

VỀ SỰ ỔN ĐỊNH THEO MỘT NHÓM BIẾN CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHỊU TÁC DỤNG XUNG

Trần Thị Huệ*

Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp - Đại học Thái Nguyên

TÓM TẮT

Bài báo này trình bày bài toán sự ổn định theo một nhóm biến của hệ phương trình vi phân (PTVP) chịu tác dụng xung. Đã đưa vào các khái niệm về sự ổn định theo một nhóm biến, hàm Liapunov của PTVP chịu tác dụng xung. Đã mở rộng một số kết quả về sự ổn định, ổn định tiệm cận và không ổn định nghiệm đối với một nhóm biến của PTVP thường sang các PTVP chịu tác dụng xung tại thời điểm cố định.

Từ khoá: ổn định, ổn định tiệm cận, không ổn định, phương trình vi phân, xung, hàm Liapunov, xác định dương (âm), nhóm biến(bộ phận).

GIỚI THIỆU

Bài toán ổn định chuyển động có vai trò rất lớn trong hầu hết các lĩnh vực khoa học Tự nhiên và Kỹ thuật. Nó đã được nghiên cứu phát triển và ứng dụng trong suốt thế kỷ XX và đến nay lý thuyết ổn định đối với các hệ được mô tả bằng các phương trình vi phân thường đã được nghiên cứu hoàn chỉnh.

Gắn liền với sự phát triển công nghệ mới từ khoảng những năm 70 của thế kỷ trước, nhiều hệ kỹ thuật được mô tả bằng các hệ PTVP mở rộng – PTVP chịu tác dụng xung. Lý thuyết này cũng bắt đầu được nghiên cứu và đạt được những kết quả có khả năng ứng dụng rộng rãi trong kỹ thuật.

Tuy nhiên, có rất nhiều hệ động lực mà tính chất ổn định của nó chỉ xảy ra đối với một nhóm các tham số trạng thái của hệ còn các biến khác không ổn định. Vấn đề này do A. M. Liapunov chỉ ra từ đầu thế kỷ XX và kết quả đáng quan tâm nhất thuộc về tác giả V.V. Rumyantsev và A. S. Oziraner 1987. Sau đó, nó đã được các nhà Toán học và Cơ học Nga, Pháp, Mỹ, Rumani,... nghiên cứu và đạt được kết quả có ý nghĩa thực tế. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ mở rộng các kết quả nghiên cứu về sự ổn định bộ phận đối với hệ PTVP thường sang hệ PTVP chịu tác dụng xung trong không gian hữu hạn chiều.

ĐẶT BÀI TOÁN

Giả sử có một hệ động lực, chuyển động của nó được mô tả bởi hệ phương trình vi phân chịu tác dụng xung được viết dưới dạng :

$$\begin{cases} \dot{x} = X(t, x), & t \neq \tau_i \\ \Delta x|_{t=\tau_i} = \bar{I}_i(x) \end{cases} \quad (1)$$

$$X(t, 0) = 0, \quad \bar{I}_i(0) = 0 \quad (2)$$

Giả sử rằng hệ (1) có nghiệm duy nhất phụ thuộc liên tục vào điều kiện đầu và thác triển vô hạn về bên phải.

Dưới đây ta sẽ nghiên cứu bài toán ổn định của chuyển động không nhiễu $x = 0$ đối với các biến $x_1, x_2, \dots, x_m$ ($m > 0, n = m + p, p \geq 0$), ta kí hiệu các biến này bằng y :

$$y_i = x_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m)$$

$$\text{còn lại} \quad z_j = x_{m+j} \quad (j = 1, \dots, n - m = p)$$

Định nghĩa 1. Chuyển động không nhiễu $x = 0$ của hệ (1) được gọi là ổn định theo một nhóm biến $x_1, x_2, \dots, x_m$ ($m < n$) hay y - ổn định nếu đối với mọi $\varepsilon > 0, \eta > 0$ bất kỳ, ta tìm được $\delta > 0$ sao cho từ $\|x_0\| < \delta$ suy ra $\|y(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ với mọi $t \geq t_0$ và $|t - \tau_i| > \eta, \tau_i$ là thời điểm hệ chịu tác dụng xung.

Ta xét một hàm vô hướng $V(t, x), V(t, 0) = 0$ xác định và có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trong miền :

$$Z_1 = \{ t \geq t_0, \|y\| \leq H, \|z\| < \infty \} \quad (3)$$

Định nghĩa 2. Hàm $V(t, x)$ được gọi là hàm có giới hạn trên vô cùng bé, nếu $\forall \varepsilon > 0$ cho trước

* Tel: 0984632890 or 0280.3747708

có thể tìm được một số $h > 0$ sao cho khi $t \geq t_0$, $|x| \leq h$ thì ta có bất đẳng thức:

$$|V(t, x)| \leq \varepsilon \text{ hay } V(t, x) \rightarrow 0 \text{ khi } x \rightarrow 0$$

Định nghĩa 3. Hàm $W(y_1, y_2, \dots, y_m) = W(y)$ không phụ thuộc hiển t được gọi là xác định dương nếu trong miền $\|y\| \leq H$ không âm và triệt tiêu khi và chỉ khi $y=0$. Hàm $W(y)$ được gọi là xác định âm nếu $-W(y)$ xác định dương.

Định nghĩa 4. Hàm $V(t, x)$ được gọi là y – xác định dương (y –xác định âm) nếu tồn tại một hàm $W(y)$ không phụ thuộc hiển t xác định dương sao cho miền (3) thực hiện bất đẳng thức: $V(t, x) \geq W(y)$ hay $(-V(t, x) \geq W(y))$

Định nghĩa 5. Hàm $V(t, x)$ được gọi là bị chặn trong miền (3), nếu tồn tại một số $L > 0$ sao cho thỏa mãn bất đẳng thức: $V(t, x) < L$

Định nghĩa 6. Hàm $V(t, x)$ được gọi là hàm không đổi dấu dương (không đổi dấu âm) nếu nó thỏa mãn bất đẳng thức:

$$V(t, x) \geq 0 \text{ hay } (V(t, x) \leq 0)$$

Kết quả chính

Định lý 1. Nếu tồn tại một hàm y – xác định dương $V(t, x)$ trong miền (3) mà đạo hàm của nó dựa vào hệ phương trình vi phân chuyển động nhiều (1) $V(t, x)$ thỏa mãn bất đẳng thức:

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \langle \text{grad}_x V(t, x), X(t, x) \rangle \leq 0 \quad (4)$$

$$V(\tau_i, x + I_i(x)) \leq V(\tau_i, x) \quad (5)$$

thì chuyển động không nhiều $x = 0$ là y – ổn định.

Chứng minh

Giả sử chọn trước $\varepsilon > 0$ tùy ý ($\varepsilon < H$), gọi $\ell = \inf_{\|y\|=\varepsilon} W(y)$. Vì $W(y)$ là hàm xác định dương nên $\ell > 0$. Do đó trên mặt cầu $\|y\| = \varepsilon$ ta có $V(t, x) \geq \ell$. Từ tính chất của hàm $V(t, x)$ và $V(t_0, 0) = 0$ ta chọn được một số $\delta > 0$ sao cho với $\|x_0\| < \delta$ thực hiện bất đẳng thức: $V(t_0, x) < \ell$

Với mọi nghiệm xuất phát từ vị trí ban đầu (t_0, x_0) , $x_0 \in \{\|x\| < \delta\}$ thì $\|y(t)\| < \varepsilon$.

Thật vậy, ta khảo sát hàm $v(t) = V(t, x(t))$ và giả sử có một thời điểm t_* mà đối với nó

$\|y(t_*)\| = \varepsilon$. Khi đó, do các bất đẳng thức (4) và (5) hàm $V(t, x)$ đơn điệu giảm nên ta có:

$$\begin{aligned} W(y) \leq v(t_*) = v(t_0) + \sum_{i=0}^{k-1} (v(\tau_k + 0) - v(\tau_{k+1})) = \\ = v(t_0) + \sum_{i=1}^k (v(\tau_i + 0) - v(\tau_i)) \leq v(t_0) < \ell \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng mâu thuẫn tính y – xác định dương của hàm $V(t, x)$. Do đó với mọi $t \geq t_0$ thực hiện điều kiện $\|y(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$. Định lý được chứng minh.

Định lý 2. Nếu tồn tại một hàm y – xác định dương $V(t, x)$ trong miền (3) và thừa nhận giới hạn trên vô cùng bé theo các biến $x_1, x_2, \dots, x_k$ ($m \leq k \leq n$) mà đạo hàm của nó dựa theo hệ phương trình vi phân chuyển động nhiều (1) $V(t, x)$ thỏa mãn bất đẳng thức:

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \langle \text{grad}_x V(t, x), X(t, x) \rangle \leq 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} V(\tau_i, x + I_i(x)) - V(\tau_i, x) \leq -\psi(V(\tau_i, x)), \\ \forall i=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

trong đó $\psi(s)$ liên tục với $s \geq 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi(s) > 0$, $s > 0$ thì chuyển động $x=0$ là y – ổn định tiệm cận.

Chứng minh:

Vì các giả thiết của định lý 1 đều được thỏa mãn, nên chuyển động không nhiều $x = 0$ của hệ (1) là y – ổn định.

Ta khảo sát hàm $v(t) = V(t, x(t))$, và chỉ cần chứng minh rằng $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$.

Từ các bất đẳng thức (6), (7) hàm $v(t)$ không tăng do đó nó bị chặn dưới nên tồn tại $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \alpha$. Ta chứng minh $\alpha = 0$

Giả sử $\alpha > 0$, gọi $c = \min_{\alpha \leq s \leq v(t_0)} \psi(s)$. Khi đó, tại

các thời điểm va chạm $t = \tau_i$ ta có:

$$v(\tau_i + 0) - v(\tau_i) \leq -\psi(v(\tau_i)), \quad \forall i=1, 2, \dots$$

Do $\alpha \leq v(\tau_i) \leq v(t_0)$ nên

$$-\psi(v(\tau_i)) \leq -c, \quad \forall i=1, 2, \dots$$

Do đó:

$$v(\tau_i + 0) - v(\tau_i) \leq -c, \quad \forall i=1, 2, \dots$$

Do hàm $v(t)$ không tăng trên mọi đoạn liên tục nên $v(\tau_i + 0) \geq v(\tau_{i+1})$. Khi đó đối với số tự nhiên k bất kỳ ta thu được:

$$v(t) = v(t_0) + \sum_{i=1}^k (v(\tau_i + 0) - v(\tau_i)) \leq v(t_0) - kc$$

Vế phải của bất đẳng thức cuối cùng với các giá trị k lớn trở thành âm mà mâu thuẫn tính y - xác định dương của hàm $V(t, x)$ dẫn đến mâu thuẫn $\alpha > 0$. Định lý được chứng minh.

Định lý về không ổn định

Trong phần này ta sẽ xét hàm $V(t, x)$ có các tính chất sau:

a) Miền $Z_0 = \{(t, x) \in Z_1 \mid V(t, x) > 0\}$ dương của hàm $V(t, x)$ với $t \geq t_0$ có thiết diện mở khác không bởi mặt phẳng $t = \text{const}$ tiếp xúc với gốc toạ độ.

b) Trong miền Z_0 hàm $V(t, x)$ giới nội.

Hàm $V(t, x)$ thoả mãn các điều kiện trên được gọi là hàm $V(t, x)$ xác định dương trong miền $V > 0$.

Định lý 3. Nếu tồn tại một hàm $V(t, x)$ có các tính chất a, b sao cho trong miền Z_0 ,

$\forall t \geq 0$ và $\|x\|$ bé tùy ý mà đạo hàm $V(t, x)$ theo (1) là hàm xác định dương trong miền $V > 0$ và thoả mãn bất đẳng thức:

$$V(\tau_i, x_i + I_i(x)) - V(\tau_i, x_i) \geq \psi(V(\tau_i, x_i)) \quad (8)$$

trong đó $\psi(s)$ liên tục với $s \geq 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi(s) > 0$ với $s > 0$ thì chuyển động không nhiều $x = 0$ là y - không ổn định.

Chứng minh

Theo điều kiện của định lý trong lân cận bé tùy ý của gốc toạ độ trong miền $V > 0$ ta chọn được một điểm x_0 sao cho

$$V(t_0, x_0) = V_0 > 0.$$

Ta sẽ chứng minh nghiệm bất kỳ $x(t)$ đi ra khỏi điểm x_0 trong lân cận gốc toạ độ tùy ý sẽ ra khỏi miền giới hạn bởi mặt cầu $\|y\| = H$. Giả sử tại thời điểm t_* nào đó nghiệm bất kỳ $x(t)$ vẫn nằm trong miền $\|y(t_*)\| = H$, tức là $x(t) \in Z_0 \forall t \geq t_0$. Ta khảo sát hàm:

$$v(t) = V(t, x(t))$$

Từ bất đẳng thức (8) hàm $v(t)$ đơn điệu tăng.

Gọi $c = \min_{v(t_0) \leq s \leq a_0} \psi(s)$, trong đó

$$a_0 = \sup_{(t,x) \in Z_0} V(t, x). \text{ Khi đó}$$

$v(\tau_i + 0) - v(\tau_i) \geq c, \quad i = 1, 2, \dots$ Vì $v'(t) > 0$ với $t \neq \tau_i$ nên

$$v(\tau_{i-1} + 0) - v(\tau_i) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Đối với số tự nhiên k bất kỳ ta có:

$$v(t) = v(t_0) + \sum_{i=1}^{k-1} (v(\tau_k + 0) - v(\tau_{k+1})) =$$

$$= v(t_0) + \sum_{i=1}^k (v(\tau_i + 0) - v(\tau_i)) \geq v(t_0) + kc$$

Vế phải của bất đẳng thức cuối cùng tăng vô hạn khi $k \rightarrow \infty$, mâu thuẫn với $(t; x(t)) \in Z_0$. Vì trong Z_0 hàm $V(t, x)$ giới nội và thời gian là hữu hạn nên nghiệm $x(t, t_0, x_0)$ sẽ đi ra khỏi mặt $\|y\| = H$. Điều đó chứng tỏ rằng chuyển động không nhiều $x = 0$ là y - không ổn định.

Định lý 4. Nếu tồn tại một hàm $V(t, x)$ có các tính chất a, b sao cho trong miền Z_0 thực hiện bất đẳng thức:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \langle \text{grad}_x V(t, x), X(t, x) \rangle \geq -\varphi(\|y\|) \quad (9)$$

$$V(\tau_i, x + I_i(x)) \geq \psi(V(\tau_i, x)) \quad (10)$$

trong đó $\varphi(s)$, $\psi(s)$ là các hàm liên tục với $s \geq 0$, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi(s) > 0$, $\psi(s) > 0$ với $s > 0$. Giả sử τ_i thoả mãn điều kiện $\tau_{i+1} - \tau_i \leq \theta_1$

Nếu các hàm $\varphi(s)$, $\psi(s)$ sao cho $\forall \gamma > 0$ nào đó, và với mọi $a \in [0, a_0]$ thoả mãn bất đẳng

$$\text{thức:} \quad \int_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \theta_1 + \gamma$$

thì chuyển động không nhiều $x=0$ là y - không ổn định.

Chứng minh

Trong lân cận đủ bé của gốc toạ độ luôn tìm được điểm x_0 sao cho $V(t_0, x_0) > 0$. Ta chứng minh rằng nghiệm $x(t)$ đi ra từ điểm này theo thời gian vượt khỏi giới hạn của mặt cầu $\|y\| = H$. Giả sử nghiệm bất kỳ $x(t)$ vẫn nằm trong miền $\|y\| = H \forall t \geq t_0$, tức là $(t; x(t)) \in Z_0$ với $t \geq 0$. Ta khảo sát hàm $v(t) = V(t, x(t))$. Thực vậy, khi $(\tau_i, x_i) \in Z_0$ thì $(\tau_i, x(\tau_i + 0)) \notin Z_0$ là không xảy ra vì do bất đẳng thức (10) của định lý.

$v(\tau_i + 0) = V(\tau_i, x_i + I_i(x_i)) \geq \psi(v(\tau_i)) > 0$, tức là nó vẫn nằm trong miền $V > 0$. Nếu giả thiết nghiệm $x(t)$ đi ra khỏi miền Z_0 thì chỉ cắt vùng $V = 0$ tại thời điểm t_* , tức là $v(t_*) = 0$.

Xét trong khoảng thời gian $\tau_k < t \leq \tau_{k+1}$ ta có $v(\tau_k + 0) > 0$. Từ (9) suy ra:

$$-\int_{\tau_k}^{t^*} \frac{v'(t)dt}{\varphi(v(t))} \leq t^* - \tau_k \text{ hay}$$

$$-\int_{v(t^*)}^{v(\tau_k+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq t^* - \tau_k \leq \theta_1$$

Ta có định $a' > 0$ sao cho $0 < \psi(a') \leq v(\tau_k + 0)$. Từ các bất đẳng thức trên ta thu được một dãy các bất đẳng thức mâu thuẫn:

$$\theta_1 + \gamma \leq \int_{a'}^{\psi(a')} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \int_0^{v(\tau_k+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} = \int_{v(t^*)}^{v(\tau_k+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \theta_1$$

Như vậy, nếu $x(t) \in \{\|y\| = H\}$ thì $(t, x(t)) \in Z_0$ với $t \geq 0$. Do đó ta được:

$$\int_{a_{i+1}}^{a_i^+} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \theta_1, \quad i = 1, 2, \dots, \quad a_i = v(\tau_i),$$

$$a_i^+ = v(\tau_i + 0)$$

Với $a = a_{i+1} = v(\tau_{i+1})$ từ bất đẳng thức cuối ta thu được:

$$\gamma \leq \int_{a_{i+1}}^{\psi(a_{i+1})} \frac{ds}{\varphi(s)} - \int_{a_{i+1}}^{a_i^+} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \int_{a_{i+1}}^{a_{i+1}^+} \frac{ds}{\varphi(s)} - \int_{a_{i+1}}^{a_i^+} \frac{ds}{\varphi(s)}$$

$$\text{hay } \int_{a_i^+}^{a_{i+1}^+} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \gamma, \quad i = 1, 2, \dots$$

SUMMARY

ON THE PARTIAL STABILITY OF DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEMS WITH IMPULSES

Tran Thi Hue*

University of Technology – Thai Nguyen University

In this paper is presented the problem: On the partial stability of differential equation systems with impulses. Then, were introduced the concepts of partial stability, Liapunov's function of impulsive differential equations (IDE). the theorems of partial stability, asymptotic stability and instability of IDE at fixed time were proved.

Keyword: Stability, asymptotic stability, instability, differential equation, impuls, Liapunov's function, positive definite, negative definite, partial.

Bất đẳng thức cuối cùng chỉ ra rằng dãy $\{a_i\}$ là dãy tăng bị chặn bởi $a_0 > 0$ vì $(t, x(t)) \in Z_0$, mà trong miền này hàm $V(t, x)$ giới nội.

Giả sử $\min_{v(t_0) \leq s \leq a_0} \varphi(s) = c > 0$ ta có:

$$\gamma \leq \frac{1}{c} \int_{a_i^+}^{a_{i+1}^+} ds = \frac{1}{c} (v(\tau_{i+1} + 0) - v(\tau_i + 0))$$

hay $(v(\tau_{i+1} + 0)) - v(\tau_i + 0) \geq \gamma c$

tức là đối với $k \in \mathbb{N}$ bất kỳ xảy ra bất đẳng thức: $(v(\tau_k + 0)) \geq k\gamma c + v(t_0)$. Bất đẳng thức cuối cùng mâu thuẫn với việc $\{v(\tau_i + 0)\}$ giới nội. Định lý được chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Lakshmikantham V., Bainov D. d. and Simeonov P. S., Theory of impulsive differential equations, New York, Word Scientific, 1989
- [2]. Nguyen Van Dao, "Stability of dynamical systems", Nxb Dai hoc Quoc gia Ha Noi, 1998
- [3]. M. Peng, Oscillation criteria for second-order impulsive delay difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 146, no. 1, pp. 227–235, 2003. Conference "Automatics – 2000" (11 – 15 September, 2000, Lviv), Editor V. Kuntsevych, Vol. 1, Mathematical Problems .
- [4]. Chiricalov V. A., Impulsive matrix system of differential equations, Proceedings the Institute of Mathematics of NAS of Belarus, 2004, V. 13, 147– 151.
- [5]. Q. Li, Z. Zhang, F. Guo, Z. Liu, and H. Liang, Oscillatory criteria for third-order difference equation with impulses, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 225, no. 1, pp. 80–86, 2009.

* Tel: 0984632890 or 0280.3747708.