de
                   uma esfera, m^2

kd = Cd*ro*A/2; % coeficiente da força de
                   arrasto

% condições iniciais
i = 1;
v0 = 20;         % velocidade inicial, m/s
dt = .001;       % incremento de tempo, s
y(1) = 0;        % altura, m
v(1) = v0;       % velocidade, m/s
```

```
t(1) = 0;          % tempo, s
a(1) = (m*g - kd*v(1)^2)/m;
                   % aceleração, m/s^2

% loop de Euler, até a bola atingir o solo
while y(i) >= 0
  t(i + 1) = t(i) + dt;
  y(i + 1) = y(i) + v(i)*dt;
  v(i + 1) = v(i) + a(i)*dt;
  a(i + 1) = (m*g - sign(v(i+1))*kd*v(i+1)
      ^2)/m;
  i = i + 1;
end

% valores finais
t_impacto = t(i)
v_impacto = v(i)
y_apogeu = max(y)

% plotar gráficos
subplot(3,1,1);
plot(t,y);
ylabel('y, m');
subplot (3,1,2);
plot(t,v);
ylabel('v, m/s');
subplot (3,1,3);
plot(t,a);
ylabel('a, m/s^2');
xlabel('t, s');
```

Executando o script, obtemos os resultados mostrados a seguir e os gráficos que aparecem na Figura 12.18. Esses resultados e gráficos são iguais aos que foram apresentados na Seção 8.3.3.

```
t_impacto =

   3.6580

v_impacto =

   -16.2043

y_apogeu =

   16.3931
```

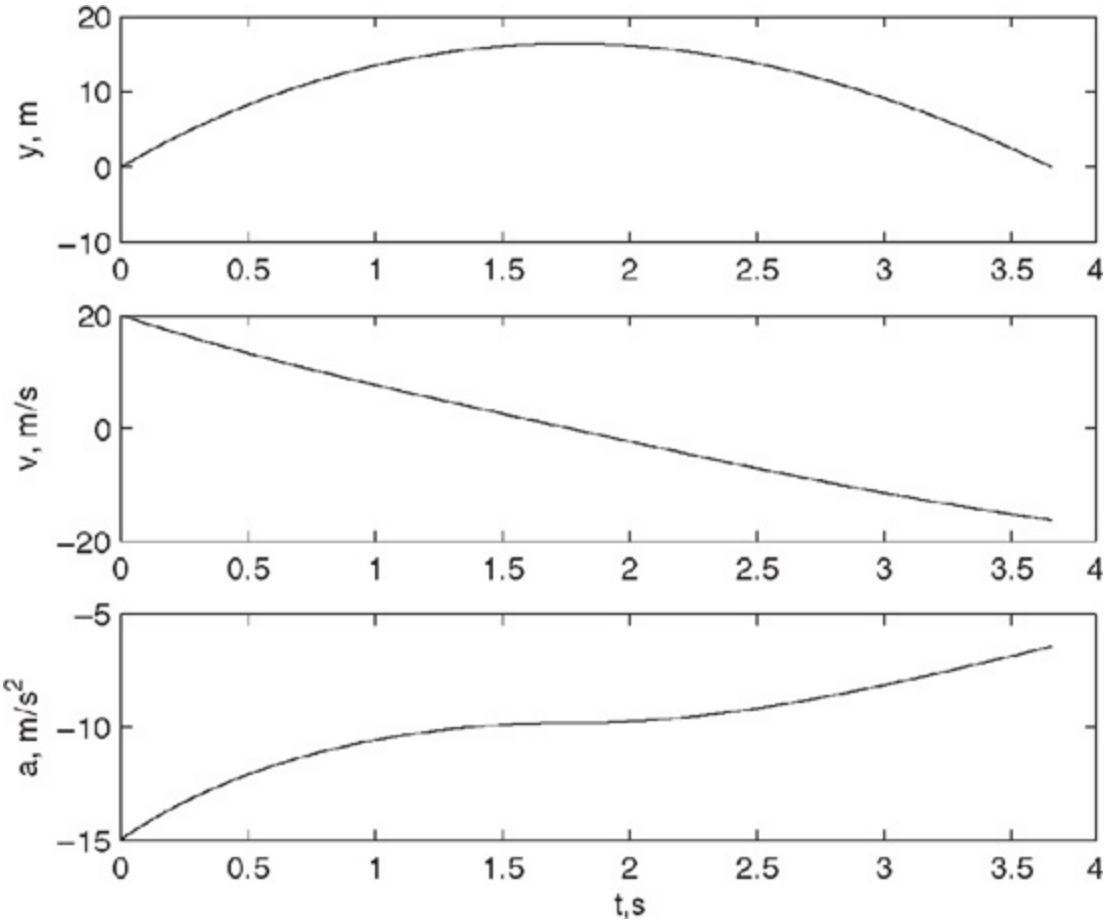


Figura 12.18 Simulação da trajetória de uma bola usando o MATLAB.

PROBLEMAS

1. **Funções Matemáticas no MATLAB**

   Escreva funções do MATLAB para as seguintes funções matemáticas:

$$f(x) = 2x + 7$$
$$g(x, y) = x^2 + 2y^2$$

   Escreva comandos do MATLAB para calcular o valor das expressões matemáticas a seguir, usando as funções definidas acima. Mostre os resultados.

(a) $f(1)$
(b) $f(2)$
(c) $g(1, 2)$
(d) $g(f(1), f(2))$
(e) $f(g(1, 2))$

2. Funções de Conversão de Unidades

A tabela a seguir mostra a correspondência entre algumas unidades do SI e unidades americanas.

1 metro (m)	=	39,37 polegadas (in)
1 quilômetro (km)	=	0,6214 milha (mi)
1 litro (L)	=	0,2642 galão (gal)
1 quilograma (kg)	=	2,205 libras-massa (lbm)
1 newton (N)	=	0,2247 libra (lb)

(a) Escreva um pacote de funções do MATLAB para converter as unidades do SI para unidades americanas e vice-versa com base na tabela acima. Use a seguinte convenção para os nomes das funções: `y = A_B(x)`, onde `A` e `B` são os símbolos das unidades. Assim, por exemplo, a função que converte polegadas em metros deve ser `y = in_m(x)`. Teste todas as funções no MATLAB mostrando que `A_B(B_A(x))` é igual a `x`.

(b) Usando as funções do item anterior, escreva as funções `miph_mps` e `mps_miph` que convertem a velocidade de milhas por hora em metros por segundo e vice-versa. Teste essas funções convertendo 30 metros por segundo para milhas por hora e 60 milhas por hora para metros por segundo.

3. Funções e Espaços de Trabalho do MATLAB

Considere a seguinte função, `sete`, que retorna o valor `7` quaisquer que sejam os valores de entrada `x` e `y`:

```
function z = sete(x,y)
% sempre retorna o valor 7
x = 7; y = x; z = y;
```

Se definirmos as variáveis `w`, `x`, `y` e `z` no espaço de trabalho global e chamarmos a função `sete`, quais serão os valores dessas variáveis depois que a função for executada?

```
>> w = 0;
>> x = 1;
>> y = 2;
>> z = 3;
>> w = sete(x,y)
```

Responda à pergunta *antes* de executar a função e justifique sua resposta. Execute a função e verifique se sua resposta foi correta. Caso a resposta não coincida com os valores observados, tente explicar o que aconteceu.

4. Modelo Teórico de um Sistema de Lançamento Usando o MATLAB

Um sistema de lançamento de projéteis está sendo desenvolvido. Neste exercício, você vai formular um modelo simples do sistema e usá-lo para verificar o efeito dos parâmetros de lançamento sobre a distância atingida pelo projétil antes de atingir o solo.

O sistema de lançamento é uma atiradeira constituída por uma tira de borracha, com uma bolsa no ponto médio, presa a uma armação, como mostra a Figura P12.1. Para usar a atiradeira, a altura y onde está presa a tira de borracha e a distância horizontal de recuo x entre o mecanismo de disparo e a armação são ajustadas. Em seguida, a tira é esticada até o mecanismo de disparo, presa no lugar, e um projétil é introduzido na bolsa. Quando o mecanismo de disparo é acionado, o projétil é lançado com um ângulo que depende da altura y e da distância de recuo x, com uma velocidade inicial que depende do alongamento sofrido pela tira de borracha. Depois do lançamento, a trajetória do projétil é determinada pelas Leis de Newton e a distância

atingida depende das forças que agem sobre o projétil, como a força da gravidade, a força do vento e a força de arrasto.

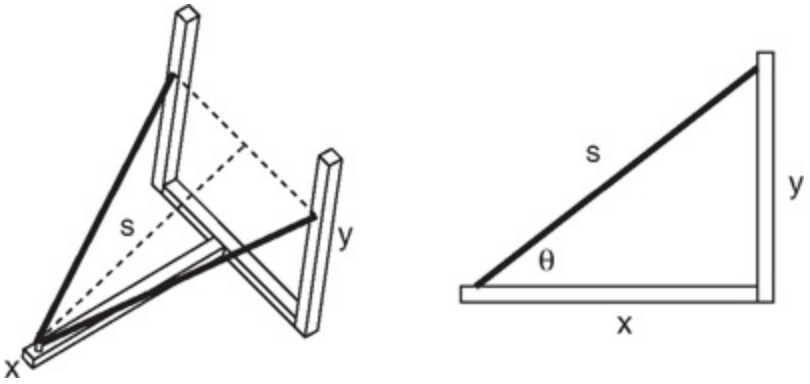


Figura P12.1 Geometria do sistema de lançamento.

O processo de lançamento pode ser modelado por uma única função

```
d = alcance(x,y)
```

que calcula a distância `d` percorrida pelo projétil a partir dos parâmetros `x` e `y` do sistema de lançamento, mostrados na Figura P12.1. Como visto na Figura P12.2, este modelo pode ser decomposto em duas partes: *propulsão*, que modela a atiradeira, e *trajetória*, que modela o movimento do projétil após o lançamento.

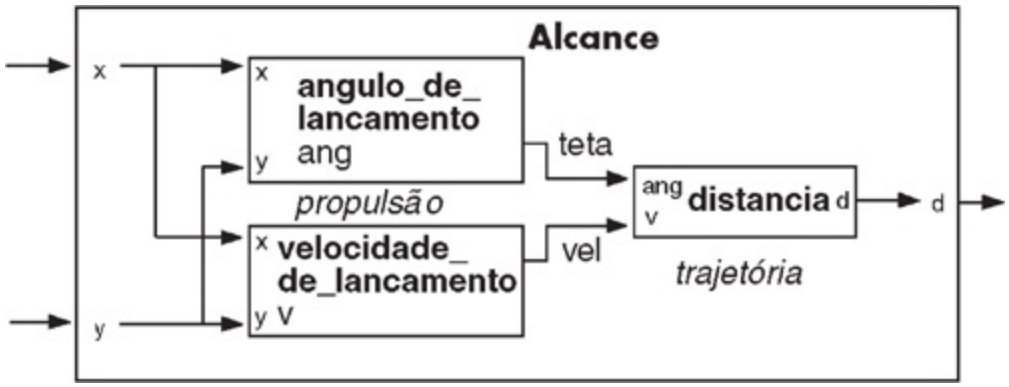


Figura P12.2 Funções usadas para modelar o lançamento de um projétil.

A parte de propulsão do modelo é composta por duas funções,

```
ang = angulo_de_lancamento(x,y)
v = velocidade_de_lancamento(x,y)
```

que calculam o ângulo de lançamento e a velocidade inicial do projétil, respectivamente, a partir dos parâmetros horizontal (x) e vertical (y) do sistema de lançamento. A parte de trajetória do modelo é composta por uma única função, `d = distancia(ang,v)`, que calcula a distância percorrida por um projétil lançado com um dado ângulo e uma dada velocidade inicial. Para completar o modelo do processo de lançamento, execute as tarefas a seguir.

(a) Escreva uma descrição da função `alcance` cujo fluxograma aparece na Figura P12.2. A descrição deve incluir os seguintes tópicos: o objetivo da função, uma lista das entradas e saídas e um resumo dos passos envolvidos na computação. Acrescente as ilustrações que julgar necessárias.

(b) Escreva uma descrição da função `angulo_de_lancamento` nos mesmos moldes do item anterior. Use as relações trigonométricas necessárias para calcular o ângulo de lançamento a partir dos parâmetros de lançamento. Implemente a função no MATLAB e teste-a separadamente antes de prosseguir. Descreva e mostre os resultados do seu teste.

(c) A velocidade inicial do projétil depende do alongamento sofrido pela tira de borracha antes do lançamento, que, por sua vez, pode ser calculado a partir dos parâmetros de lançamento. Se não havia nenhuma folga antes de a tira ser esticada, o alongamento é dado pela distância s da Figura P12.1. Suponha que tenha sido determinado experimentalmente que a relação entre a velocidade de lançamento v em m/s e o alongamento s em m é

$$v = 22s$$

Dada esta informação, crie a função `velocidade_de_lançamento` nos mesmos moldes do item (b), escrevendo uma descrição,

implementando a função no MATLAB e testando a função.

(d) É possível demonstrar que, desprezando a força do vento e a força de arrasto, a distância horizontal em metros coberta, em terreno plano, por um projétil lançado com uma velocidade v em m/s e um ângulo θ em radianos com a horizontal é dada por

$$d = \frac{2v^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{9{,}81}$$

Dada esta informação, crie a função `distancia` nos mesmos moldes do item anterior.

(e) Implemente a função `alcance` no MATLAB, usando as funções criadas nos itens anteriores.

(f) Use a função `alcance` para determinar, por tentativas, os parâmetros de lançamento necessários para que o projétil atinja uma distância de 1001 m. Descreva a estratégia que você usou para determinar os parâmetros. Quantas tentativas foram necessárias e quais foram as distâncias atingidas nessas tentativas?

5. Gráficos Vetoriais

Antes que fossem lançados monitores baratos com um grande número de *pixels*, os programas para gerar gráficos em computadores usavam *gráficos vetoriais*, nos quais as imagens eram produzidas traçando linhas retas entre pontos. Um dos primeiros videogames para fliperamas, chamado *Battle Zone*, é um exemplo clássico do uso de gráficos vetoriais.

Podemos produzir gráficos vetoriais no MATLAB usando o comando `plot`. Embora este comando seja normalmente usado para plotar funções, é capaz de traçar retas entre pontos sem nenhuma dificuldade. Assim, por exemplo, plotando os vetores `x` e `y` definidos a seguir, obtemos a forma geométrica que aparece

no lado esquerdo da Figura P12.3.

```
>> x = [1 2 1 0 1];
>> y = [0 1 2 1 0];
>> plot(x,y);
>> axis ([0 6 0 6])
```

As formas geométricas podem ser submetidas a uma *mudança de escala* multiplicando-se por uma constante os vetores das coordenadas x e y. Podem também ser submetidas a uma *translação* para a esquerda ou para a direita somando-se uma constante ao vetor da coordenada x e a uma translação para cima ou para baixo somando-se uma constante ao vetor da coordenada y. Assim, por exemplo, a forma geométrica que aparece no lado direito da Figura P12.3 foi produzida com os seguintes comandos:

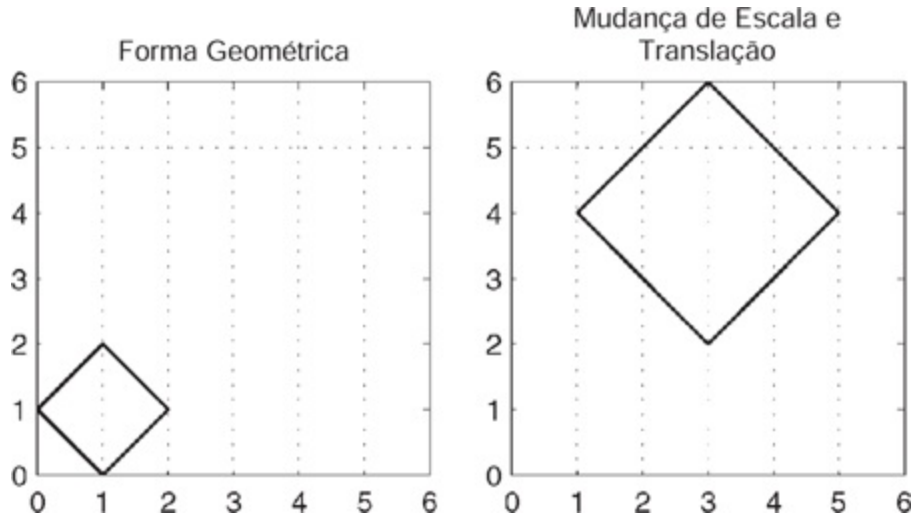


Figura P12.3 Formas geométricas desenhadas usando-se o comando plot.

```
>> plot(2*x+1,2*y+2);
>> axis ([0 6 0 6])
```

Neste problema, você vai escrever um pacote de funções de gráficos vetoriais que usam o comando `plot` do MATLAB para desenhar quadrados, triângulos e circunferências que podem ser submetidos a mudanças de escala e translações.

(a) Escreva uma função `quadrado(s,tx,ty)`, onde `s` é o fator de escala, `tx` é a translação para a direita e `ty` é a translação para cima. A Figura P12.4(a) mostra o quadrado traçado pela função com fator de escala 1 e translação 0.

(b) Escreva uma função `triangulo(s, tx, ty)` que trace o triângulo mostrado na Figura P12.4(b) com fator de escala 1 e translação 0.

(c) Escreva uma função `circunferencia(s, tx, ty)` que trace a circunferência mostrada na Figura P12.4(c) com fator de escala 1 e translação 0, usando um polígono de 100 lados como aproximação para a circunferência. Para calcular as coordenadas *x* e *y* dos vértices do polígono, defina um vetor `teta` que é uma série de ângulos de 0 a 2π em incrementos de $0{,}02\pi$. As coordenadas *x* dos vértices são dadas por `cos(teta)` e as coordenadas *y* são dadas por `sen(teta)`.

(d) Escreva um script para chamar as funções que você escreveu e fazer um desenho simples, como o que aparece na Figura P12.5.

6. Quantia Total em Moedas

Você vai criar uma função para determinar o valor, em reais, de um conjunto de moedas de 1, 5, 10 e 25 centavos.

(a) Escreva uma descrição em pseudocódigo da função, especificando claramente o objetivo da função, suas entradas e suas saídas.

(b) Implemente a função em MATLAB.

(c) Teste a função usando os seguintes conjuntos de dados de entrada: 3 moedas de 5 centavos, 7 moedas de 25 centavos, 4 moedas de 10 centavos e 2 moedas de 1 centavo; 3 moedas de 10 centavos, 7 moedas de 1 centavo, 1 moeda de 25 centavos e 2 moedas de 5 centavos.

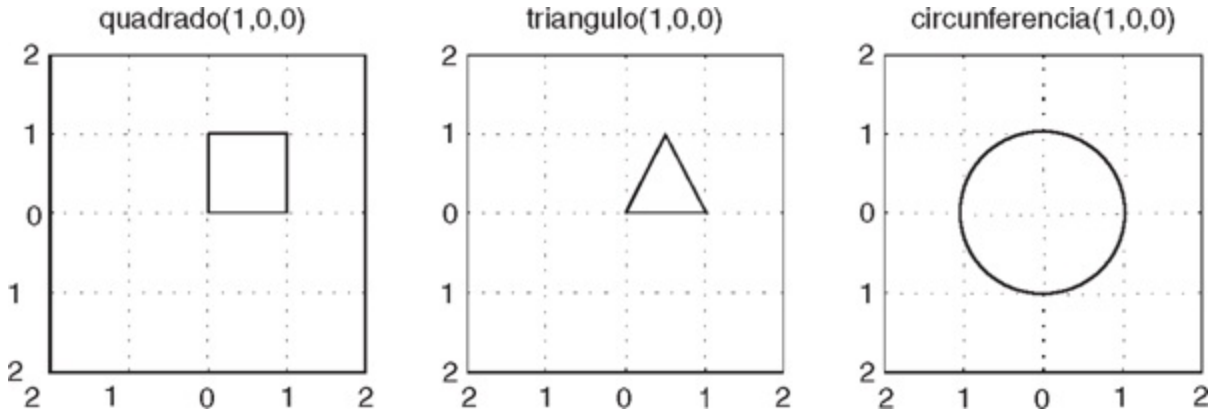


Figura P12.4 Quadrado (a), triângulo (b) e circunferência (c) gerados por funções de gráficos vetoriais.

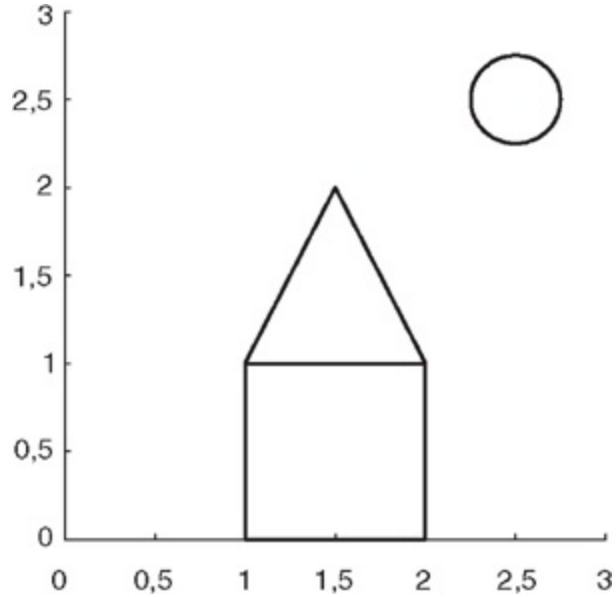


Figura P12.5 Desenho criado a partir de formas geométricas geradas por funções de gráficos vetoriais.

7. Vetores, Ramificações Condicionais e Loops no MATLAB

Qual é o valor de `x` no final da execução dos scripts do MATLAB a seguir? Procure descobrir a resposta sem executá-los no computador; depois, verifique se a solução está correta digitando-os na janela de comando do MATLAB. Se não compreender como funciona algum dos scripts, execute-o passo a passo usando o debugger do MATLAB.

```
(a) x = 0:2:10
```

```
(b) x = 0:2:11
(c) x = 0:3; i = 4; x(i+1) = x(i) + 2;
(d) n = 17; x = 0;
while (n > 1)
n = n/2;
x = x + 1;
end
(e) x = 1;
for i = 1:5
x = x*i;
end
(f) x(1) = 0; i = 1;
while x(i) < 5
if x(i) < 3
a = 1;
else
a = 0.5;
end
x(i+1) = x(i) + a;
i = i + 1;
end
(g) x = 5; x = foo(x);
onde a função foo(x) é dada por
function y = foo(a)
x = 1;
y = a + x;
```

8. Fatorial

Escreva duas versões de uma função do MATLAB chamada `fatorial(n)` para calcular o produto de números inteiros de 1 a *n*, uma usando o comando `while` e outra usando o comando `for`.

Teste a função comparando os resultados com os da função `factorial`, uma função nativa do MATLAB.

9. **Multiplicação de Vetores**

   Escreva uma função do MATLAB chamada `multvet(x,y)` para multiplicar, elemento por elemento, os vetores, `x` e `y`. Teste a função comparando os resultados com os do operador "`.*`" do MATLAB.

10. **Determinação do Valor Máximo de um Vetor pelo Método da Força Bruta**

    Escreva uma função do MATLAB chamada `maximo(x)` para determinar o valor máximo do vetor x. O programa deve implementar o algoritmo descrito a seguir.

```
Inicialize o valor do máximo com o menor
  número que o MATLAB é capaz de representar
  (a variável nativa realmin)
FOR cada elemento do vetor
  IF o elemento corrente for maior que o
    máximo corrente
    Faça o máximo corrente igual ao
      elemento corrente
Mostre o máximo corrente
```

Teste a função comparando os resultados com os da função `max`, uma função nativa do MATLAB.

11. **Determinação do Máximo Divisor Comum pelo Método de Euclides**

    O algoritmo a seguir foi proposto por Euclides para determinar o máximo divisor comum de dois números inteiros positivos, n_1 e n_2, com $n_1 > n_2$:

```
Faça a variável q igual a n1 e a variável p
  igual a n2
Faça a variável r igual ao resto da divisão
  de q por p
WHILE r diferente de zero
  Faça q igual a p
  Faça p igual a r
  Faça r igual ao resto da divisão de q por p
Mostre p como o máximo divisor comum
```

Implemente este algoritmo como uma função do MATLAB chamada `mdc(n1,n2)`. Use uma função nativa do MATLAB (`mod` ou `rem`) para calcular o resto da divisão de dois números inteiros. Teste a função comparando os resultados com os de `gcd`, uma função nativa do MATLAB.

12. Teste de Divisibilidade

Escreva uma função do MATLAB chamada `soma_nd_35` para calcular a soma dos números do intervalo de 1 a *n* que não são divisíveis por 3 nem por 5. Use um comando do tipo `if-else` e a função resto `rem`.

13. Expressões Lógicas Equivalentes

Dizemos que duas expressões lógicas são *tautologicamente equivalentes* (⇔) se, para todas as combinações possíveis de entradas, o valor de verdade obtido é o mesmo. De acordo com a regra de DeMorgan, se `A` e `B` são duas expressões lógicas válidas,

```
~A & ~B  ⇔  ~(A | B)
~A | ~B  ⇔  ~(A & B)
```

Com o auxílio da regra de DeMorgan, escreva duas versões de uma função chamada `no_intervalo` que recebe como entrada três

números, `x`, `y` e `z` e fornece como saída o valor 1 se `y` está no intervalo entre `x` e `z`, inclusive, e 0 se `y` não está no intervalo. As duas versões devem usar apenas os operadores especificados a seguir:

- a versão 1 deve usar apenas os operadores relacionais $<$ e $>$ e os operadores lógicos $\sim$ e &.
- a versão 2 deve usar apenas os operadores relacionais $<$ e $>$ e os operadores lógicos $\sim$ e |.

Não é permitido usar o operador `if`.

14. Tabulação dos Resultados de uma Prova

(a) Use as funções estatísticas do MATLAB para escrever um script que:

- cria um vetor com cinco notas entre 0 e 10, de sua livre escolha
- calcula e mostra a média das notas
- calcula e mostra o desvio padrão das notas

(b) Escreva um script do MATLAB semelhante ao do item anterior, mas desta vez as cinco notas devem ser digitadas durante a execução do script. As notas devem ser guardadas em um vetor; em seguida, a média e o desvio padrão devem ser calculados e mostrados.

(c) No script que você escreveu no item anterior, o número de notas era conhecido de antemão (era 5). Escreva agora um programa semelhante para o caso em que o número de notas não é conhecido previamente. Isso significa que o programa deve funcionar, qualquer que seja o número de valores de entrada. Uma forma de fazer isso se baseia no fato de que a nota de uma prova nunca é negativa. Assim, um valor de entrada negativo pode ser usado como uma indicação de

"final de entrada de dados", também conhecido como *sentinela*. Mais uma vez, os números devem ser guardados em um vetor. Você pode supor que sempre vai haver pelo menos uma nota. O programa deve mostrar o número de dados de entrada (excluindo a sentinela, é claro) antes de exibir a média e o desvio padrão.

15. Simulação de uma Torneira Pingando

Uma torneira está pingando à taxa de uma gota de 0,1 mililitro a cada 3 segundos. Escreva um script do MATLAB para plotar a quantidade de água perdida em 1 hora.

16. Uma Varredura Paramétrica Usando Loops

Escreva um script semelhante ao do Problema 10.6d usando dois "loops aninhados" para automatizar a geração das curvas. Desta vez, plote a distância em função do parâmetro vertical do sistema de lançamento para seis valores diferentes da constante de lançamento, em vez de três. O script deve implementar o algoritmo descrito a seguir.

```
% Loop externo
FOR constante de lançamento de 45 a 55, a
 intervalos de 2
 % Loop interno
 FOR parâmetro vertical variando de 0 a
 2, a intervalos de 0,1
 Inclua o parâmetro vertical corrente
        em um vetor
 Calcule o alcance corrente e inclua em
        um vetor
 Plote o alcance em função do parâmetro
        vertical
 Mantenha os eixos de plotagem correntes
```

```
Acrescente título, nomes dos eixos e
legendas ao gráfico
```

17. Jogando um Computador pela Janela

Depois de se ver às voltas com uma série de erros inexplicáveis, e convencido de que a velha estação de trabalho UNIX era muito mais confiável, um certo professor de engenharia jogou seu novo computador pessoal pela janela do último andar do edifício mais alto do campus. Você foi incumbido de estimar o tempo que o computador levou para chegar ao solo.

(a) Use o método de Euler *manualmente* (ou seja, apenas com papel, lápis e uma calculadora aritmética) para obter uma estimativa grosseira do tempo de queda, com um acréscimo de tempo de 0,5 s.

(b) Aumente a precisão do resultado escrevendo um script do MATLAB para implementar o método de Euler e plotar a altura e a velocidade do "projétil" em função do tempo. Use um acréscimo de tempo de 0,01 s.

(c) Escreva um projeto de cima para baixo e um plano de implementação e testes de baixo para cima *antes* de digitar o script no computador. Inclua um comentário no início do programa informando o que o programa faz, quem o escreveu e quando foi escrito. Inclua também comentários para descrever as variáveis e suas unidades.

(d) Na discussão dos resultados, comente a respeito da importância do acréscimo de tempo. Quando o acréscimo de tempo é excessivo, a tendência é no sentido de que o tempo necessário para o projétil chegar ao solo seja superestimado ou subestimado? Justifique sua resposta.

18. Simulação do Movimento de um Bloco em um Plano Inclinado

A taxa de variação da velocidade, $\Delta V(t)/\Delta t$, de um bloco que escorrega em um plano inclinado é dada por

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = g \cdot [\text{sen}\theta - \mu \cos\theta]$$

onde g, θ e μ são parâmetros constantes que influenciam o comportamento do bloco:

- g é a aceleração da gravidade (9,81 m/s^2),
- θ é o ângulo de inclinação do plano,
- μ é o coeficiente de atrito dinâmico.

Note que a aceleração do bloco (ou seja, a taxa de variação da velocidade) não depende do peso, algo que você vai aprender nas aulas de mecânica.

Supondo que $\theta = 40^\circ$ e $\pi = 0{,}15$, use o método de Euler para encontrar uma solução numérica que permita prever a velocidade do bloco em função do tempo. Suponha que o bloco começa a se mover a partir do repouso e responda às seguintes perguntas:

(a) Qual é a velocidade do bloco após 4 segundos?
(b) Quanto tempo o bloco leva para descer um plano inclinado com 3 m de comprimento?
(c) Qual é a influência sobre o resultado do acréscimo de tempo (Δt) escolhido para aplicar o método de Euler?

19. Viajando de Carro nos Estados Unidos

Suponha que você está viajando de carro para oeste na Rodovia I-90 e quando passa pela divisa dos estados de Indiana e Illinois sua velocidade é de 65 milhas/hora. Como está se aproximando da região metropolitana de Chicago, sua velocidade nos 45 minutos seguintes é dada pela equação exponencial $v(t) = 65e^{-4t}$, onde t é o tempo (em horas) a partir do instante em que você entrou no estado de Illinois e $v(t)$ é a velocidade em milhas/hora.

Usando o método de Euler, plote a velocidade (em milhas/hora) e a distância percorrida por seu carro a partir da divisa (em milhas) em função do tempo para os 45 minutos que se seguem ao instante em que você cruzou a divisa.

20. Empurrando um Carro

Você e um amigo precisam empurrar um carro enguiçado para dentro de uma garagem. A pista de acesso à garagem é reta e plana. A parede dos fundos da garagem está a 20 m de distância da frente do carro e a garagem tem 5 m de profundidade. O carro tem uma massa de 1000 kg e 3 m de comprimento. Supondo que você e seu amigo são capazes de empurrar o carro com uma força constante de 800 N e que os rolamentos das rodas produzem uma força de atrito constante de 300 N, por qual distância vocês devem empurrar o carro antes de soltá-lo para que ele role para o interior da garagem sem bater na parede dos fundos?

Embora seja possível resolver o problema analiticamente, sua tarefa é criar um modelo numérico para o movimento do carro e usar esse modelo para buscar uma solução. Mais especificamente, você deve escrever uma função do MATLAB que use o modelo de Euler para calcular a distância total percorrida pelo carro para uma dada distância ao longo da qual o carro é empurrado. Uma vez criado o modelo, você poderá testá-lo para diferentes distâncias até encontrar uma que seja aceitável.

(a) Usando uma metodologia de projeto de cima para baixo e implantação de baixo para cima, escreva uma função do MATLAB para determinar a distância total percorrida pelo carro para uma dada distância ao longo da qual o carro é empurrado. Pense na simulação como tendo duas fases que podem ser modeladas separadamente:

- *Fase na qual o carro é empurrado.* O carro é acelerado, a partir do repouso, por uma força constante $F_{\text{tot}} = F_{\text{emp}} -$

F_{atrito} ao longo de uma distância D_{emp}. No final desta fase, o carro possui uma certa "velocidade de lançamento" v_0.

- *Fase na qual o carro rola livremente*. Partindo da distância D_{emp} com uma velocidade inicial v_0, o carro é freado por uma força constante F_{atrito} até parar, depois de percorrer uma distância D_{total}.

A função criada por você deve usar o método de Euler para simular o movimento do carro nas duas fases, gerar gráficos da velocidade em função do tempo e da posição em função do tempo e fornecer a distância total percorrida pelo carro no final da segunda fase.

(b) Depois que a função estiver implementada, use-a para buscar um valor de D_{emp} que atenda às exigências do problema. Você pode fazer isso simplesmente chamando a função a partir da linha de comando com diferentes valores de D_{emp} ou, se estiver se sentindo criativo e ambicioso (e já tiver encontrado a resposta da maneira "fácil"), pode tentar escrever um script para automatizar o processo. Não se esqueça de indicar qual é o valor "aceitável" de D_{emp} e de gerar os gráficos da velocidade em função do tempo e da posição em função do tempo para esse valor de D_{emp}.

(c) O resultado parece aceitável? Justifique sua resposta.

21. Simulação de um Sistema de Propulsão Amortecido

O sistema de propulsão de um automóvel pode ser modelado como um sistema dinâmico com uma entrada $u(t)$ (que representa a posição do acelerador) e uma saída v (t) (que representa a velocidade do veículo), relacionadas através da equação

$$\frac{\Delta v(t)}{\Delta t} + p \cdot v(t) = b \cdot u(t)$$

onde p é o *fator de amortecimento* e b é uma constante. O sistema pode ser simulado pelo seguinte script do MATLAB:

```
dt = 0.01;
p = 3.8;
b = 27;
u(1) = 1;
v(1) = 0;
a(1) = b*u(1) - p*v(1);

for i=1:200
    u(i+1) = u(i);
    v(i+1) = v(i) + a(i)*dt;
    a(i+1) = b*u(i) - p*v(i+1);
end
```

Este script do MATLAB simula 2,0 segundos de funcionamento do automóvel quando o veículo parte do repouso, $v(1) = 0$, e a entrada é um "degrau unitário", ou seja, o acelerador é apertado de 1,0 unidade no instante inicial e mantido na mesma posição até o final. (Note que o valor do índice `i` corresponde ao instante $t = (i - 1) \cdot \Delta t$ e, portanto, `i = 1` corresponde ao instante $t = 0$ e `i = 201` corresponde ao instante $t = 2{,}0$ s.) Você pode plotar a velocidade e a aceleração do carro em função do tempo usando os seguintes comandos do MATLAB:

```
tempo = 0:0.01:2.0;
figure(1)
plot(tempo,v)
figure(2)
plot(tempo,a)
```

(a) Execute o script do MATLAB e plote os resultados. Observe que a velocidade começa em zero e tende para uma velocidade final $b/p = 27/3{,}8 = 7{,}1$ unidades. Observe também que a aceleração começa em 27 unidades e tende para zero. Plote a velocidade e a aceleração para este caso. Acrescente os dísticos das escalas e um título que informe o número do problema e o que está sendo plotado, como, por exemplo, "Problema 21, Figura 2: Aceleração $\times$ Tempo ($p =$

3,8 e $b = 27$)". Não se esqueça de incluir no título os valores de p e b!

(b) Mude o script para que a função de entrada seja $u(t) = 1{,}0$ no primeiro segundo da simulação e $u(t) = 0{,}5$ no segundo segundo da simulação. Plote a velocidade e a aceleração para este caso.

(c) Faça variar o fator de amortecimento p e a constante b e observe os efeitos desses parâmetros sobre a velocidade final e sobre a aceleração. Em particular, compare ($p = 3{,}8$ e $b = 27$) com ($p = 38$ e $b = 270$). Plote a velocidade e a aceleração para este caso. Faça alguns comentários a respeito de suas observações.

22. Trajetória de uma Bola sem Arrasto

Escreva uma função do MATLAB da forma `d = tpsa(v0, teta0)` para determinar a distância horizontal `d` percorrida por um projétil antes de atingir o solo depois de ser lançado no vácuo com uma velocidade inicial de módulo `v0` e ângulo `teta0` com a horizontal. A função deve usar o método de Euler para determinar a trajetória e calcular as seguintes grandezas para cada instante de tempo i:

- distância horizontal em relação à origem, `x(i)`
- distância vertical em relação à origem, `y(i)`
- velocidade horizontal, `vx(i)`
- velocidade vertical, `vy(i)`
- módulo da velocidade total, `v(i)`
- ângulo da velocidade total, `teta(i)`

Além de fornecer a distância horizontal, a função deve também produzir gráficos (alinhados verticalmente em uma única figura)

de `y` em função de `x`, `v` em função de `x` e `teta` em função de `x`.

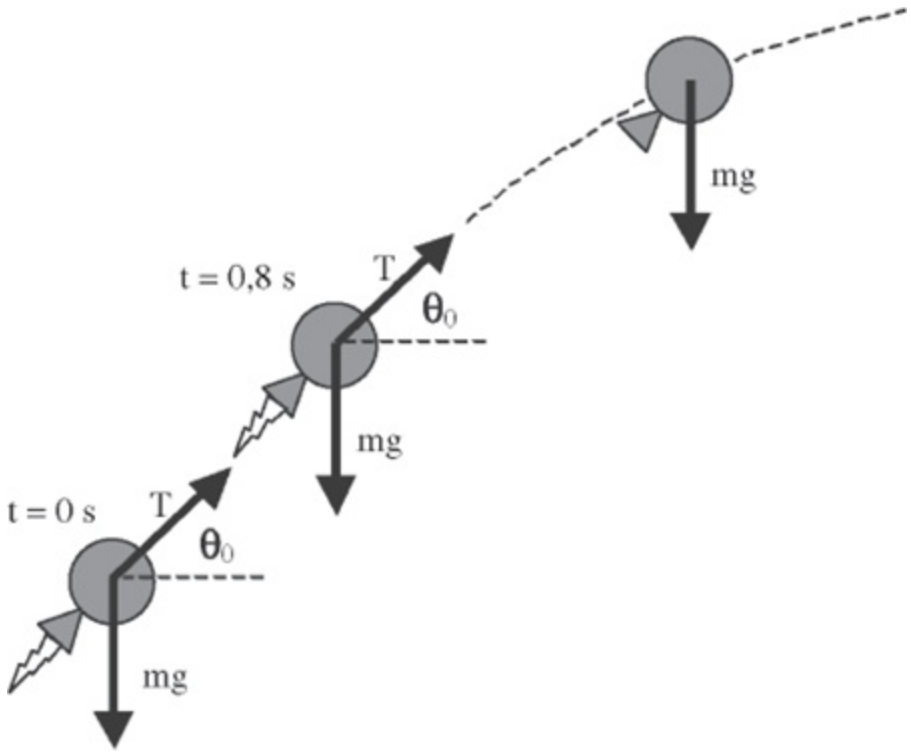
(a) Use a função `tpsa` para determinar a distância horizontal coberta por uma bola de *softball* com uma velocidade inicial de 25 m/s e um ângulo inicial de 45°. Considere os gráficos de `y` em função de `x`, `v` em função de `x` e `teta` em função de `x` como parte da solução.

(b) Use a função `tpsa` para determinar a velocidade inicial (m/s) para a qual a bola cobre uma distância horizontal de 50 m quando é lançada com um ângulo de 40°. Considere os gráficos de `y` em função de `x`, `v` em função de `x` e `teta` em função de `x` como parte da solução.

(c) Use a função `tpsa` para determinar dois ângulos diferentes (em graus) para os quais a bola cobre uma distância horizontal de 55 m quando é lançada com uma velocidade inicial de 25 m/s. Considere os gráficos de `y` em função de `x`, `v` em função de `x` e `teta` em função de `x` como parte da solução.

23. Trajetória de um Míssil

Um míssil com uma massa de 0,1 kg está equipado com um sistema de propulsão que aplica ao artefato uma força constante $T = 5$ N, fazendo um ângulo constante θ_0 com a horizontal, durante os primeiros 0,8 s após o lançamento. (Depois de 0,8 s, a força deixa de existir instantaneamente.)



Escreva uma função do MATLAB da forma `d = missil(teta0)` para determinar a distância horizontal `d` coberta pelo míssil antes de atingir o solo se ele for lançado no vácuo com um ângulo `teta0`. A função deve usar o método de Euler para determinar a trajetória e calcular as seguintes grandezas para cada instante de tempo `i`:

- distância horizontal em relação à origem, `x(i)`
- distância vertical em relação à origem, `y(i)`
- velocidade horizontal, `vx(i)`
- velocidade vertical, `vy(i)`
- módulo da velocidade total, `v(i)`
- ângulo da velocidade total, `teta(i)`

Além de fornecer a distância horizontal, a função deve também produzir gráficos (alinhados verticalmente em uma única figura) de `y` em função de `x`, `v` em função de `x` e `teta` em função de `x`.

(a) Use a função `missil` para determinar a distância horizontal coberta pelo míssil para um ângulo de lançamento de 45°. Considere os gráficos de `y` em função de `x`, `v` em função de `x` e `teta` em função de `x` como parte da solução.

(b) Use a função `missil` para determinar dois ângulos diferentes (em graus) para os quais o projétil cobre uma distância horizontal de 100 m. Considere os gráficos de `y` em função de `x`, `v` em função de `x` e `teta` em função de `x` como parte da solução.

24. Trajetória de uma Bola com Arrasto

Modifique a função `tpsa` do Problema 22 para criar uma nova função `d = tpca(v0, teta0, m, A, Cd)` para calcular a distância horizontal coberta por um projétil lançado com velocidade inicial `v0` e ângulo `teta0` e sujeito a uma força de arrasto. Os parâmetros `m`, `A` e `Cd` são, respectivamente, a massa, a área da seção reta do projétil e o coeficiente de arrasto do projétil. Use unidades do SI para todas as grandezas, e graus para o ângulo `teta0`. A massa específica do ar é 1,225 kg/m^3 e o coeficiente de arrasto de uma esfera é 0,5. Além de fornecer a distância horizontal, a função `tpca` deve também produzir um gráfico da altura em função da distância.

Lembre-se de que, na presença de uma força de arrasto, a aceleração varia com a velocidade. Neste problema, portanto, é preciso calcular novos valores das acelerações horizontal e vertical para cada instante de tempo.

(a) Use a função `tpca` para determinar a distância horizontal coberta por uma bola com uma massa de 0,2 kg e um raio de 0,05 m, lançada com uma velocidade inicial de 25 m/s e um ângulo inicial de 45°. Considere um gráfico de `y` em função de

`x` como parte da solução.

(b) Use a função `tpca` para determinar qual deve ser a velocidade inicial (em m/s) para que a bola cubra uma distância horizontal de 50 m ao ser lançada com um ângulo de 40°. Plote `y` em função de `x` para esse valor da velocidade inicial.

(c) Use a função `tpca` para determinar qual deve ser o ângulo inicial para que a bola atinja a maior distância horizontal possível ao ser lançada com uma velocidade inicial de 25 m/s. Plote `y` em função de `x` para esse valor do ângulo inicial.

[1]Ao contrário das funções matemáticas, as funções do MATLAB também podem ter mais de uma variável de saída, mas este fato será ignorado na discussão que se segue.

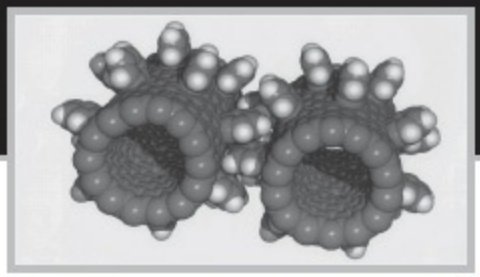
[2]A resposta do programa não corresponde perfeitamente à realidade se a água estiver exatamente a 0°C ou a 100°C. Nessas temperaturas, a água está sofrendo uma transformação de fase e é uma mistura de gelo e líquido e líquido e vapor, respectivamente.

[3]O MATLAB foi criado na década de 1970 a partir de um pacote de sub-rotinas de domínio público escritas em FORTRAN, conhecido como Linear Algebra Package ou LAPACK. O LAPACK está disponível, gratuitamente, no site www.netlib.org.

[4]A rigor, seria necessário verificar também se os dois vetores são do mesmo tipo (linha ou coluna), mas este detalhe foi deixado de lado para não complicar demais o programa.

APÊNDICE

A



Processo de Resolução de Problemas

Etapa 0: Eu Posso Tenha uma atitude positiva: encare o problema como um desafio e não desista facilmente!

1ª Etapa: Definir Certifique-se de que entendeu perfeitamente o problema antes de tentar resolvê-lo.

- Identifique as grandezas conhecidas e desconhecidas do problema.
- Desenhe um diagrama e defina o problema em termos de variáveis.
- Escreva o problema em termos mais claros ou mais específicos.

2ª Etapa: Explorar Uma fase de pré-planejamento. O que realmente está sendo pedido? Que estratégias gerais podem ser usadas? Quais são as informações necessárias?

- O problema faz sentido?
- Quais são os conceitos importantes e as abordagens possíveis?
- É preciso fazer suposições?
- Que níveis de entendimento são necessários?

3ª Etapa: **Planejar** Determine quais são os passos necessários para resolver um problema *antes* de investir recursos na implementação de uma solução.

- Esta é a parte mais difícil do processo.
- Se tiver dificuldades para "deslanchar", recorra a heurísticas.
- Os mapas conceituais são uma forma conveniente e dinâmica de organizar um plano.

4ª Etapa: Implementar A parte de "resolver o problema", na qual as equações são geralmente escritas e resolvidas.

- Não inicie a etapa de implementação sem passar pela etapa de planejamento.
- Se estiver encontrando dificuldades nesta etapa, considere a possibilidade de voltar à etapa de planejamento e mudar alguma coisa.

5ª Etapa: Verificar Convença-se de que a resposta está correta.

- Faça o teste de sanidade: a resposta faz sentido?
- Use casos de teste: verifique se a sua solução leva ao resultado correto em casos nos quais a resposta é óbvia ou conhecida.

6ª Etapa: Generalizar Aprenda com a experiência de resolver o problema.

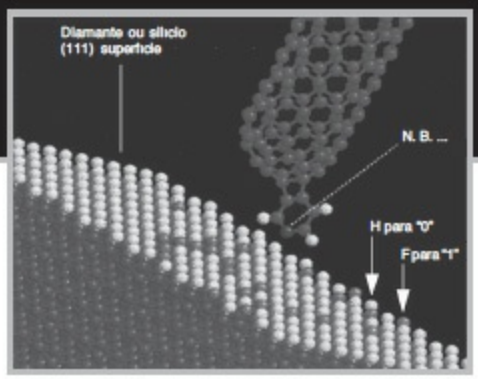
- Você aprendeu novos fatos específicos?
- Poderia ter resolvido o problema de modo mais eficiente?
- A solução pode ser aplicada a outros tipos de problema?
- Você cometeu algum erro ou engano que requer de você tomar cuidado para não repetir no futuro?

7ª Etapa: Apresentar os Resultados Divulgue os resultados e os métodos que usou para obtê-los.

- Seja claro.
- Forneça instruções detalhadas.
- Seja caprichoso.

APÊNDICE

B



A Taxonomia de Bloom: Níveis de Entendimento

Níveis de entendimento da Taxonomia de Bloom, do mais simples ao mais complexo.

Conhecimento: busca de fatos na memória

Palavras-chave: diga quem, diga o quê, diga quando, diga onde, identifique, escolha, defina, lembre, diga

Compreensão: entendimento do significado

Palavras-chave: diga em suas próprias palavras, resuma, explique, esclareça, classifique, diga qual é o significado, interprete, dê um exemplo, diga que parte não combina, diga qual é a melhor explicação

Aplicação: uso em novas situações

Palavras-chave: aplique, use, formule, demonstre, preveja, explique como, diga o que aconteceria se, mostre que, descubra

Análise: divisão em partes

Palavras-chave: divida, diga que ideias se aplicam, compare, confronte, diga qual é a relação entre, diga quais são as conclusões, decomponha, diga qual é a razão, diga o que pode ter causado

Síntese: integração de várias partes

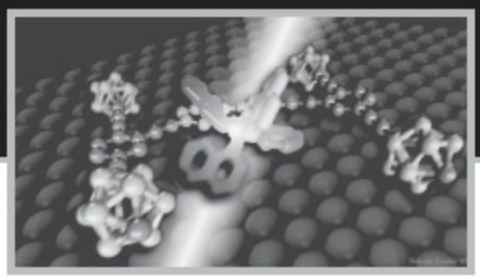
Palavras-chave: crie, componha, projete, invente, desenvolva, resolva, formule, demonstre, planeje

Avaliação: uso do bom senso para chegar a uma decisão

Palavras-chave: julgue, otimize, diga qual é o melhor, decida, estime, critique, defenda, avalie, diga qual é o mais adequado

APÊNDICE

C



Sociedades de Engenharia e Organizações de Classe

Apresentamos a seguir uma lista parcial de associações de classe para engenheiros nos Estados Unidos. Uma lista maior, com links para os sites correspondentes na web, está disponível no site do Sloan Career Cornerstone (http://www.careercornerstone.org/assoc.htm).

- Engenharia Aeroespacial
  - Aerospace and Electronics Systems Society of the IEEE
  - Aerospace Industries Association
  - American Astronautical Society
  - American Institute of Aeronautics and Astronautics
  - Society of Flight Test Engineers
- Engenharia Agrícola
  - American Society of Agricultural and Biological Engineers
- Engenharia e Arquitetura
  - American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers
  - Architectural Engineering Institute
  - Association for Computer Aided Design in Architecture

(ACADIA)
  - International Council for Building Research Studies and Documentation
  - The Chartered Institution of Building Services Engineers
- Bioengenharia
  - American Chemical Society
  - American Institute of Chemical Engineers Food, Pharmaceutical and Bioengineering Division
  - American Society for Biochemistry and Molecular Biology
  - American Society of Agricultural and Biological Engineers
  - ASME Bioengineering Division
  - American Society For Microbiology
  - Biomedical Engineering Society
  - Biophysical Society
  - IEEE Engineering in Medicine and Biology Society
  - Institute of Biological Engineering
  - Society for Biological Engineering
  - Society of Industrial Microbiology
- Engenharia Cerâmica
  - The American Ceramic Society
- Engenharia Química
  - American Chemical Society
  - American Institute of Chemical Engineers
  - Association of Consulting Chemists and Chemical Engineers
  - Electrochemical Society
  - Institution of Chemical Engineers
- Engenharia Civil
  - American Society of Civil Engineers
  - American Congress on Surveying and Mapping
  - Institution of Civil Engineers–UK

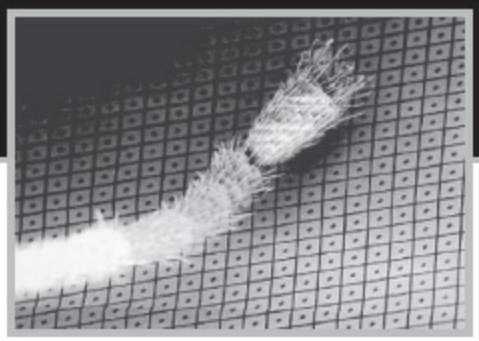
- Engenharia de Computação e Ciência da Computação
  - Association for Computing Machinery
  - Institute of Electrical and Electronics Engineers
  - Computer and Automated Systems Association of SME
  - IEEE Computer Society
- Engenharia Elétrica
  - Institute of Electrical and Electronics Engineers
  - IEEE Student Concourse
  - Institution of Electrical Engineers
  - Institution of Electrical Engineers Student, Education and Careers Area
- Engenharia Ambiental
  - American Academy of Environmental Engineers
  - Air and Waste Management Association
  - American Water Works Association
  - National Ground Water Association
- Engenharia Geológica/Geofísica
  - American Geologic Institute
  - American Geophysical Union
  - Canadian Society of Exploration Geophysicists
  - Environmental and Engineering Geophysical Society
  - Geological Society of America
  - Society of Exploration Geophysicists
- Engenharia Industrial
  - Institute of Industrial Engineers
- Engenharia de Produção
  - Society of Manufacturing Engineers
- Engenharia de Materiais e Ciência dos Materiais
  - The Minerals, Metals and Materials Society

  - The American Ceramic Society
  - Association for Iron and Steel Technology
  - ASM–The Materials Information Society
  - The Materials Research Society
- Engenharia Mecânica
  - American Society of Mechanical Engineers
  - Institution of Mechanical Engineers
- Engenharia Metalúrgica e de Minas
  - American Institute of Mining, Metallurgical, and Petroleum Engineers
  - The Minerals, Metals and Materials Society
  - Society for Mining, Metallurgy, and Exploration
- Engenharia Naval
  - Society of Naval and Marine Engineers
- Engenharia de Petróleo
  - Society of Petroleum Engineers
- Engenharia de Plásticos
  - American Institute of Chemical Engineers
  - Society of Automotive Engineers
  - Society of Manufacturing Engineers
  - Society of Petroleum Engineers
  - The Minerals, Metals and Materials Society
- Engenharia de Soldagem
  - Association of Mechanical Engineers
  - American Welding Society
  - Edison Welding Institute
  - Society of Manufacturing Engineers
  - The Minerals, Metals and Materials Society

APÊNDICE

D

Sistemas de Unidades



O Sistema Internacional de Unidades, SI, é a versão moderna do sistema métrico e foi adotado por quase todos os países do mundo como sistema oficial de unidades para a ciência e para a indústria. A abreviação "SI" vem do nome em francês, *Le Système International d'Unités*, e o sistema é mantido pelo *Bureau International des Poids et Mesures* (BIPM), com sede em Sèvres, na França. O SI é usado atualmente como base para as medidas da vida cotidiana na maioria dos países, com a notável exceção dos Estados Unidos, que utilizam uma mistura de unidades tradicionais inglesas com unidades do SI. Assim, por exemplo, os americanos compram bebidas em garrafas de 2 litros, mas em latas de 12 onças. A gasolina é medida em galões, mas a cilindrada dos automóveis é medida em litros. Neste apêndice, apresentamos um breve sumário do SI e os fatores de conversão para as unidades inglesas mais comuns. Uma discussão completa do SI e das unidades inglesas pode ser encontrada no site do BIPM (http://www.bipm.org/en/si/) e no site do U.S. National Institute of Standards (http://physics.nist.gov/cuu/Units/index.html).

D.1 O SI

O SI é baseado em 7 *unidades fundamentais*, consideradas dimensionalmente independentes. A Tabela D.1 mostra as 7 unidades fundamentais. As outras unidades do SI, conhecidas como *unidades derivadas*, são definidas a partir de combinações das unidades fundamentais. O número de unidades derivadas aprovadas oficialmente é muito grande; a Tabela D.2 mostra as que são usadas neste livro. Finalmente, existe um conjunto de unidades que não pertencem oficialmente ao SI, mas cujo uso é tolerado pelo BIPM. A Tabela D.3 mostra algumas dessas unidades.

O SI também define uma série de *prefixos* que indicam múltiplos e submúltiplos das unidades. A Tabela D.4 mostra esses prefixos.

TABELA D.1 Unidades fundamentais do SI

Grandeza	Unidade	Símbolo
Comprimento	Metro	m
Massa	Quilograma	kg
Tempo, duração	Segundo	s
Corrente elétrica	Ampère	A
Temperatura termodinâmica	Kelvin	K
Quantidade de matéria	Mol	mol
Intensidade luminosa	Candela	cd

TABELA D.2 Algumas unidades derivadas do SI

Grandeza	Nome	Símbolo	Expressão em termos de outras unidades do SI	Expressão em termos de unidades fundamentais do SI
ângulo plano	radiano	rad	1	m/m
Força	newton	N		$m\ kg\ s^2$
Pressão, tensão	pascal	Pa	N/m^2	$m^{-1}\ kg\ s^{-2}$
Energia, trabalho, quantidade de calor	joule	J	N m	$m^2\ kg\ s^{-2}$

Potência	watt	W	J/s	$m^2\ kg\ s^{-3}$
Carga elétrica coulomb	C		s	A
Diferença de potencial elétrico	volt	V	W/A	$m^2\ kg\ s^{-3}\ A^{-1}$
Resistência elétrica	ohm	Ω	V/A	$m^2\ kg\ s^{-3}\ A^{-2}$
Temperatura Celsius	grau Celsius	°C		K

TABELA D.3 Unidades que podem ser usadas no SI

Grandeza	Nome	Símbolo	Valor em unidades do SI
Tempo	minuto	min	1 min = 60 s
	hora	h	1 h = 60 min = 3.600 s
	dia	d	1 d = 24 h = 86.400 s
ângulo plano	grau	°	$1° = (\pi/180)$ rad
	minuto	′	$1′ = (1/60)° = (\pi/10.800)$ rad
	segundo	″	$1″ = (1/60)′ = (\pi/648.000)$ rad
Área	ehctare	ha	$1\ ha = 1\ hm^2 = 10^4\ m^2$
Volume	litro	L, l	$1\ L = 1\ dm^3 = 10^3\ cm^3 = 10^{-3}\ cm^3$
Massa	tonelada métrica	t	$1\ t = 10^3\ kg$

TABELA D.4 Fatores de conversão para unidades do SI

Fator	Nome	Símbolo	Fator	Nome	Símbolo
10^1	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	quilo	k	10^{-3}	mili	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f

10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

D.2 UNIDADES DE OUTROS SISTEMAS E FATORES DE CONVERSÃO

Existem muitas unidades que são usadas frequentemente por cientistas e engenheiros, embora não sejam aprovadas pelo BIPM. A Tabela D.5 mostra algumas das mais comuns, juntamente com os fatores de conversão para unidades equivalentes do SI.

TABELA D.5 Fatores de conversão para unidades que não pertencem ao SI

Grandeza	Para converter de	Para	Multiplique Por
Aceleração	ft/s^2	m/s^2	$3{,}048 \times 10^{-1}$
Área	acre	m^2	$4{,}046\,873 \times 10^{3}$
	ft^2	m^2	$9{,}290\,304 \times 10^{-2}$
	in^2	m^2	$6{,}4516 \times 10^{-4}$
Energia e Trabalho	British thermal unit(Btu)	J	$1{,}055\,056 \times 10^{3}$
	caloria (cal)	J	$4{,}1868 \times 10^{0}$
	caloria nutricional (Cal)	J	$4{,}1868 \times 10^{3}$
	elétron-Volt (eV)	J	$1{,}602\,177 \times 10^{-19}$
	pé-Libra ($ft \cdot lbf$)	J	$1{,}355\,818 \times 10^{0}$
	quilowatt-Hora ($kW \cdot h$)	J	$3{,}6 \times 10^{6}$
Força	kip (1 kip = 1000 lbf)	N	$4{,}448\,222 \times 10^{3}$
	onça-força (ozf)	N	$2{,}780\,139 \times 10^{-1}$
	libra-força (lbf)	N	$4{,}448\,222 \times 10^{0}$

	tonelada-força (2000 lbf)	N	$8{,}896\ 443 \times 10^{3}$
Consumo de Combustível	mi/gal (U.S.) (mpg)	km/L	$4{,}251\ 437 \times 10^{-1}$
	mi/gal (U.S.) (mpg)	L por 100 km	Divida 235,215 por mpg
Comprimento	angstrom (Å)	m	$1{,}0 \times 10^{-10}$
	unidade astronômica (UA)	m	$1{,}495\ 979 \times 10^{11}$
	pé (ft)	m	$3{,}048 \times 10^{-1}$
	polegada (in)	m	$2{,}54 \times 10^{-2}$
	ano-luz	m	$9{,}460\ 73 \times 10^{15}$
	mícron (μ)	m	$1{,}0 \times 10^{-6}$
	mil (0,001 in)	m	$2{,}54 \times 10^{-5}$
	milha (mi)	m	$1{,}609\ 344 \times 10^{3}$
	jarda (yd)	m	$9{,}144 \times 10^{-1}$
Massa	quilate métrico	grama (g)	$2{,}0 \times 10^{-1}$
	onça (oz)	grama (g)	$2{,}834\ 952 \times 10^{1}$
	libra (lb, lbm)	kg	$4{,}535\ 924 \times 10^{-1}$
	slug (slug)	kg	$1{,}459\ 300 \times 10^{1}$
	tonelada curta (2000 lb)	kg	$9{,}071\ 847 \times 10^{2}$
Potência	horsepower (550 ft Ibf/s)	W	$7{,}456\ 999 \times 10^{2}$
Pressão ou Tensão	atmosfera (atm)	Pa	$1{,}013\ 25 \times 10^{5}$
	cm de Mercúrio (cmHg)	Pa	$1{,}333\ 224 \times 10^{3}$
	in de Mercúrio (inHg)	Pa	$3{,}386\ 389 \times 10^{3}$
	Ibf/in^2 (psi)	Pa	$6{,}894\ 757 \times 10^{3}$
Temperatura	grau Celsius (°C)	K	$K = {}^{\circ}C + 273{,}15$
	grau Fahrenheit (°F)	°C	${}^{\circ}C = ({}^{\circ}F - 32)/1{,}8$

Velocidade	ft/s	m/s	$3{,}048 \times 10^{-1}$
	km/h	m/s	$2{,}777\,778 \times 10^{-1}$
	nó (milha marítima por hora)	m/s	$5{,}144\,444 \times 10^{-1}$
	mi/h (mph)	m/s	$4{,}4704 \times 10^{-1}$
	mi/h (mph)	km/h	$1{,}609\,344 \times 10^{0}$
Volume	barril (42 galões americanos) (bbl)	m^3	$1{,}589\,873 \times 10^{-1}$
	galão (imperial) (gal)	m^3	$4{,}546\,09 \times 10^{-3}$
	galão americano (gal)	m^3	$3{,}785\,412 \times 10^{-3}$

Bibliografia

[AIS77] Christopher Alexander, Sara Ishikawa, and Murray Silverstein. *A Pattern Language*. Oxford University Press, New York, NY, 1977.

[Ame05] American Society of Civil Engineers. *Report Card for America's Infrastructure*. Technical report, 2005. http://www.asce.org/reportcard/2005/index.cfm.

[And80] John R. Anderson. *Cognitive Psychology and Its Implications*. W. H. Freeman and Company, San Francisco, CA, 1980.

[And83] John R. Anderson. *The Architecture of Cognition*. Harvard University Press, Cambridge, MA, 1983.

[ANH78] D. P. Ausubel, J. D. Novak, and H. Hanesian. *Educational Psychology: A Cognitive View, Second Edition*. Holt, Rinehart, and Winston, New York, NY, 1978.

[Arb92] John Arbuthnot. *Of the Laws of Chance, or a Method of Calculation of the Hazards of Game (English translation of Huygens' de Ratiociniis in Ludo Aleae)*. Benjamin Motte, London, 1692.

[Ban06] The World Bank. *World Development Indicators*. Washington, D.C., 2006. http://devdata.worldbank.org/wdi2006.

[Bar03] Albert-Láaszló Barabáasi. *Linked*. Plume, New York, 2003.

[Bau02] Ray H. Baughman. Carbon Nanotubes–the Route Toward Applications. *Science*, 297:787–792, August 2 2002.

[BBC00] John D. Bransford, Ann L. Brown, and Rodney R. Cocking, editors. *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School.* National Academy Press, Washington, D.C., 2000.

[BBK+03] Gary H. Bernstein, Jay B. Brockman, Peter M. Kogge, Gregory L. Snider, and Barbara E. Walvoord. From Bits to Chips: A Multidisciplinary curriculum for microelectronics System Design Education. In *MSB' 03: Proceedings of the 2003 International Conference on Microelectronics Systems Education*, page 95, Washington, DC, USA, 2003. IEEE Computer Society.

[Bea97] Tim Beardsley. The Machinery of Thought. *Scientific American*, 277(2):78–83, August 1997.

[BES+99] Tom Benson, John Eigenauer, Roger Storm, Bruce Bream, and Darryl Palmer. FoilSim II. WWW document, 1999. http://www.grc.nasa.go v/WWW/K-12/airplane/foil2.html (visited June 21, 2005).

[BFB02] Jay B. Brockman, Thomas E. Fuja, and Stephen M. Batill. A Multidisciplinary Course Sequence for First-year Engineering Students. In *2002 ASEE Annual Conference and Exposition*, Montreal, Quebec, Canada, June 2002.

[BIA+90] J. E. Black, K. R. Isaacs, B. J. Anderson, A. A. Alcantara, and W. T. Greenough. Learning Causes Synaptogenesis, whereas Motor Activity Causes Angiogenesis, in Cerebellar Cortex of Adult Rats. *Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A*, 87:5568–5572, 1990.

[Bla13] Newton Henry Black. *Practical Physics for Secondary Schools: Fundamental Principles and Applications to Everyday Life.* Macmillan and Co., 1913. available at http://www.archive.org/details/practicalphysics00blacrich.

[Bla66] Richard J. Blackwell. Descartes' Laws of Motion. *Isis*, 57(2):220–234, 1966.

[Bos06] Pradip Bose. Designing Reliable Systems with Unreliable Components. *IEEE Micro*, pages 5–6, September/October 2006.

[Boy60] Robert Boyle. *New Experiments Physico-mechanicall, Touching the Spring of the Air, and Its Effects*. H. Hall, Oxford, 1660.

[Boy61] Robert Boyle. *The Sceptical Chymist, or, Chymico-physical Doubts & Paradoxes*. J. Caldwell, London, 1661.

[bp:06] *BP Statistical Review of World Energy 2006*. London, UK, June 2006. Available online at www.bp.com/statisticalreview.

[BR06] Stephen M. Batill and John E. Renaud. Ame40463: Senior Design Project, Course Handout Package. Www document, Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Notre Dame, http://www.nd.edu/batill/www.ame40463f06/AME40463 handout f06.pdf, August 2006.

[Buz95] Tony Buzan. *The Mind Map Book*. BBC Books, London, UK, 1995.

[Car90] Sadi Carnot. *Reflections on the Motive Power of Heat*. John Wiley and Sons, New York, 1890. Available online through the Internet Archive, www.archive.org.

[CDM96] John C. Carneson, George Delpierre, and Ken Masters. Designing and Managing Multiple Choice Questions. WWW document, 1996. http://web.uct.ac.za/projects/cbe/mcqman/mcqman01.html (visited May 30, 2005).

[Cha96] Allan Chapman. England's Leonardo: Robert Hooke (1635–1703) and the Art of Experiment in Restoration England. *Proceedings of the Royal Institution of Great Britain,* 67:239–275, 1996. Available online at http://www.roberthooke.org.uk/leonardo.htm (visited August 19, 2007).

[Cla79] Rudolf Clausius. *Mechanical Theory of Heat*. Macmillan and Co., 1879.

[DA94] Cliff I. Davidson and Susan A. Ambrose. *New Professor's Handbook: A Guide to Teaching and Research in Engineering and*

Science. Anker Publishing Company, Inc., Bolton, MA, 1994.

[DB05] M. Suzanne Donavan and John D. Bransford, editors. *How Students Learn: History, Mathematics, and Science in the Classroom*. National Academy Press, Washington, D.C., 2005.

[Des37] René Descartes. *Discours de la Methode: Pour Bien Conduire Sa Raison, & Chercher la Verité Dans les Sciences. Plus La Dioptrique. Les Meteores. Et La Geometrie. Qui Sont des Essais de cete Methode*. Ian Maire, Leyden, 1637.

[Des91] René Descartes. *Principles of Philosophy*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1991. Translation of the 1644 Latin edition, *Principia Philosophiae*, with additional material from the 1647 French translation, translated into English by R.P. Miller.

[Dun05] Duncan Hines. Signature Desserts: Chocolate Peanut Butter. Cake mix, 2005.

[EDNK92] B. H. Litwiller, E. D. Nichols, and P. A. Kennedy. *Holt Pre-Algebra*. Holt, Rinehart, and Winston, Orlando, Florida, 1992.

[Ene] Energy Information Administration. Official Energy Statistics from the U.S. Government.

[FC86] S. L. Friedman and R. R. Cocking. *The Brain, Cognition, and Education*, chapter Instructional Influences on Cognition and on the Brain, pages 319–343. Academic Press, Orlando, FL, 1986.

[Fey94] Richard P. Feynman. *Six Easy Pieces: Essentials of Physics Explained by Its Most Brilliant Teacher*. Perseus Books, Reading, MA, 1994.

[FJ05] Robert A. Freitas Jr. Microbivores: Artificial Mechanical Phagocytes Using Digest and Discharge Protocol. *Journal of Evolution and Technology*, 14, 2005. http://jetpress.org/volumel4/freitas.html.

[FTG96] Craig Pass, Brian Turtle, and Mike Ginelli. *Six Degrees of Kevin Bacon*. Plume, New York, 1996.

[Gal81] Robert L. Galloway. *The Steam Engine and Its Inventors*.

Macmillan and Co., 1881.

[Gal14] Galileo Galilei. *Dialogues Concerning Two New Sciences*. Macmillan and Co., New York, 1914. English translation of 1638 Latin and Italian edition by H. Crew and A. De Salvio.

[GHJV95] Erich Gamma, Richard Helm, Ralph Johnson, and John Vlissides. *Design Patterns: Elements of Reusable Object-Oriented Software*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1995.

[Goe75] G. Daniel Goehring. 17th Century Treatments of One dimensional Collisions. *Physics Education,* pages 457–460, September 1975.

[Hal90] Anders Hald. *A History of Probability and Statistics and their Applications before 1750*. John Wiley and Sons, New York, 1990.

[har69] Engraving of Joule's Apparatus for Measuring the Mechanical Equivalent of Heat. *Harper's New Monthly Magazine,* (231), August 1869. from Wikimedia Commons, public domain photo.

[HGJD97] J. Han, A. Globus, R. Jaffe, and Glenn Deardorff. Molecular Dynamics Simulation of Carbon Nanotube Based Gears. *Nanotechnology*, 8:95–102, 1997.

[Hof05] H.P. Hofstee. Power Efficient Processor Architecture and the Cell Processor. In *llth International Symposium on High-Performance Computer Architecture,* pages 258–262. IEEE, February 2005.

[Hol75] John H. Holland. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1975.

[Hol84] P. Holgate. The Influence of Huygens' Work in Dynamics on His Contribution to Probability. *International Statistical Review*, 52(2):137–140, August 1984.

[Hol92] John H. Holland. Genetic Algorithms. *Scientific American*, pages 66–72, July 1992.

[Hoo78] Robert Hooke. *Lectures de Potentia Restitutiva, or, Of Spring: Explaining the Power of Springing Bodies*. John Martyn, London, 1678.

[How] HowStuffWorks.com. How the Wii Works, Nov. 12, 2007. http://electronics.howstuffworks.com/wii.htm.

[HrR04] Pat S. Hu and Timothy R. Reuscher. Summary of Travel Trends, 2001 National Household Travel Survey. Technical report, U.S. Department of Transportation, Federal Highway Administration, Springfield, VA, December 2004.

[Hub88] David H. Hubel. *Eye, Brain, and Vision*. Scientific American Library Series, No. 22. W. H. Freeman and Co., New York, NY, 1988.

[Hun] Michael Hunter. Robert boyle: An Introduction. http://www.bbk.ac.uk/boyle/boyle learn/boyle introduction.htm (viewed August 18, 2007).

[Huy88] Christiaan Huygens. De Motu Corporum ex Percussione. In *Oeuvres Completes de Christiaan Huygens*. M. Nijhoff, 1888.

[Ilt71] Carolyn Iltis. Leibniz and the Vis Viva Controversy. *Isis*, 62(l):21–35, 1971.

[Ins07] Institute and Museum of History of Science, Florence, Italy. Horror Vacui, 2007. http://www.imss.fi.it/vuoto/index.html (visited May 17, 2007).

[Jou63a] James Prescott Joule. On Matter, Living Force, and Heat (a lecture at St. Ann's church reading-room; and published in the Manchester Courier newspaper, May 5 and 12, 1847). In *The Scientific Works of James Prescott Joule*, pages 265–276. Dawsons of Pall Mall, 1963.

[Jou63b] James Prescott Joule. On the Heat Evolved by Metallic Conductors of Electricity, and in the Cells of a Battery During Electrolysis (*Philosophical Magazine*, Vol. xix, p. 200). In *The Scientific Papers of James Prescott Joule*. Dawsons of Pall Mall, 1963.

[Jou63c] James Prescott Joule. On the Mechanical Equivalent of Heat (Brit. Assoc. Rep. 1845, trans, chemical sect. p. 31.). In *The Scientific Papers of James Prescott Joule*, page 202. Dawsons of

Pall Mall, London, 1963.

[Jou63d] James Prescott Joule. On the Mechanical Equivalent of Heat (*Philosophical Transactions*, 1850, part i.). In *The Scientific Works of James Prescott Joule*, pages 298–328. Dawsons of Pall Mall, 1963.

[KGV83] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, and M. P. Vecchi. Optimization by Simulated Annealing. *Science*, 220(4598):671–680, 1983.

[KY06] Kristopher Kubicki and Marcus Yam. The Sony Playstation 3 Dissected. *DailyTech*, November 11 2006.

[Lav89] Antoine Lavoisier. *Traite Elementaire de Chemie*. Cruchet, Paris, 1789.

[Len00] Craig S. Lent. Molecular Electronics: Bypassing the Transistor Paradigm. *Science*, 288(5471):1597–1599, June 2 2000.

[LIL03] C.S. Lent, B. Isaksen, and M. Lieberman. Molecular Quantum-dot Cellular Automata. *Journal of the American Chemical Society*, (125):1056–1063, 2003.

[LL95] Edward Lumsdaine and Monika Lumsdaine. *Creative Problem Solving: Thinking Skills for a Changing World*. McGraw-Hill, Inc., 1995.

[MA06] J. J. Macintosh and Peter Anstey. Robert Boyle. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2006. http://plato.stanford.edu/entries/boyle/.

[Mai31] Norman R. F. Maier. Reasoning in Humans II: The Solution of a Problem and Its Appearance in Consciousness. *Journal of Comparative Psychology*, (12):181–194, 1931.

[Mid63] W. E. Knowles Middleton. The Place of Torricelli in the History of the Barometer. *Isis*, 54(1):11–28, March 1963.

[Mor07] Eric Morales. A Tiger by the Tail: HPC Designs High Performance Golf Clubs. In *Supercomputing 07*, Reno, NV, November 2007.

[Moy77] Albert E. Moyer. Robert Hooke's Ambiguous Presentation of "Hooke's Law". *Isis*, 68(242):266–275, 1977.

[MRR+53] N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller, and E. Teller. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *Journal of Chemical Physics*, 21(6):1087–1092, 1953.

[Nat04] National Academy of Engineering. *The Engineer of 2020: Visions of Engineering in the New Century*. National Academies Press, Washington, DC, 2004.

[Nat05] National Academy of Engineering. *Educating the Engineer of 2020: Adapting Engineering Education to a New Century*. National Academies Press, Washington, DC, 2005.

[Nat06] National Science Foundation. Engineering and Science Indicators 2006. Technical report, http://www.nsf.gov/statistics/seind06/, 2006.

[New29] Sir Isaac Newton. *The Mathematical Principles of Natural Philosopy*. Benjamin Motte, London, 1729. Translated into English by Andrew Motte and John Machin.

[Newton1686] Sir Isaac Newton. *Principia Mathematica*. [nob] nobelprize.org.

[Nov91] Joseph D. Novak. Clarify with Concept Maps: A Tool for Students and Teachers Alike. *The Science Teacher*, 58(7):45–49, oct 1991.

[NS63] Allan Newell and Herbert A. Simon. GPS, a Program that Simulates Human Thought. In Edward Feigenbaum A. and Julian Feldman, editors, *Computers and Thought*, pages 279–293. McGraw-Hill, New York, 1963.

[NS72] Allen Newell and Herbert A. Simon. *Human Problem Solving*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1972

[oil05] *Oil and Gas Journal*, 103(47), December, 19 2005.

[Par] Parametric Technology Corporation. Pro/ENGINEER. www.ptc.com.

[PB84] A. S. Palincsar and A. L. Brown. Reciprocal Teaching of Comprehension Monitoring Activities. *Cognition and Instruction*, 1:117–175, 1984.

[Pirsig2006] Robert M. Pirsig, *Zen and the Art of Motorcycle Maintenance*. (New York: HarperTorch, 1992) page 417.

[PMS03] C. Pieronek, L. McWiliams, and S. Silliman. Initial Observations on Student Retention and Course Satisfaction Based on First-year Engineering Student Survey and Interviews. In *ASEE Annual Conference and Exposition*, Nashville, TN, June 2003.

[Pol45] G. Polya. *How to Solve It*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1945.

[Pou05] William Poundstone. *Fortune's Formula: The Untold Story of the Scientific Betting System That Beat the Casinos and Wall Street*. Hill and Wang Publishers, 2005.

[Qui78] M. R. Quillian. Semantic Memory. In M. Minsky, editor, *Semantic Information Processing*. The M.I.T. Press, Cambridge, MA, 1978.

[Rey92] John Reynolds. Handpumps: Toward a Sustainable Technology. Report 11426,World Bank Water and Sanitation Program, Washington, DC, October 1992.

[RH97] Michael Riordan and Lillian Hoddeson. *Crystal Fire: the Invention of the Transistor and the Birth of the Information Age*. Norton, New York, 1997.

[Ric58] R. H. Richens. Interlingual Machine Translation. *The Computer Journal*, 1(3):144–147, October 1958.

[Rub75] Moshe F. Rubinstein. *Patterns of Problem Solving*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1975.

[Sha37] Claude E. Shannon. A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits. Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, August 1937.

[Sha48] Claude E. Shannon. A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*, 27:379–423, 623–656, July, October 1948.

[Sim73] Robert Simmons. Semantic Networks: Their Computation

and Use for Understanding English Sentences. In R. C. Schank and K. M. Colby, editors, *Computer Models of Thought and Language*, pages 63–113.W. H. Freeman, San Francisco, CA, 1973.

[Sim96] Herbert A. Simon. *The Sciences of the Artificial, Third Edition*. MIT Press, Cambridge, MA, 1996.

[Sky05] Skywest Airlines. Skywest/United Express Route Map. WWW document, 2005. http://www.skywest.com/ (visited June 11, 2005).

[SMS+06] Yasuhiro Shirai, Jean-Franois Morin, Takashi Sasaki, Jason M. Guerrero, and James M. Tour. Recent Progress on Nanovehicles. *Chemical Society Reviews*, (35):1043–1055, September 2006.

[SOZ+05] Y. Shirai, A. J. Osgood, Y. Zhao, K. F. Kelly, and J. M. Tour. Directional Control in Thermally Driven Single-molecule Nanocars. *Nano Letters*, 5(ll):2330–2334, 2005.

[Tay00] Taylor Research and Consulting Group. Student and Academic Research Study: Final Quantitative Study. Technical report, http://www.aicpa.org/members/div/career/edu/taylor.htm, 2000.

[The] The Royal Society, www.royalsoc.ac.uk.

[TLK52] William Thomson (Lord Kelvin). On a Universal Tendency in Nature to the Dissipation of Mechanical Energy. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh,* April 19 1852.

[Tou] James M. Tour. Research Group Homepage. WWW document. http://www.jmtour.com.

[U.S05] U.S. Department of Energy, Argonne National Laboratory. Newton bbs. WWW document, 2005. http://www.newton.dep.anl.gov/ (visited June 6, 2005).

[U.S06a] U.S. Census Bureau. *International Database.* 2006. http://www.census.gov/ipc/www/idbnew.html.

[U.S06b] U.S. Central Intelligence Agency. *The World Factbook*. 2006. https://www.cia.gov/cia/publications/factbook/index.html.

[Vala] Robert Valdes. How Playstation 3 Works, Nov. 12, 2007. http://electronics.howstuffworks.com/playstation-three.htm.

[Valb] Robert Valdes. How Xbox 360 Works, Nov. 12, 2007. http://electronics.howstuffworks.com/xbox-three-sixty.htm.

[VB89] S. Vosniadou and W.F. Brewer. The Concept of the Earth's shape: A Study of Conceptual Change in Childhood. Unpublished paper, Center for the Study of Reading, University of Illinois, Champaign, Illinois, 1989.

[Wat99] Water, Engineering, and Development Center, Loughborough University. VLOM pumps. In Rod Shaw, editor, *Running Water: More Technical Briefs on Health Water, and Sanitation,* number 41. Intermediate Technology Publications, London, UK, 1999. http://www.lboro.ac.uk/well/resources/technical-briefs/41-vlompumps.pdf (Visited November 3, 2005).

[WCHW79] D. R. Woods, C. M. Crowe, T. W. Hoffman, and J. D. Wright. Major Challenges to Teaching Problem Solving Skills. *Engineering Education,* December 1979.

[Wes05] John B. West. The Original Presentation of Boyle's Law. *Journal of Applied Physiology*, 98(1):31–39, January 2005.

[Wik] Wikimedia Commons. First Piston Steam Engine, by Papin. 19th century encyclopedia. http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Papinengine.jpg (accessed Nov. 15, 2007).

[WO93] Philip Wankat and Frank Oreovicz. *Teaching Engineering*. McGraw-Hill, Inc., New York, 1993.

[Wor05a] World Bank Water and Sanitation Program. WWW document, 2005. http://www.wsp.org.

[Wor05b] World Health Organization/UNICEF. Water for life: Making It Happen. Report http://www.who.int/entity/water sanitation health/waterforlife.pdf, WHO/UNICEF Joint Monitoring

Programme forWater Supply and Sanitation, Geneva, Switzerland, 2005.

[WWH+75] D. R. Woods, J. D. Wright, T.W. Hoffman, R. K. Swartman, and I. K. Doig. Teaching Problem Solving Skills. *Engineering Education*, December 1975.

[You07] Thomas Young. Lecture 8. *Course of Lectures on Natural Philosophy*, 1807.

[You93] J. M. Younse. Mirrors on a Chip. *IEEE Spectrum*, pages 27–31, November 1993.

Índice

A

A Pattern Language/Uma Linguagem de Padrões (Alexander), 29
Ábaco, 20
ABC, computador, 168, 169
`abs`, função do MATLAB, 216
Accreditation Board for Engineering and Technology (ABET), 56
Aço, determinação do módulo de Young do, 149
Acompanhamento da execução de uma função usando o debugger do MATLAB, 260
`acos`, função do MATLAB, 216
Acúmulo de mudanças, 268-270
    modelagem
        da trajetória de uma bola com arrasto, 269, 270
        do crescimento populacional, 268, 269
Adição
    de forças, 141-143
    de matrizes, 241, 242
Aerospace and Electronics Systems Society of the IEEE, 279
Aerospace Industries Association, 279

Água potável, 197
Air and Waste Management Association, 279
Álgebra booleana, 170, 171
    caixa postal, 171
    propriedades, 170, 171
    variáveis e operadores, 170
Algoritmo(s)
    definição, 252
    descrição de sequências simples de operações, 253
    genéticos, 78
    loops, 256-258
    ramificações condicionais, 254-256
    sub-rotinas, 253, 254
Âmbar, 175
Ambiente
    de engenharia, 34
        como o ambiente interno do produto, 37
    operacional, 34
        como o ambiente externo do produto, 37
    sistema, 10
American Academy of Environmental Engineers, 279
American Astronautical Society, 279
American Chemical Society, 279
American Congress on Surveying and Mapping, 279
American Geologic Institute, 279
American Geophysical Union, 279
American Institute of Aeronautics and Astronautics, 279
American Institute of Chemical Engineers, 279, 280
American Institute of Mining, Metallurgical and Petroleum Engineers, 280

American Society for Biochemistry and Molecular Biology, 279
American Society for Microbiology, 279
American Society of Agricultural and Biological Engineers, 279
American Society of Civil Engineers, 279
American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers, 279
American Society of Mechanical Engineers, 280
American Water Works Association, 279
American Welding Society, 280
Ampères, 176
Análise
de circuitos elétricos, 247-249
de dados, 20
e modelos empíricos, 116-138
introdução, 116
teoria e dados, 116-120
comportamento exponencial, gráficos logarítmicos e lei de Moore, 118-120
validação da lei de Boyle, 116-118
de uma treliça, 246, 247
e plotagem de dados, 20, 21
estática de uma treliça completa, 145-147
definição do problema, 146
discussão, 147
implementação do plano, 146, 147
diagrama de forças em cada nó, 146
equações de equilíbrio estático em cada nó, 146
solução do sistema de equações para calcular as forças desconhecidas, 147
plano, 146

suposições, 146
Analogia de Feynman, 4
Analogia, na solução de problemas, 78
AND, operação, 170
Anel de vedação do cilindro da bomba, 47
Aplicação de um conhecimento, 53
Aplicativos e tecnologia da computação, 9
Aprendizado
como obter bons resultados no, 54-58
aquisição de conhecimentos sólidos, 55-57
metacognição, 57, 58
notas a respeito de notas, 56
preparação para aprender, 54, 55
sobrecarga de informações, 55, 56
uso de mapas conceituais, 56, 57
competência e o processo de, 50, 51
e solução de problemas, 50-82
apresentação dos resultados, 63
atitude positiva, 59
competência, 50
definição, 59
determinação da quantidade de CO_2 produzida por um carro de passeio, 64-68
estratégia, 58-63
exploração, 59, 60
generalização, 63
implementação, 61, 62
metacognição, 57, 58
níveis de entendimento da Taxonomia de Bloom, 51-54
análise, 53

aplicação, 53
avaliação, 54
compreensão, 52, 53
conhecimento, 52
síntese, 53
planejamento, 60, 61
de projetos maiores, 68-73
regras heurísticas, 73-80
responsabilidades sociais da tomada de decisões, 54
verificação, 62, 63
casos de teste, 62, 63
teste de sanidade, 62
testes de regressão, 63
Arbuthnot, John, 124
Architectural Engineering Institute, 279
Areias petrolíferas, 208
Arestas, 7
Argumentos, funções do MATLAB, 259
Aristóteles, 88, 116
crítica de Galileu, 88
Aritmética binária, 169
Aritmética matricial, 241-244
matriz(es)
adição de, 241, 242
igualdade de, 241
multiplicação de, 243, 244
por um escalar, 242, 243
nula, 241
subtração de, 243
Arrasto, 135

Artefato, 3
Artificial, 3
Árvore, mapa de organização hierárquica, 32
`asin`, função do MATLAB, 216
ASME Bioengineering Division, 279
ASM-The Materials Information Society, 280
Association for Computer Aided Design in Architecture (ACADIA), 279
Association for Computing Machinery, 279
Association for Iron and Steel Technology, 280
Association of Consulting Chemists and Chemical Engineers, 279
Association of Mechanical Engineers, 280
Átomos, 175
Avaliação, 54
Avogadro, hipótese de, 97
Axiomas, 170
Axônios, 27

B

Bacon, Francis, 88
Bacon, Kevin (*Os Seis Graus de Kevin Bacon*), 7
Baliani, Giovani Battista, 95, 96
Barômetro de Torricelli, 96
Barra(s)
    comprimida, 144
    equilíbrio de, 143-145
    tracionada, 144
Barsanti, Eugenio, 104
Basswood, 155, 156

Becher, Johann, 104
Benz, Karl, 104
Betume, 208
Bioengenharia, 12, 13, 17
Bioengenheiros, 12
Biomedical Engineering Society, 279
Biophysical Society, 279
Biotecnologia, 17, 18
Bit, 168
Bloom, Taxonomia de, 50, 51
    níveis de entendimento, 52
Bomba manual
    anel de vedação do cilindro da, 47
    confiabilidade, 44
    custo, 44
    de sucção, 44
        para poços
            profundos, 107
            rasos, 107
    eficiência, 44
    projeto de, 43-46, 107-113
        conceitos envolvidos, 44-46
        definição, 107, 108
            formulação do problema em termos mais precisos, 108
            parâmetros conhecidos e desconhecidos, 107
            variáveis, 107, 108
        exploração, 108, 109
            cálculo da força necessária, 108
            capacidade do operador, 108
            conceitos, 108

níveis de entendimento, 108, 109
suposições, 108
mapa conceitual, 109
modelagem da eficiência da bomba, 111-113
modelagem do braço da bomba, 110, 111
criação do modelo, 110
definição das variáveis, 110
escolha das dimensões do braço, 111
valores finais das variáveis, 111
planejamento, 109
rolamentos do braço da, 47, 48
Boole, George, 167, 169
Borroughs Classe 1/Modelo 9, 166
Botões de controle do debugger do MATLAB, 260
Boulton, Matthew, 100
Boyle, Robert, 116, 117
Boyle, lei de, 126
Braço, bomba manual, 46
modelagem, 110, 111
valores finais das variáveis associadas ao, 111
Bugs, 260
Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), 281

C

Cabeçalho, da função, 258
Cálculos aritméticos, 19, 20
Calculus, 19, 164
Calor específico, 106
Calórico, teoria do, 102

Calx, 104
Canadian Society of Exploration Geophysicists, 279
Carburador, 105
Cargas
    elétricas, 175
    externas, 145
    internas, 145
Carnot, Sadi, 101, 106
Carnot, eficiência de, 102
Carta de Gantt, 68, 70
Casos de teste, 62, 63
Cell Broadband Engine, 127, 166, 167
Celulose, 151
Centro de gravidade, 92
Cerebelo, 28
Cérebro
    estrutura do, 27
    regiões funcionais do, e efeitos do treinamento, 28
Ciclo Otto de quatro tempos, 104, 105
Ciência
    da computação, 13
    da termodinâmica, 101-103
        Sadi Carnot e os limites da eficiência das máquinas térmicas, 101, 102
    matemática e engenharia, 4, 5
    princípio da, 87
Cientistas
    de computação, 13
    versus engenheiros, 5
Cilindro da bomba manual, 44, 45

Circuito conversor analógico-digital, 247, 248
Circuitos eletrônicos digitais, 86
    ponto de vista simbólico e lógico, 169-175
        lógica booleana, 169-171
            caixa postal, 171
            propriedades, 170, 171
            variáveis e operadores, 170
Clapeyron, Benoit Paul Émile, 97, 102
Clausius, Rudolf, 102
Clear breakpoints in all files, botão de controle do debugger do MATLAB, 260
Coeficiente de arrasto, 194
Colisões segundo Descartes e Huygens, 92
Colossus, computador, 168
Comandos
    condicionais, 262-264
        acompanhamento da execução de um comando `if` usando o debugger, 263, 264
        `if/else/elseif`, 263
        revisão de expressões lógicas, 262, 263
    de repetição, 264-266
        for, 265
        uso de debugger para execução de, 265, 266
        While, 264, 265
Competência
    definição, 50
    e o processo de aprendizado, 50, 51
Comportamento
    elástico, 151
    plástico, 151

Compreensão, 52, 53
Computação, engenharia e, 18-21
    processamento de dados numéricos, 19-21
        análise e plotagem de dados, 20, 21
        cálculos aritméticos, 19, 20
        métodos numéricos, 21
        substituição de números em fórmulas, 20
    programação e raciocínio lógico, 18, 19
Computer and Automated Systems Association of SME, 279
Conceitos
    de alto nível, 32
    de baixo nível, 32
Conceitualização do projeto, 38
Condensador, 100
Condutores, 175
Confiabilidade, de uma bomba, 44
Conhecimento(s), 52
    algorítmico, 252
    aplicação, 53
    declarativo(s), 24, 25
    na taxonomia de Bloom, 52
    procedural(is), 24, 25
        uso de regras, 25, 26
Conservação da massa, 103, 104
    Antoine Lavoisier, 104
    Robert Boyle e o químico cético, 103, 104
Constante de mola, 148
Consumo de petróleo, 197-208
    areias petrolíferas, 208
    crescimento a uma taxa constante, 203, 204

definição do problema e plano de ataque, 202, 203
distribuição do, 198-200
esgotamento das reservas, 208
fundamentos, 198-202
modelo completo, 204-208
aumento da população, 205
resultados, 208
tabela de cálculos, 206, 207
variáveis, 205
vazões e equações de conservação da massa, 204, 205
países
de alta renda, 198, 199
de baixa renda, 199, 200
de renda média
alta, 199, 200
baixa, 199, 200
per capita
e total, 205, 206
população e, 203, 204
renda nacional bruta *per capita*, 198
reservas provadas, 198
tendências históricas, 200-202
antiga União Soviética, 201, 202
países industrializados, 200, 201
xisto betuminoso, 208
Contagem, 167
de valores em um intervalo, 230, 231
Conversão
de binário para decimal, 173
de decimal para binário, 173

Coordenadas cartesianas, 117
Coriolis, Gaspard, 94
Corpo
    da função, 259
    do loop, 257
Corrente, 176
Córtex
    pré-frontal, 28
    visual, 27
`cos`, função do MATLAB, 216
Coulomb (C), 175
Cristais, no metal, 151
Cronômetro para navios, 34, 35
Curvas de nível, 128
Custo, de uma bomba, 44

D

Da Mola, Explicando o Poder dos Corpos Elásticos (Hooke), 97
Dados, 19
    análise e plotagem de, 20
    do experimento de Boyle, 224
    viés dos, 123
Daimler, Gottlieb, 104
De Motu Corporum ex Percussione (Movimento de Corpos em Colisão), 91
Deformação, 147, 150
    adimensional, 150
Dendritos, 27
Descartes, René, 89, 90, 116, 117

como físico teórico, 89
e a conservação do movimento, 89, 90
Huygens e o modelo de, 91-93
técnica de “plotar” expressões algébricas proposta por, 91
Desenho assistido por computador (CAD), 21
uso por engenheiros
aeroespaciais, 12
civis, 13
Desvio-padrão, 124
Detalhamento do projeto, 38
Determinação
da quantidade de CO_2 produzida por carro de passeio típico, 64-68
apresentação dos resultados, 66-68
definição, 64
exploração, 64
generalização, 66
implementação, 65, 66
planejamento, 64, 65
verificação, 66
das velocidades após uma colisão, 93, 218
Dextrogiro, 141
Diagrama
de corpo livre, 140, 141
esquemático, 179
Diálogo sobre os Dois Maiores Sistemas do Mundo: Ptolomaico e Copernicano, 88
Digital Equipment Corporation, 164
Dilatação, 147
Dióxido de carbono, 104
Disciplinas e especialidades da engenharia, 11-18

introdução, 11
visão geral, 11-16
Dispositivos elétricos, 178, 179
chave
aberta, 178
fechada, 178
fonte de tensão, 178
MOSFET, 178, 179
resistor, 178
Distância, determinação de parâmetros para atender a restrições de, 131-133
Distribuição
gaussiana, 126
normal, 126, 127
Divisor de tensão, 181, 182
Dobradura de proteínas, 9
Doença da Vaca Louca, aplicação de supercomputadores e, 9
Doutrina das Chances (Moivre), 127
Duas Novas Ciências (Galileu), 89

E

Edison Welding Institute, 280
Educating the Engineer of 2020/Educando o Engenheiro de 2020, 16
Efeito Coriolis, 94
Eficiência
de Carnot, 102
de uma bomba, 44
de uma máquina a vapor, 102
Einstein, Albert, 91

Electrochemical Society, 279
Elemento(s), 104
    de duas forças, 144
Eletricidade, 175-178
    átomos e cargas elétricas, 175, 176
    corrente, 176
    energia e tensão, 176
    potência, resistência e dissipação de calor, 176, 177
    quedas de tensão e a lei de Ohm, 177, 178
Elevação, 176
Eliminação gaussiana, 246
ELSE, comando, 263
Encadeamento
    para a frente, 26
    para trás, 26
Energia, 94
    consumo de, nos Estados Unidos, 197
    gravitacional, 176
    mínima, determinação de parâmetros para restrição de, 133-135
        combinação dos mapas de distância e energia, 134, 135
        modelo da energia em função dos parâmetros de lançamento, 133, 134
        solução geral, 135
    potencial elétrica, 176
Engenharia
    aeroespacial, 12
    agrícola, 12
    ambiental, 14
    arquitetônica, 12
    cerâmica, 16

ciência, matemática e, 4, 5
civil, 13
de computação, 13
de construção, 16
de materiais, 15
de minas, 15
de petróleo, 15, 16
de plásticos, 16
de produção, 14
de projeto, 16
de software, 13
de solda, 16
disciplinas e especialidades da, 11-16
e computação, 18-21
    processamento de dados numéricos, 19-21
        análise e plotagem de dados, 20, 21
        cálculos aritméticos, 19, 20
        métodos numéricos, 21
        substituição de números em fórmulas, 20
    programação e raciocínio lógico, 18, 19
e sociedade, 3-22
    inovações nas interfaces entre disciplinas, 16-18
    introdução, 3, 4
    organizações profissionais, 16
    rede de inovações, 8-10
        aplicativos e tecnologia da computação, 9
        globalização, 9, 10
        lei de Moore, 8
    sistemas, 10, 11
        limites e interfaces, 11

mais que a soma das partes, 10, 11
viabilização dos projetos, 10
visão geral das disciplinas, 11-16
elétrica, 14
física, 16
florestal, 16
geológica, 16
geral, 16
industrial, 14
mecânica, 15
mecatrônica, 16
metalúrgica, 16
método da, 4-7
do levantamento de pesos à microeletrônica, 5, 6
modelos de, 6, 7
molecular, 16, 17
naval, 16
nuclear, 15
objetivo principal, 4
oceânica, 16
operacional, 16
outras especialidades da, 16
química, 13
topográfica, 16
Engenheiros
aeroespaciais, 12
aeronáuticos, 12
agrícolas, 12
ambientais, 14
arquitetos, 12

astronáuticos, 12
atuação dos, 4
civis, 13
de computação, 13
de materiais, 15
de minas, 15
de petróleo, 15
de produção, 14
de software, 13
elétricos, 14
eletrônicos, 14
industriais, 14
mecânicos, 15
nucleares, 15
químicos, 13
versus cientistas, 5
ENIAC, 168
Entendimento, 52
Environmental and Engineering Geophysical Society, 279
Equações
diferenciais, 197
lineares em forma matricial, 244
Equilíbrio
de pinos articulados e barras, 143-145
de um ponto ou partícula, 143
Equivalência entre energia cinética e calor, 102
Erro(s)
de uma unidade, 266
experimental, 122
quadrados dos, 123

sistemático, 123
valores absolutos dos, 123
Esgotamento das reservas provadas de petróleo, previsão, 208
Espaço
de projeto, 128
de trabalho, 217
Esquemas, 25
Estado
cálculo dos valores das variáveis de, 195
formulação das equações de, 195
Estatística, nas operações vetoriais no MATLAB, 229-232
contagem de valores em um intervalo, 230, 231
frequência de resultados e histogramas, 231, 232
contagem, 232
dados, 232
limites, 232
outras funções, 232
parâmetros básicos, 229, 230
Estilos de linha, gráficos, 225, 226
Estratégia para resolver problemas, 58-63
Estrutura
do cérebro, 27
do DNA, 18
Estudos de engenharia: escolha de opções de projeto, 127-135
curvas de nível, 128
definição do problema e plano de ataque, 129, 130
determinação de parâmetros para atender a restrição(ões)
de distância, 131-133
de energia mínima, 133-135
combinação dos mapas de distância e energia, 134, 135

modelo da energia em função dos parâmetros de lançamento, 133, 134
solução geral para, 135
mapa(s)
de contorno, 128, 131
do espaço de projeto, 128, 130, 131
coleta de dados, 130
gráfico tridimensional, 130, 131
vista lateral, 131
topográfico, 128
metodologia, 128, 129 Éter, 90
Euler, Leonhard, 152, 190
Euler, método de, 86, 190
Evolução
da tecnologia das chaves elétricas, 169
da teoria, 86-88
`Exit debug mode`, botão de controle do debugger do MATLAB, 260
`exp`, função do MATLAB, 216
Expressões lógicas, revisão de, 262, 263

F

Fases, do processo de aprendizado, 51
de associação, 51
de automatismo, 51
de exposição, 51
Fatores de conversão
para unidades do SI, 282
para unidades que não pertencem ao SI, 282, 283
Fatos, 25

Fermat, Pierre de, 117, 124
Feynman, Richard, 4, 87
Feynman, analogia de, 4
Filósofos naturais, 90
Física de Aristóteles, 88
    crítica de Galileu à, 88
Físico
    experimental, 89
    teórico, 89
Flambagem, 152, 153
    fórmula de Euler para carga crítica de, 153
Flogístico, 104
`floor`, função do MATLAB, 216
Fluxogramas, 253
Fonte(s)
    de energia renováveis, 197
    fria, 102
    quente, 102
FOR, comando, 257, 265
Força(s)
    adição de, 141-143
    como um vetor, 140, 141
    de reação, 145
    eletrostática, 151
    estaticamente equivalente, 141
    internas, 144
    motriz, 102
    resultante, 141
    total, 143
Fórmula(s)

de Euler, para carga crítica de flambagem, 153
substituição de números em, 20
Fornecimento de água a comunidades rurais de países em desenvolvimento, 41-48
ambiente operacional e as metas de desempenho, 42
como atender às necessidades, 41, 42
componentes de alto nível do projeto, 42, 43
projeto de uma bomba manual, 43-46
confiabilidade, 43, 44
custo, 43, 44
eficiência, 43, 44
FORTRAN, linguagem de programação, 20
Frequência
de resultados, 125, 126
relativa, 124
Função(ões)
acompanhamento da execução de, com debugger do MATLAB, 260-262
científicas, 20
de base, imprecisão e, 122
do MATLAB, 216, 258-260
matemáticas, 258, 259
que chamam funções, 260
vetoriais e matriciais, 267, 268
Funcionamento do motor de quatro tempos, 104, 105

G

Galileu (Galileu Galilei), 88
carta de Baliani para, 95

como físico experimental, 89
e o método científico, 88, 89
pêndulo interrompido de, 89
Gantt, carta de, 68, 70
Garrafa de Leyden, 175
Gauss, Karl Friedrich, 127
Gay-Lussac, Joseph Louis, 97
Geological Society of America, 279
Germânio, 169
Globalização, 9, 10
GOTO, comando, 257
Gráfico(s)
bidimensionais, no MATLAB, 225-229
especiais, 227
estilos de linha, 225, 226
lei de Moore e gráficos logarítmicos, 228, 229
mais de um gráfico na mesma figura, 227
mais de uma curva no mesmo gráfico, 226, 227
plotagem de funções, 227
plotagem dos resultados do experimento de Boyle, 227, 228
dados originais, 227, 228
transformação dos dados em uma linha reta, 228
simples, 225
títulos e rótulos, 225
de área, 208
de pontos, 123
tensão-deformação de um material, 150
tridimensionais, 240, 241
de contorno, 240
de malha, 240

de superfície, 240
de vistas laterais, 241
Grafo, 7, 180
Grandeza(s)
escalares, 140
vetorial, 140

H

Hawking, Stephen, 91
Hierarquia
de classes, 33
abstratas, 33
concretas, 33
de decisões, 38, 39
de partes, 32
estrutural, 39
Hieroglifos, 18
Hipocampo, 28
Hipótese de Avogadro, 97
Histograma, 126
Hooke, Robert, 116
Hooke, lei de, 86, 87, 148
Horror vacui, 95
Horse, 101
How to Solve It/A Arte de Resolver Problemas, 58
HP-35 da Hewlett-Packard, 20
Huygens, Christiaan, 87, 91, 92, 93, 94
e o modelo de Descartes, 91-93

I

IBM Modelo 604, 169
IEEE Computer Society, 279
IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, 279
IEEE Student Concourse, 279
`If`, comando, 263
`If-else`, comando, 263
Igualdade de matrizes, 241
Imprecisão, 122
    causas de, 122, 123
    uso de métodos estatísticos para quantificar a, 122-127
Índices, nas operações com matrizes no MATLAB, 237
Indústria de computadores, 14
Inércia, princípio da, 90
Injeção eletrônica, 105
Inovações nas interfaces entre disciplinas, 16-18
    bioengenharia e biotecnologia, 17, 18
    nanotecnologia e engenharia molecular, 16, 17
Inovações, rede de, 8-10
    dos supercomputadores aos videogames, 9
    globalização, 9, 10
    lei de Moore, 8
Instância, 33
Institute of Biological Engineering, 279
Institute of Electrical and Electronics Engineers, 279
Institute of Industrial Engineers, 280
Institution of Chemical Engineers, 279
Institution of Civil Engineers-UK, 279
Institution of Electrical Engineers, 279

Institution of Electrical Engineers Student, Education and Careers Area, 279
Institution of Mechanical Engineers, 280
International Council for Building Research Studies and Documentation, 279
Interpretação de expressões aritméticas simples, comando do MATLAB, 216
Intervalo, 227
Introdução a algoritmos e programação em MATLAB, 252-276
Inversor, 165
    projeto de, 182-185
        cálculo da potência consumida, 184, 185
        definição do problema e plano de ataque, 183
        escolha das dimensões do dispositivo, 183, 184
        fundamentos, 182
        variáveis, 183
Isolantes, 175
Isooctano, razão estequiométrica do, 105

J

Jennings, Ken, 55
Joule, James, 102

K

Kelvin, William Thomson (Lord Kelvin), 88, 102, 103
Kirchhoff, Lei das
    Correntes de, 180
    Tensões de, 180

L

Laboratório de Matrizes, 222
Lagrange, Joseph Louis, 104
Lasers, uso por engenheiros aeroespaciais, 12
Lavoisier, Antoine, 104
Lectures de potentia restitutiva (Hooke), 97
Lectures on Physics/Aulas de Física (Feynman), 87
LEGO, concurso de montagem de robôs de, 85
Lei(s)
    da Gravitação Universal de Newton, 191
    da natureza e modelos teóricos, 85-115
        bomba manual, 107-113
        ciência da termodinâmica, 101-103
        conservação da massa, 103, 104
        evolução da teoria, 86-88
        física de Aristóteles, 88
        Galileu e o método científico, 88, 89
        Huygens e o modelo de Descartes, 91-93
        Leibniz e a "força viva", trabalho e energia, 94, 95
        linha de tempo dos cientistas e engenheiros, 87
        máquina de pistão, 98-101
        modelo(s)
            de engenharia, 85, 86
            de movimento, 88-95
            para a "mola de ar", 95-98
        motor de combustão interna, 104-107
        René Descartes e a conservação do movimento, 89, 90
        Royal Society, 90, 91
        teoria do calórico, 102
    das Correntes de Kirchhoff, 180

das Tensões de Kirchhoff, 180
de aerodinâmica, 86
de Boyle, 91, 96, 97, 126
validação da, 116-118
vetores do MATLAB para, 224
de Conservação
da Energia, 86
da Massa, 87, 205
do Momento, 86, 93
de Descartes de Conservação do Movimento, 90
de Hooke, 86, 87, 91, 96, 97, 98, 148
de Moore, 8, 119, 126
e gráficos logarítmicos, 228, 229
de Newton, 5, 6, 91, 93, 94
de Ohm, 177
quedas de tensão e, 177, 178
de Política e Conservação de Energia, 201
dos Gases Ideais, 87, 99
Leibniz e a “força viva”, trabalho e energia, 94, 95
Leibniz, Gottfried, 87, 91, 94, 167
Leis do Pensamento (Boole), 170
Leyden, garrafa de, 175
Ligações, 7
cruzadas, mapa conceitual, 31
Lignina, 151
Limite
de escoamento, 151
do sistema, 10, 11
Linguagens de programação, 19
Lobo

frontal, 28
occipital, 28
parietal, 28
temporal, 28
`log`, função do MATLAB, 216
`log2`, função do MATLAB, 216
Lógica booleana, 169-171
Loop(s), 256-258
aninhados, 266
corpo do, 257
erros comuns associados a, 266
FOR, 257, 258
infinito, 257, 266
WHILE, 257

M

Madeira, estrutura da, 151
Mal de Alzheimer, aplicação dos supercomputadores e, 9
Mal de Parkinson, aplicação dos supercomputadores e, 9
Mapa(s)
conceitual(is), 28-33
acréscimo de ligações cruzadas, 57
definição, 28
e aprendizado, 56, 57
hierarquias, 32, 33
árvore, 32
conceitos de alto nível, 32
conceitos de baixo nível, 32
de classes, 33

de partes, 32
introdução de relação entre conceitos, 56
lista dos conceitos mais importantes, 56
preparação, 56
proposições, 28
relações plurais, 30
transformação do mapa em uma hierarquia, 57
uso de, 56, 57
de contorno, 128, 131
do espaço de projeto, 128, 130
coleta de dados, 130
gráfico tridimensional, 130, 131
vista lateral, 131
topográfico, 128
Mapeamento mental, 29
Máquina(s)
de calcular, 20
de computação, 165-169
construção de, com uso de chaves, 172, 173
história e fundamentos, 167-169
chaves melhores, menores e mais rápidas, 168, 169
circuitos digitais e confiabilidade, 168
da contagem à computação, 167, 168
máquina de somar Burroughs e Sony Playstation 3, 166, 167
confiabilidade, 167
energia e potência, 166, 167
tamanho, 166
velocidade, 166
ponto de vista
físico, 165, 166

lógico ou simbólico, 165
de Newcomen, 98-100
versão de James Watt da, 100, 101
de pistão, 98-101
uso de, para levantar um peso, 99
térmica, 101
Mark I da IBM/Harvard, 168
Massa do CO_2 produzido por um automóvel, 218, 219
script do MATLAB, 218, 219
variáveis e equações, 218
Materiais, engenharia de, 15
MATLAB, 215-221
determinação das velocidades após uma colisão, 218
funções do, 258-260
introdução a algoritmos e programação em, 252-276
acúmulo de mudanças, 268-270
botões de controle do debugger do MATLAB, 260
comandos
condicionais, 262-264
de repetição, 264-266
definição de algoritmo, 252
descrição de sequências simples de operações, 253
fluxogramas, 253
funções matemáticas e funções do MATLAB, 258-260
loops, 256-258
modelagem
da trajetória de uma bola com arrasto, 269, 270
de crescimento populacional, 268, 269
pseudocódigo, 253
ramificações condicionais, 254-256

soma de matrizes e loops aninhados, 268
soma de vetores, 267, 268
sub-rotinas, 253, 254
subfunções, 266, 267
massa do CO_2 produzido por um automóvel, 218, 219
script, 218, 219
variáveis e equações, 218
operações com matrizes no, 236-251
análise
de circuitos elétricos, 247-249
de uma treliça, 246, 247
aritmética matricial, 241-244
básicas, 236-238
circuito conversor analógico-digital, 247, 248
gráficos tridimensionais, 240, 241
de contorno, 240
de malha, 240
de superfície, 240
de vistas laterais, 241
índices, 237
matriz(es)
acesso aos elementos de uma, 236, 237
adição de, 241, 242
definição, 236
identidade, 245
igualdade de, 241
inversa, 245
multiplicação de, 243, 244
nula, 241
quadrada, 236

subtração de, 243
transposta, 237, 238
operador transposição, 237
solução de sistemas de equações lineares, 244-249
varredura simultânea de dois parâmetros, 238-240
operações vetoriais no, 222-235
básicas, 222-225
confirmação da lei de Boyle, 224, 225
definição de vetor e acesso aos elementos de um vetor, 222, 223
elemento por elemento, 223, 224
estatística, 229-232
contagem de valores em um intervalo, 230, 231
frequência de resultados e histogramas, 231, 232
parâmetros básicos, 229, 230
gráficos bidimensionais, 225-229
especiais, 227
estilos de linha, 225, 226
lei de Moore e gráficos logarítmicos, 228, 229
mais de um gráfico na mesma figura, 227
mais de uma curva no mesmo gráfico, 226, 227
plotagem de funções, 227
plotagem dos resultados do experimento de Boyle, 227, 228
simples, 225
títulos e rótulos, 225
matriz, 222
objetos compostos, 222
primeira sessão de, 215-217
espaço de trabalho, 217
interpretação de expressões aritméticas simples, 215, 216

operador de atribuição, 216
scripts, 217
variáveis, 216, 217
MATrix LABoratory, 222
Matriz(es), 222
adição de, 241, 242
aumentada, 80
definição, 236
identidade, 245
igualdade de, 241
inversa(s), 245
solução de equações matriciais e, 245, 246
multiplicação de, 243, 244
nula, 241
operações aritméticas com, elemento por elemento, 238
quadrada, 236
subtração de, 243
tamanho, 236
transposta, 237, 238
Matteucci, Felice, 104
Maybach, Wilhelm, 104
Mecânica molecular, modelagem da, 9
Média aritmética, 123
Meio somador, 174
Memória
de curto prazo, 24, 25, 28
de longo prazo e os esquemas, 25
Metacognição, 57, 58
classificação de problemas e deveres de casa, 57, 58
mapas conceituais e níveis de entendimento, 57

troca de papéis, 57
Metal, estrutura cristalina, 151
Método(s)
científico, 88
da engenharia, 4-7
de Euler, 86, 190
dos nós, 181
estatísticos, para quantificação da imprecisão, 122
gráfico, 121
numérico(s), 21, 121, 122
Microbívoro, concepção artística de um, 18
Micrographia (Hooke), 91
Microsoft XBOX 360, 9
Minas, engenharia de, 15
`mod`, função do MATLAB, 216
Modelagem de relações entre os componentes de um sistema
circuitos eletrônicos digitais, 164-187
circuito inversor, 182-185
cálculo da potência consumida, 184, 185
definição do problema e plano de ataque, 183
escolha das dimensões do dispositivo, 183, 184
fundamentos, 182
circuitos elétricos, 179-182
cálculo das correntes e tensões usando o método dos nós, 181
divisor de tensão, 181, 182
leis de Kirchhoff e as relações entre correntes e tensões, 180, 181
construção de máquinas de computação usando chaves, 172, 173

dispositivos elétricos, 178, 179
MOSFET, 178, 179
resistor, fonte de tensão e chave, 178
eletricidade, 175-178
átomos e cargas elétricas, 175, 176
corrente, 176
energia e tensão, 176
potência, resistência e dissipação de calor, 176, 177
quedas de tensão e a lei de Ohm, 177, 178
história e fundamentos, 167-169
chaves melhores, menores e mais rápidas, 168, 169
circuitos digitais e confiabilidade, 168
da contagem à computação, 167, 168
inversor, 165
lei(s)
de Kirchhoff, 165
de Ohm, 165
lógica booleana, 169-171
caixa postal, 171
propriedades, 170, 171
variáveis e operadores, 170
máquina de somar Burroughs e Sony PlayStation 3, 166, 167
confiabilidade, 167
energia e potência, 166, 167
tamanho, 166
velocidade, 166
máquinas de computação, 165-169
ponto de vista
físico, 165, 166
lógico ou simbólico, 165

representação de números no sistema binário, 173
conversão de binário para decimal, 173
conversão de decimal para binário, 173
soma de números usando chaves, 174, 175
meio somador, 174
somador com vai-um propagado, 174, 175
transistores, 165
estruturas leves, 139-163
estudo de engenharia de resistência *versus* peso em uma treliça, 155-160
definição do problema e plano de ataque, 155-158
escolha final dos parâmetros, 160
implementação do plano, 158-160
modelo da resistência da treliça, 158-160
modelo do peso da treliça, 158
modelo completo, 153-155
ponto de vista
do equilíbrio estático, 153, 154
dos materiais, 154, 155
treliças estaticamente determinadas e indeterminadas, 154, 155
ponto de vista
da geometria, 140
do equilíbrio estático, 140-147
adição de forças, 141-143
análise estática de uma treliça completa, 145-147
cargas, suportes e forças de reação, 145
força como um vetor, 140, 141
pinos articulados e barras, 143-145
ponto ou partícula, 143

dos materiais, 140, 147-153
barras como molas, 147-150
flambagem, 152, 153
lei de Hooke, 148
módulo de Young, 149
resistência dos materiais, 150-152
Modelo(s)
de engenharia, 6, 7, 85, 86
de movimento, 88-95
física de Aristóteles, 88
Galileu e o método científico, 88, 89
Huygens e o modelo de Descartes, 91-93
Leibniz e a “força viva”, trabalho e energia, 94, 95
leis de Newton, 93, 94
René Descartes e a conservação do movimento, 89, 90
Royal Society, 90, 91
de processamento cognitivo, 24, 25
memória
de curto prazo, 24, 25
de longo prazo e os esquemas, 25
processador mental, 24
discreto, 188
empíricos, 86, 120-122
execução de um experimento, 120, 121
interpolação e ajuste de uma reta aos dados, 121, 122
método gráfico, 121
método numérico, 121, 122
introdução, 120
linear por partes, 121
para a “mola de ar”, 95-98

horror ao vácuo, 95, 96
lei de Boyle, 96, 97
lei de Hooke, 97, 98
teóricos, 86
Módulo de Young, 94, 149, 150
do aço, determinação, 149
ponto de vista dos materiais, 159
Moivre, Abraham de, 127
Moivre, teoria de, 127
Mola pneumática, 97
Molécula(s)
de celulose, 151
de lignina, 151
Momento, 93
de inércia de área, 152
cálculo do, 153
Monômeros, 152
Moore, Gordon, 119
Moore, lei de, 8, 119, 126
MOSFET, 178, 179, 182
estrutura interna, 179
resistência, 179
símbolo, 179
terminais, 179
Motor de combustão interna, 104-107
eficiência do tempo de
admissão e a mistura ar/combustível, 105
compressão e a razão de compressão, 106, 107
funcionamento do motor de quatro tempos, 104, 105
Movimento, Leis de Newton do, 5, 93, 94

Movimento, modelos de, 88-95
física de Aristóteles, 88
Galileu e o método científico, 88, 89
Huygens e o modelo de Descartes, 91-93
Leibniz e a "força viva", trabalho e energia, 94, 95
leis de Newton, 93, 94
René Descartes e a conservação do, 89, 90
Royal Society, 90, 91
MP3 player, 164
MTBF, *mean time between failures* (tempo médio entre falhas), 44
Multiplicação de matrizes, 243, 244

N

Nanobôs, 18
Nanotecnologia, 16, 17
Nanotubo de carbono, 17
NASA, uso de modelos, 6
National Academy of Engineering (NAE), 16
National Ground Water Association, 279
Neurônios, 27
Neurotransmissores, 27
Newcomen, Thomas, 98
Newcomen, máquina de, 98-100
versão de James Watt da, 100, 101
Newton, Isaac, 87, 93, 94, 191
Newton, Lei da Gravitação Universal de, 191
Newton, Leis do Movimento de, 5, 93, 94
Newton, Primeira Lei de, 93
Newton, Segunda Lei de, 93, 94

Newton, Terceira Lei de, 5, 93
Nintendo Wii, 9
Nitrato de potássio, 104
Níveis de entendimento, da taxonomia de Bloom, 52
Nós, 7, 179
NOT, operação, 170
Nullius in Verba, 91
Number Scrabble, 80

O

O Químico Cético (Boyle), 104
Objetivo, 36
Ohm, Georg, 177
Ohm (unidade), 177
Ohm, lei de, 177
Operações com matrizes no MATLAB, 236-251
    análise
        de circuitos elétricos, 247-249
        de uma treliça, 246, 247
    aritmética matricial, 241-244
        matriz(es)
            adição de, 241, 242
            igualdade de, 241
            multiplicação de, 243, 244
            por um escalar, 242, 243
            nula, 241
            subtração de, 243
    básicas, 236-238
        definição de matriz e acesso aos elementos de uma matriz,

236-238
elemento por elemento, 238
índices, 237
matriz transposta, 237, 238
circuito conversor analógico-digital, 248, 249
equações lineares em forma matricial, 244
gráficos tridimensionais, 240, 241
de contorno, 240
de malha e de superfície, 240
de vistas laterais, 241
sistemas de equações lineares, solução de, 244-249
matriz
identidade, 245
inversa, 245
solução de equações matriciais usando
matrizes inversas, 245, 246
operador barra invertida, 246
varredura simultânea de dois parâmetros, 238-240
criação de tabelas, 238, 239
valores da força em função da profundidade do poço e do raio do cilindro, 239
Operações transcendentais, 20
Operações vetoriais no MATLAB, 222-235
básicas, 222-225
como acessar os elementos de um vetor, 223
confirmação da lei de Boyle, 224, 225
definição de vetor
através de uma lista de valores, 223
e acesso aos elementos de um vetor, 222, 223
operações aritméticas com vetores, elemento por elemento,

223, 224
estatística, 229-232
contagem de valores em um intervalo, 230, 231
frequência de resultados e histogramas, 231, 232
outras funções, 232
parâmetros básicos, 229, 230
gráficos bidimensionais, 225-229
estilos de linha, 225, 226
gráfico simples, 225
gráficos especiais, 227
lei de Moore e gráficos logarítmicos, 228, 229
mais de um gráfico na mesma figura, 227
mais de uma curva no mesmo gráfico, 226, 227
plotagem
do logaritmo dos dados usando escalas lineares, 229
dos dados usando uma escala logarítmica, 229
plotagem de funções, 227
plotagem dos resultados do experimento de Boyle, 227, 228
dados originais, 227, 228
transformação dos dados em uma linha reta, 228
títulos e rótulos, 225
introdução, 222
Operador(es), 170
booleanos, 263
de atribuição, 216
do MATLAB, 216
relacionais, 262
transposição, 237
OR, operação, 170
Organização de “caixas dentro de caixas”, dos sistemas de engenharia,

Organização e representação de sistemas de engenharia, 23-49
cérebro, 27, 28
estrutura do, 27
conhecimento
declarativo, 25
procedural, 25
encadeamento
para a frente, 26
para trás, 26
fornecimento de água a comunidades rurais de países em desenvolvimento, 41-48
anel de vedação do cilindro, 47
como atender às necessidades, 41-43
componentes de alto nível do projeto, 42, 43
projeto de uma bomba manual, 43-46
conceitos envolvidos, 44-46
confiabilidade, 43, 44
custo, 43, 44
eficiência, 43, 44
rolamentos do braço da bomba, 47, 48
mapa(s) conceitual(is), 28-33
definição, 28
hierarquias, 32, 33
de classes, 33
de partes, 32
ligações cruzadas, 31
preparação, 29-32
relações plurais, 30
mente, 27, 28

metacognição, 23
modelo de processamento cognitivo, 24, 25
esquemas, 25
fatos, 25
memória
de curto prazo, 24, 25
de longo prazo, 24, 25
processador mental, 24
psicologia cognitiva, 23
representação e projeto, 33-40
cronômetro para navios, 34, 35
função, ambiente e forma, 34-36
hierarquia
buscas no espaço de projeto, 39, 40
de decisões, 38, 39
estrutural, 39
produto, 36, 37
ambiente como um molde, 36, 37
restrições e objetivos, 36
relógio de um telefone inteligente, 35, 36
relógio solar, 34
treinamento
e criação de novas ligações, 27
regiões funcionais do cérebro e efeitos do, 28
uso de regras
em cadeia para resolver problemas complexos, 26, 27
para representar pedaços de conhecimentos procedurais, 25, 26
Organizações profissionais, 16
Ossos de Napier, 20
Otica eletrônica avançada, uso por engenheiros aeroespaciais, 12

Otto, Nikolaus, 104
Otto, ciclo, 104
Oxigênio, 104

P

Países
    de alta renda, 198, 199
    de baixa renda, 200
    de renda média alta, 199, 200
    de renda média baixa, 200
    em desenvolvimento, 201
    industrializados, 200, 201
Papin, Denis, 87, 98
Papin, máquina a vapor de, 98, 99
Parâmetros estatísticos, 123
Parâmetros, funções do MATLAB, 259
Partícula, 143
Pascal, Blaise, 96, 124, 167
Pascal (unidade), 150
Pascaline, 20
Pêndulo interrompido de Galileu, 89
Petróleo
    consumo de, 197-208
    engenharia de, 15
Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Newton), 91
Pino articulado, 143, 144
Planejamento de projetos maiores, 68-73
    escalonamento de tarefas, 70-73
        análise

de rolamentos e conexões, 72
do mecanismo
da garra, 71, 72
de levantamento, 71
de soldagem, 72
do sistema de controle do movimento horizontal, 72
desenvolvimento do tema, 72
documentação e apresentação, 72, 73
escolha do tema, 71
estudos de engenharia, 71, 72
SolderBaat, 68-70
diagrama funcional do, e seus subsistemas, 70
trabalho de equipe e resultados, 73
Planilha eletrônica, 20
Plotagem
de funções, 227
dos resultados do experimento de Boyle, 227, 228
dados originais, 227, 228
transformação dos dados em uma linha reta, 228
Polímeros, 152
Ponte entre lógica e programação, 167
Ponto de aplicação, 140
Ponto de vista do equilíbrio estático, 140-147
adição de forças, 141-143
análise estática de uma treliça completa, 145-147
cargas, suportes e forças de reação, 145
equilíbrio
de pinos articulados e barras, 143-145
de um ponto ou partícula, 143
força como um vetor, 140, 141

Ponto de vista dos materiais, 147-153
barras como molas, 147-150
flambagem, 152, 153
lei de Hooke, 148
módulo de Young, 149
resistência dos materiais, 150-152
madeira, 151, 152
metal, 151
Ponto intermediário, 26
Ponto morto
inferior, 105
superior, 105
População e consumo de petróleo *per capita*, 203, 204
Potência, 101
consumida, 176
Potenciômetro, 182
Pressão, 150
Priestley, Joseph, 104
Primeira Lei da Termodinâmica, 103
Primeira Lei de Newton, 93
Principia Mathematica (Newton), 141
Principia Philosophiae (Descartes), 89
Princípio
da ciência, 87
da inércia, 90
da relatividade, 91
de Torricelli, 92
Princípios de Filosofia (Descartes), 92
Pro/ENGINEER, 72
Probabilidade, estimativa de, 124, 125

Problemas
abertos, 58
fechados, 58
processo de resolução de, 277
Processador mental, 24, 26
Processamento de dados numéricos, 19-21
análise e plotagem de dados, 20, 21
cálculos aritméticos, 19, 20
métodos numéricos, 21
substituição de números em fórmulas, 20
Processo(s), 189
de aprendizado
competência e o, 50, 51
fase
de associação, 51
de automatismo, 51
de exposição, 51
objetivo do, 51
de computação, 19
de resolução de problemas, 277
Produto, ambiente como um molde para, 36, 37
Programas de computador, 19
Projeto(s)
buscas no espaço de, 39, 40
em largura, 40
em profundidade, 40
conceitualização do, 38
de bomba manual, 43-46, 107-113
conceitos envolvidos, 44-46
braço, 46

cilindro, 44, 45
organização de alto nível, 44
confiabilidade, 43, 44
custo, 43, 44
definição do problema, 107, 108
formulação em termos mais precisos, 108
parâmetros conhecidos e desconhecidos, 107
variáveis, 107, 108
eficiência, 43, 44
exploração, 108, 109
cálculo da força necessária, 108
capacidade do operador, 108
conceitos, 108
níveis de entendimento, 108, 109
modelagem
da eficiência da bomba, 111-113
das forças que agem sobre o êmbolo, 109, 110
do braço da bomba, 110, 111
planejamento, 109
de pré-engenharia, 139
detalhamento do, 38
hierarquias de, 37-40
viabilização dos, 10
Propriedades, álgebra booleana, 170, 171
Próteses, 12
Pseudocódigo, 253
Psicologia cognitiva, 23

Q

Quadrados dos erros, 123
Quedas de tensão e a Lei de Ohm, 177, 178
Querogênio, 208

R

Ramificação(ões) condicional(is), 254-256
Razão
    de compressão, 106
    estequiométrica, 105
Recozimento simulado, 78
Recursão, 257
Rede(s)
    de inovações, 8-10
        dos supercomputadores aos videogames, 9
        globalização, 9, 10
        lei de Moore, 8
    semânticas, 29
Reflexões sobre a Força Motriz do Fogo (Carnot), 101
Região(ões)
    aceitável, 37
    funcionais do cérebro e efeitos do treinamento, 28
Regra(s)
    do paralelogramo, 141, 143
    heurísticas, 50, 61, 73-80
        comece pelas partes mais fáceis, 79
        desenhe uma figura, 74
        discuta um problema com outra pessoa, 76
        divida para conquistar, 75, 76
        encadeamento

para a frente, 74
para trás, 74
escreva no papel, 73, 74
experimente alguns números, 79
faça uma pausa, 80
formular e resolver uma versão simplificada do problema, 76, 77
mantenha um registro dos progressos, 79
mude a representação, 80
mude de perspectiva, 78, 79
mude de plano, 80
observe o conjunto, 79
problemas parecidos, 74
siga seus palpites, 80
tente resolver um problema mais simples do mesmo tipo, 77
teste palpites, 77, 78
trabalhe de cima para baixo e de baixo para cima, 75
use modelos, 77
use uma analogia, 78
verifique se existem restrições desnecessárias, 76
Regressão linear, 119
Régua de cálculo, 20
Relações, 170
constitutivas, 177
plurais, mapa conceitual, 30
Relatividade, princípio da, 91
Relés, 167, 168
Relógio
de um telefone inteligente, 35, 36
solar, 34

Renda nacional bruta *per capita*, 198
René Descartes e a conservação do movimento, 89, 90
Representação
    de números no sistema binário, 173, 174
        conversão
            de binário para decimal, 173
            de decimal para binário, 173
    de um problema, 80
Reserva Estratégica de Petróleo dos Estados Unidos, 201
Reservas provadas, 198
Resistência dos materiais, 150-152
    madeira, 151, 152
    metal, 151
    ponto de vista
        macroscópico, 150, 151
        microscópico, 150, 151
Resistividade, 177
Resistor
    pull-down, 181
    pull-up, 181
Responsabilidades sociais da tomada de decisões, 54
Ressonância magnética funcional, 28
Restrição, 36
Robôs nanométricos, 18
Robótica, uso por engenheiros, 12
Rolamentos do braço da bomba, 47, 48
Rótulos, para gráficos, 225
`round`, função do MATLAB, 216
Royal Society, 90, 91
Ruído, 168

Run/Continue, botão de controle do debugger do MATLAB, 260

S

Sadi Carnot e os limites da eficiência das máquinas térmicas, 101, 102
Sagredo, personagem fictício de Galileu, 88
Salitre, 104
Salviati, personagem fictício de Galileu, 88
Script, do MATLAB, 217
Segunda Lei da Termodinâmica, 103
Segunda Lei de Newton, 93, 94, 194
Semicondutor, 169
Sensibilidade, 123
Seres
    artificiais, 3
    naturais, 3
    vivos, taxonomia dos, 33
Set/clear breakpoint, botão de controle do debugger do MATLAB, 260
Shannon, Claude, 167, 172
SI (Sistema Internacional de Unidades), 281, 282
    fatores de conversão para unidades que não pertencem ao, 282, 283
    unidades
        derivadas, 281
        fundamentais, 281
Simplício, personagem fictício de Galileu, 88
`sin`, função do MATLAB, 216
Sinapse, 27
Síntese, 53
Sistema(s), 10, 11

ambiente, 10
comportamento do, 10
de equações lineares, 244
de posicionamento global (GPS), 35
de Processamento Digital de Luz, 17
definição, 10
elétrico e de controle, 68, 69
estado de um, 189, 190
    processo, 189
    taxas de variação, 189, 190
    trajetória, 189
interfaces, 11
limite, 10, 11
mais que a soma das partes, 10, 11
mecânico, 68
modelagem de mudanças em, 188-212
    consumo de petróleo, 197-208
        crescimento a uma taxa constante, 203, 204
        definição do problema e plano de ataque, 202
        distribuição das reservas, 198
        esgotamento das reservas, 208
        fundamentos, 198-202
        modelo completo, 204-208
        per capita, população e, 203, 204
        reservas provadas, 198
        tendências históricas, 200-202
        vazão de um líquido e conservação da massa, 202, 203
    introdução, 188
    lançamento de uma bola de softball, 191-197
        cálculo dos valores das variáveis de estado, 193, 195, 196

definição do problema e plano de ataque, 192, 193
formulação das equações de estado, 193, 195
modelos contínuos e discretos, 196, 197
resistência do ar e força de arrasto, 194
trajetória com arrasto, 194-196
trajetória sem arrasto, 193, 194
método de Euler, 190, 191
viabilização dos projetos, 10
Sloan Career Cornerstone Center, 12, 16
Sociedade Americana de Engenharia Civil, 85
Sociedades de engenharia e organizações de classe, 279, 280
Society for Biological Engineering, 279
Society for Mining, Metallurgy and Exploration, 280
Society of Automotive Engineers, 280
Society of Exploration Geophysicists, 279
Society of Flight Test Engineers, 279
Society of Industrial Microbiology, 279
Society of Manufacturing Engineers, 280
Society of Naval and Marine Engineers, 280
Society of Petroleum Engineers, 280
SolderBaat, projeto, 68-70
Solução de problemas, etapas, 59-63
apresentação dos resultados, 63
atitude positiva, 59
definição, 59
exploração, 59, 60
generalização, 63
implementação, 61, 62
planejamento, 60, 61
verificação, 62, 63

Soma
de matrizes e loops aninhados, 268
de números usando chaves, 174, 175
meio somador, 174
somador com vai-um propagado, 174, 175
de vetores, 267, 268
Somador com vai-um propagado, 174, 175
Somador completo, 175
Sony Playstation 3, 9, 127, 166
`sqrt`, função do MATLAB, 216
Stahl, Georg, 104
Step, botão de controle do debugger do MATLAB, 260
Step in, botão de controle do debugger do MATLAB, 260
Step out, botão de controle do debugger do MATLAB, 260
Sub-rotinas, 253, 254
Subfunções, 266, 267
Subsistemas, 10
Substituição de números em fórmulas, no processamento de dados numéricos, 20
Subtração de matrizes, 243
Suporte
fixo, 145
rolante, 145
Swift, Jonathan, 124

T

Tabela
de cálculos, no modelo de consumo mundial de petróleo, 206, 207
de verdade, 170

Taxa(s)
de crescimento anual, 204, 268
de variação, 189, 190, 204
leis da natureza e, 191
Taxonomia, 33
de Bloom, 50, 51
níveis de entendimento da, 52
sumário, 278
Tecnologia
dos semicondutores, 14
incubadora, 15
Telecomunicações, 14
Tempo
de admissão, 104
de compressão, 105
de exaustão, 105
de expansão, 105
de força, 105
médio entre falhas, 44
Tensão, 150, 176
de ruptura, 150
quedas de, e a lei de Ohm, 177, 178
Teoria
da curva em forma de sino, 126, 127
de Moivre, 127
do calórico, 102
Terceira Lei de Newton, 5, 93
Termo independente, 244
Termodinâmica, 88
Teste(s), 120

casos de, 62
de regressão, 63
de sanidade, 62
The American Ceramic Society, 279, 280
The Chartered Institution of Building Services Engineers, 279
The Engineer of 2020/O Engenheiro de 2020, 16
The Materials Research Society, 280
The Minerals, Metals and Materials Society, 280
The Sciences of the Artificial/As Ciências do Artificial (Simon), 3
The Soul of a New Machine/A Alma de uma Nova Máquina (Kidder), 53
Thomson, William (Lord Kelvin), 102, 103
Títulos, para gráficos, 225
Tomada de decisões, responsabilidades sociais da, 54
Tomografia por emissão de pósitrons, 28
Torricelli, Evangelista, 92, 95, 96
Torricelli, barômetro de, 96
Torricelli, princípio de, 92
Trabalho, 94
TRADIC, 169
Traité Élémentaire de Chimie (Lavoisier), 104
Trajetória, 189
Transistor(es), 8, 119, 165, 169
de efeito de campo metal-óxido-semicondutor, 178
Treinamento
e novas ligações, 27
regiões funcionais do cérebro e efeitos do, 28
Treliça, 86, 139
estaticamente
determinada, 154
indeterminada, 154

modelo
da resistência, 158
do peso, 158
Três Leis de Newton, 86
Troca de papéis, 57
Tronco encefálico, 28
Try Engineering, 12

U

U.S. National Institute of Standards, 281
Uma Teoria Matemática da Comunicação (Shannon), 168
Unidades
de outros sistemas e fatores de conversão, 282, 283
derivadas, 281
fundamentais, 281
sistema SI, 281, 282
Uso de métodos estatísticos para quantificar a imprecisão, 122-127
Uso de regras
em cadeia para resolver problemas complexos, 26, 27
para representar pedaços de conhecimentos procedurais, 25, 26

V

Validação da lei de Boyle, 116-118
Valores absolutos, dos erros, 123
Válvulas eletrônicas, 169
Variáveis, 170
de estado, 189
do inversor, 183

no MATLAB, 216, 217
no modelo de consumo mundial de petróleo, 205
Varredura paramétrica, 66, 128
Vazão mássica, 176
VELCRO, 78
Velocidade
escalar, 92
terminal, 196
vetorial, 92
Versão de James Watt da máquina de Newcomen, 100, 101
Vetor(es), 222, 236
acesso dos elementos de um, 223
coluna, 236
definição através de uma lista de valores, 223
linha, 236
operações aritméticas com, elemento por elemento, 223, 224
soma de, 267, 268
Viabilização dos projetos, 10
Viés dos dados, 123
Visão geral das disciplinas de engenharia, 11-16
VisiCalc, programa, 20

W

Watt (unidade), 101
Watt, James, 100
WHILE, comando, 257, 264, 265

X

Xisto betuminoso, 208
XOR, 174

Y

Young, módulo de, 94, 149, 150
    do aço, determinação, 149
    ponto de vista dos materiais, 159

Z

Z3, computador, 168