ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

BÁO CÁO TỔNG KẾT

ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP TRƯỜNG

XÂY DỰNG VIDEO CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Mã số: T2022-VD17

Xác nhận của tổ chức chủ trì	Chủ nhiệm đề tài
KT. HIỆU TRƯỞNG	*(ký, họ tên)*
PHÓ HIỆU TRƯỞNG	
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN	
PGS.TS. Vũ Ngọc Pi	Phạm Thị Thu

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2023

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP
Đơn vị: Khoa KHCB&ƯD

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

1. Thông tin chung:

- Tên đề tài: **Xây dựng video các chuyên đề Đại số tuyến tính**
- Mã số: **T2022-VD17**
- Chủ nhiệm: ThS. Phạm Thị Thu
- Cơ quan chủ trì: Đại học Kỹ thuật Công nghiệp
- Thời gian thực hiện: 04/2022 – 10/2023

2. Mục tiêu:

- Xây dựng video các chuyên đề học phần Đại số tuyến tính.
- Cung cấp video các chuyên đề Đại số tuyến tính dùng làm tài liệu học tập cho sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên.

3. Kết quả nghiên cứu:

Đề tài đã xây dựng được 21 video các chuyên đề Đại số tuyến tính dùng làm tư liệu tự học, tự nghiên cứu cho sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên.

4. Sản phẩm.

- Sản phẩm đào tạo: *không*
- Sản phẩm khoa học: *không*
- Sản phẩm ứng dụng: Xây dựng được 21 video các chuyên đề Đại số tuyến tính

5. Hiệu quả và khả năng áp dụng

Kết quả nghiên cứu đã đáp ứng được mục tiêu nghiên cứu của đề tài: Cung cấp video các chuyên đề Đại số tuyến tính dùng làm tài liệu học tập cho sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên.

6. Khả năng áp dụng và phương thức chuyển giao kết quả nghiên cứu

Kết quả của đề tài có thể dùng làm tài liệu học tập học phần Đại số tuyến tính cho giảng viên và sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp – Đại học Thái Nguyên, giúp sinh viên có thể tự học trước bài học hoặc tự nghiên cứu, đào sâu kiến thức sau giờ học trên lớp, qua đó giúp các em hiểu và yêu thích môn học cũng như đạt kết quả tốt ở môn học này.

Ngày tháng 10 năm 2023

Cơ quan chủ trì	Chủ nhiệm đề tài
KT.HIỆU TRƯỞNG	
PHÓ HIỆU TRƯỞNG	
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP	
PGS.TS. Vũ Ngọc Pi	ThS. Phạm Thị Thu

THAI NGUYEN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Faculty of Fundamental Science

INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

1. General information:

- Project title: Creating lectures in form of videos for the thematic of Linear algebra.
- Code number: T2022 – VD17.
- Coordinator: MSc. Phạm Thị Thu
- Implementing institution: Thai Nguyen University of Technology.
- Duration: from April 2022 to October 2023.

2. Objectives:

- Compose lectures in form of videos for thematic of Linear algebra.
- Preparing a lecture bank in videos for thematic of Linear algebra used as learning materials for student at Thai Nguyen University of Technology.

3. Research results:

The project has completed recording 21 videos for thematic of Linear algebra to be used as self-study materials for students at Thai Nguyen University of Technology.

4. Products:

- Application products: Creating lectures in form of 21 videos for the thematic of Linear algebra.

5. Effects:

The results of research sastify the objective of project: Preparing a lecture in videos for the thematic of Linear algebra used as learning materials for student at Thai Nguyen University of Technology

6. Applicability and Transferred Method of the research results

The results of the Scientific project can be used as a document on the subject of Linear algebra subject for lecturers and students at Thai Nguyen University of Technology, helping students to learn by themselves before the lesson or to research on their own knowledge after class, thereby helping them understand and love the subject as well as achieve good results in this subject.

MỤC LỤC

I. MỞ ĐẦU

1. TỔNG QUAN VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

Học tập trực tuyến đã không còn xa lạ và đang bùng nổ mạnh mẽ trên thế giới cũng như ở Việt Nam với sự phát triển của internet. Hiện nay, người học có thể dễ dàng tìm kiếm được những video bài giảng về học phần Đại số tuyến tính trên các ứng dụng phần mềm và các nền tảng mạng xã hội, tuy nhiên bên cạnh những kênh bài giảng chất lượng thì cũng có nhiều kênh chưa được kiểm chứng về độ uy tín và chính xác. Hơn nữa, các video bài giảng mà người học dễ dàng tìm kiếm được trên mạng thường chỉ là các video đơn lẻ với các phần nội dung không liền mạch và không trùng khớp với nội dung kiến thức theo đề cương học phần Đại số tuyến tính đang được giảng dạy tại trường Đại học Kỹ thuật Công Nghiệp – Đại học Thái Nguyên.

2. TÍNH CẤP THIẾT CỦA VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

Học tập và giảng dạy trực tuyến đem lại rất nhiều lợi ích đột phá so với cách học truyền thống nhờ tính tương thích cao, sự linh hoạt và cá nhân hóa. Người học giờ đây đóng vai trò trung tâm và chủ động của quá trình đào tạo, có thể học mọi lúc, mọi nơi. Tuy nhiên, hình thức học tập này chưa thực sự đạt được chất lượng như mong muốn do nhiều yếu tố chủ quan và khách quan như điều kiện về cơ sở vật chất, ý thức học tập của sinh viên, khó khăn trong việc quản lý sinh viên trong giờ học của giáo viên, …

Đại số tuyến tính là học phần toán bắt buộc thuộc khối kiến thức giáo dục đại cương được giảng dạy cho tất cả sinh viên năm thứ nhất ở trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp – Đại học Thái Nguyên. Nội dung kiến thức của học phần này được sử dụng nhiều trong các môn học chuyên ngành của sinh viên trong những năm học tiếp theo. Với mong muốn nâng cao chất lượng học tập cho sinh viên trường ĐH KTCN trong giai đoạn học online cũng như sau này. Đồng thời giúp các sinh viên không được học học phần Đại số tuyến tính trong khung chương trình của mình vẫn có thể tiếp cận với môn học này, nhóm nghiên cứu đề xuất đề tài: *"Xây dựng Video các chuyên đề Đại số tuyến tính"*. Các video được thiết kế logic và hệ thống theo các chuyên đề cụ thể, có nội dung bám sát đề cương môn học; bao gồm việc nhắc lại lý thuyết và các bài tập vận dụng. Đây sẽ là nguồn tài liệu hữu ích phục vụ nhu cầu tự học của sinh viên đồng thời cũng hỗ trợ công tác giảng dạy trực tiếp cũng như trực tuyến của giảng viên bộ môn Toán. Sử dụng các video bài giảng sẽ giúp giảng viên và sinh viên có thêm thời gian thảo luận, trao đổi và tìm hiểu sâu hơn các nội dung kiến thức trong các giờ lên lớp góp phần nâng cao hiệu quả và chất lượng giờ học.

II. NỘI DUNG

1. TÓM TẮT ĐỀ TÀI

Đề tài hướng đến mục tiêu là xây dựng 21 video của 17 chuyên đề theo học phần Đại số tuyến tính để dùng làm tài liệu học tập trực quan cho sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp – Đại học Thái Nguyên. Cụ thể như sau:

Chuyên đề 1: Ma trận – Các phép toán ma trận (2 video)

Chuyên đề 2: Định thức của ma trận vuông (2 video)

Chuyên đề 3: Ma trận nghịch đảo (2 video)

Chuyên đề 4: Hạng của ma trận (1 video)

Chuyên đề 5: Hệ phương trình tuyến tính (2 video)

Chuyên đề 6: Sự độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của họ véc tơ (1 video)

Chuyên đề 7: Tọa độ trong không gian hữu hạn chiều (1 video)

Chuyên đề 8: Không gian con sinh bởi họ véc tơ (1 video)

Chuyên đề 9: Không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (1 video)

Chuyên đề 10: Tích vô hướng (1 video)

Chuyên đề 11: Ánh xạ tuyến tính (1 video)

Chuyên đề 12: Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính (1 video)

Chuyên đề 13: Ma trận của ánh xạ tuyến tính (1 video)

Chuyên đề 14: Ma trận đồng dạng (1 video)

Chuyên đề 15: Trị riêng và véc tơ riêng của ma trận vuông (1 video)

Chuyên đề 16: Chéo hóa ma trận (1 video)

Chuyên đề 17: Chéo hóa trực giao (1 video)

2. NỘI DUNG ĐỀ TÀI

Sau đây là nội dung 21 video của 17 chuyên đề Đại số tuyến tính được trích từ các slide PowerPoint đã ghi âm.

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 1

MA TRẬN – CÁC PHÉP TOÁN MA TRẬN

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 1

MA TRẬN – CÁC PHÉP TOÁN MA TRẬN

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN

I – Ma trận

1- Định nghĩa :

Ma trận cấp m × n là một bảng số hình chữ nhật gồm m hàng và n cột

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}, \forall i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}$$

Trong đó:

+ a_{ij} là phần tử thuộc hàng i cột j của ma trận A.

+ m: số hàng của ma trận A; n: số cột của ma trận A

2 - Các dạng đặc biệt của ma trận

a, Ma trận hàng là ma trận có một hàng và n cột, ký hiệu là $A=[a_1 \;\; a_2 \;\; \ldots \;\; a_n]$

b, Ma trận cột là ma trận có n hàng và một cột, ký hiệu là: $A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

c, Ma trận vuông là ma trận có số hàng bằng số cột

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}, \forall i,j=\overline{1,n}$$

Đường thẳng đi qua các phần tử $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ được gọi là đường chéo chính của ma trận A.

Đường thẳng đi qua các phần tử $a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \ldots, a_{n1}$ được gọi là đường chéo phụ của ma trận A.

d, Ma trận tam giác

+ Ma trận tam giác trên là ma trận vuông có các phần tử nằm phía dưới đường chéo chính đều bằng 0

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

+ Ma trận tam giác dưới là ma trận vuông có các phần tử nằm phía trên đường chéo chính đều bằng 0.

$$C=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

e, Ma trận chéo là ma trận vuông có các phần tử không nằm trên đường chéo chính bằng 0

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

f, Ma trận đơn vị cấp n là ma trận chéo có các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng 1.

Kí hiệu là: $I=I_n$

$$I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

g, Ma trận không là ma trận có tất cả các phần tử đều bằng 0. Kí hiệu là: θ

$$\theta=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

II – Các phép toán ma trận

1- Hai ma trận bằng nhau

Hai ma trận cùng cấp A và B được gọi là bằng nhau nếu các phần tử tương ứng của chúng bằng nhau, tức là $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ $(\forall i, \forall j)$

2- Phép cộng hai ma trận

Định nghĩa: Cho hai ma trận cùng cấp m×n là $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. Ma trận tổng của A và B, kí hiệu A + B, là ma trận cấp m×n được xác định bởi $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$.

Ma trận đối của $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, ký hiệu –A, là ma trận $[-a_{ij}]_{m\times n}$.

Tính chất : Nếu ba ma trận A, B và C cùng cấp thì

a, $A + B = B + A$ c, $-A + A = \theta$

b, $A + \theta = A$ d, $A + (B + C) = (A + B) + C$

3 - Phép nhân một số với ma trận

Định nghĩa: Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và số $\lambda \in R$. Ma trận tích của λ với A, ký hiệu λA là ma trận cấp m×n được xác định bởi $[\lambda a_{ij}]_{m\times n}$.

Tính chất: Nếu hai ma trận A và B cùng cấp, λ và μ là các số thực:

a) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, b) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

c) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A)$ d) $(-1)A = -A$, $0A = \theta$.

4 - Phép nhân hai ma trận

Định nghĩa: Cho $A = [a_{ik}]_{m\times p}$, $B = [b_{kj}]_{p\times n}$. Ma trận tích của A với B, kí hiệu AB, là ma trận cấp m×n được xác định bởi $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$ $\forall i = 1..m$, $\forall j = 1..n$.

Tính chất: Với giả thiết phù hợp về số hàng và số cột:

a, $A(B + C) = AB + AC$, b, $A(BC) = (AB)C$

c, $(B + C)A = BA + CA$, d, $k(BC) = (kB)C = B(kC)$

Chú ý:

+ Số cột của ma trận bên trái phải bằng số hàng của ma trận B bên phải.

+ Có tích AB nhưng chưa chắc đã có tích BA.

+ Khi A và B là hai ma trận vuông cùng cấp thì có cả tích AB và tích BA, nhưng không khẳng định AB = BA.

5 - Ma trận chuyển vị

Định nghĩa: Ma trận chuyển vị của $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, kí hiệu A^t (hoặc A'), là ma trận $[a_{ji}]_{n\times m}$ nhận được từ A bằng cách đổi hàng thành cột hoặc đổi cột thành hàng.

Tính chất: Giả sử phù hợp về số hàng và số cột, khi đó:

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$ b) $(AB)^t = B^tA^t$.

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 1

MA TRẬN – CÁC PHÉP TOÁN MA TRẬN

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1: Hai ma trận bằng nhau

Bài 1. Tìm ẩn *x, y, z và w* thỏa mãn phương trình :

$$\begin{bmatrix} w & x \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} y & w \\ z & x \end{bmatrix}$$

Bài giải:

$$\begin{bmatrix} w & x \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} y & w \\ z & x \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} w & x \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+2y & 3+2w \\ 2+2z & -1+2x \end{bmatrix}$$

Hai ma trận bằng nhau khi và chỉ khi các phần tử ở vị trí tương ứng bằng nhau, suy ra:

$$\begin{cases} -4+2y = w \\ 3+2w = x \\ 2+2z = y \\ -1+2x = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3/2 \\ z = -1/4 \\ w = -1 \end{cases}$$

Vậy: $x = 1$, $y = 3/2$, $z = -1/4$, $w = -1$

Dạng 2: Sử dụng các phép toán ma trận để tính toán

Bài 1. Cho các ma trận sau: $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 2 & -2\end{bmatrix}$

Tính: $a, A^t; B^t; (A+B)^t; (AB)^t$

$b, 2A+3AB$

$c, -3A^t+2B^2$

Bài giải:

a, Muốn tìm A^t ta đổi hàng thành cột đồng thời cột thành hàng của ma trận A:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

Tương tự: $B=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 2 & -2\end{bmatrix} \Rightarrow B^t=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix}$

Từ đó suy ra:

$$(A+B)^t = A^t+B^t = \begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$(AB)^t = B^t.A^t = \begin{bmatrix}-3 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3.2+2.(-1) & -3.1+2.3\\ 0.2+(-2).(-1) & 0.1+(-2).3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-8 & \\ 2 & \end{bmatrix}$$

b, $2A = 2.\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2.2 & 2.(-1)\\ 2.1 & 2.3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & -2\\ 2 & 6\end{bmatrix}$

$$3AB = 3.\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 2 & -2\end{bmatrix} = 3.\begin{bmatrix}2.(-3)+(-1).2 & 2.0+(-1).(-2)\\ 1.(-3)+3.2 & 1.0+3.(-2)\end{bmatrix} = 3.\begin{bmatrix}-8 & 2\\ 3 & -6\end{bmatrix} =$$

$$2A+3AB = \begin{bmatrix}4 & -2\\ 2 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-24 & 6\\ 9 & -18\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4+(-24) & -2+6\\ 2+9 & 6+(-18)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-20 & \\ 11 & \end{bmatrix}$$

c, $-3A^t = -3.\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6 & -3\\ 3 & -9\end{bmatrix}$

$$2B^2 = 2.\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 2 & -2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 2 & -2\end{bmatrix} = 2.\begin{bmatrix}9 & 0\\ -10 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}18 & 0\\ -20 & 8\end{bmatrix}$$

Vậy $-3A^t+2B^2 = \begin{bmatrix}-6 & -3\\ 3 & -9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}18 & 0\\ -20 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13 & -3\\ -17 & -1\end{bmatrix}$

Bài 2. Hãy tính $f(A)$ với $f(x)=x^2-5x+3$ và $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}$

Bài giải:

Với $f(x)=x^2-5x+3$ thì $f(A)=A^2-5A+3I$ trong đó I là ma trận đơn vị cùng c trận A.

Ta có $A^2 = \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 0 & 3\\ -2 & 11 & 4\\ -4 & 10 & -1\end{bmatrix}$

$$-5A = -5.\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5 & 5 & -10\\ 0 & -15 & -5\\ 10 & -10 & -5\end{bmatrix}$$

$$3I = 3.\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

Vậy kết quả thu được là:

$$f(A) = A^2-5A+3I = \begin{bmatrix}-3 & 0 & 3\\ -2 & 11 & 4\\ -4 & 10 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5 & 5 & -10\\ 0 & -15 & -5\\ 10 & -10 & -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-5 & 5 & -7\\ -2 & -1 & -1\\ 6 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

Dạng 3: Giải phương trình ma trận

Bài 1. Giải phương trình ma trận $A.X=B$ đối với ẩn là ma trận X, với

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}; \quad B=\begin{bmatrix}5 & -4 & 4\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

Bài giải:

Vì ma trận A là ma trận cấp 2x2, ma trận B cấp 2x3 nên ma trận X là ma trận cấp 2x3

Gọi ma trận $X=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{bmatrix}$ ta có:

$$A.X=B \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & -4 & 4\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

Thực hiện phép nhân hai ma trận ở vế trái , ta có:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1.a+2.d & 1.b+2.e & 1.c+2.f \\ -1.a+0.d & -1.b+0.e & -1.c+0.f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Và áp dụng định nghĩa hai ma trận bằng nhau ta thu được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+2d=5 \\ b+2e=-4 \\ c+2f=4 \\ -a=-1 \\ -b=0 \\ -c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=2 \\ d=2 \\ e=-2 \\ f=1 \end{cases}$$

Vậy ma trận X mới tìm được là: $X=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Dạng 4: Một số dạng bài tập khác

Bài 1. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

a, Chứng minh rằng: $A^n=\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b, Tìm tất cả các ma trận B giao hoán với ma trận A, nghĩa là $AB=BA$

Bài giải:

a, Ta chứng minh đẳng thức bằng phương pháp quy nạp theo n.

Với n = 1: hiển nhiên đúng.

Giả sử đẳng thức đúng với n bằng k, tức là $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; ta sẽ đi chứng minh đẳng thức cũng đúng với n bằng (k + 1)tức là $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Thật vậy $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ đpcm

Như vậy đẳng thức trên đúng với n (nguyên dương) bất kì.

b, Tìm tất cả các ma trận B giao hoán với ma trận A, nghĩa là $AB=BA$

Giả sử ma trận B phải tìm có dạng: $B=\begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}$, khi đó ta có:

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+y & z+t \\ y & t \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & x+z \\ y & y+t \end{bmatrix}$$

Ma trận B giao hoán với ma trận A, tức là $AB=BA$ tương đương với: $\begin{cases} x+y=x \\ z+t=x+z \\ y=y \\ t=y+t \end{cases}$

Do đó: $y=0,\ x=t,\ z$ tùy ý

Vậy $B=\begin{bmatrix} x & z \\ 0 & x \end{bmatrix}$.

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 8 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

a, Cỡ của ma trận A là:

A. 3x3 B. 3x4 C. 4x3 D. 4x4

b, Phần tử a_{23} của ma trận A là:

A. 8 B. 5 C. 7 D. 6

Đáp án: a) B

b) C

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 2: Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Ma trận A^t là

A. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. B. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

C. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$. D. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$.

Đáp án : B

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 3: Cho phép tính: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Khi đó giá trị của a là.

A. $a=5$. B. $a=9$.

C. $a=-3$. D. $a=-12$.

Đáp án: B

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 3: Cho phép tính: $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Khi đó giá trị của a là:

A. $a=5$. B. $a=9$.

C. $a=-3$. D. $a=-12$.

Đáp án: B

Câu 4: Cho hai ma trận $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. Đặt $C=A+B=\left[c_{ij}\right]$ thì phần tử c_{21} bằng

A. $c_{21}=3$. B. $c_{21}=0$.

C. $c_{21}=-3$. D. $c_{21}=8$.

Đáp án: C

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 2

ĐỊNH THỨC CỦA MA TRẬN VUÔNG

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 2

ĐỊNH THỨC CỦA MA TRẬN VUÔNG

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN

1 - Định nghĩa:

Cho ma trận vuông cấp n $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Định thức của ma trận vuông A, kí hiệu là det(A) (hoặc $|A|$) được định nghĩa d...

+) Nếu $A=[a_{11}]$ thì det(A) = a_{11}

+) Với $n \geq 2$, định thức của ma trận vuông A cấp n là:

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det(M_{1n}).$$

trong đó ma trận M_{ij} là ma trận cấp (n – 1) nhận được từ ma trận A bằng cách ... hàng i cột j (gọi là ma trận con ứng với phần tử a_{ij})

2 – Tính chất

- det(A)=det(A')
- Nếu A và B là hai ma trận vuông cùng cấp thì det(AB) = det(A)det(B).
- Đổi chỗ hai hàng của một định thức ta được một định thức mới bằng định thức ... dấu.
- Một định thức có hai hàng giống nhau thì bằng 0.
- Một định thức có một hàng toàn là số 0 thì bằng 0.
- Khi nhân các phần tử trên cùng một hàng với cùng một số λ thì được một định thức m... bằng định thức cũ nhân với λ.
- Một định thức có hai hàng tỷ lệ thì bằng 0.
- Khi ta nhân một hàng với hằng số λ rồi cộng vào một hàng khác thì được một định thức mới bằng định thức cũ.
- Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử trên đường chéo chính.

3 – Cách tính định thức:

+) Tính định thức của ma trận vuông bằng định nghĩa (khai triển theo 1 hàn... bất kỳ)

+) Tính định thức của ma trận vuông bằng các phép biến đổi sơ cấp đưa định thức ... về dạng tam giác, rồi tính tích các phần tử trên đường chéo chính.

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 2
ĐỊNH THỨC CỦA MA TRẬN VUÔNG

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1: Tính định thức của ma trận (sử dụng định nghĩa)

Bài 1: Tính các định thức sau:

a) $A=[5] \quad \rightarrow \det(A)=5$

b) $B=[-2] \rightarrow \det(B)=-2$

c) $C=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix} \rightarrow \det(C)=1.2-(-1).3=5$

d) $\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 5\end{vmatrix}=-10-3=-13$

e) $\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\cos\alpha & \sin\alpha\end{vmatrix}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

f) $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 4 & -4 & 1\end{bmatrix} \rightarrow \det(A)=0.\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -4 & 1\end{vmatrix}-2.\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}+1.\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & -4\end{vmatrix}=0.7-2.$

$$\begin{array}{ccccc} & & -4 & 0 & 6\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1\\ 4 & -4 & 1 & 4 & -4\\ & & 0 & 16 & -12\end{array}$$

$\rightarrow \det(A)=(0+16-12)-(-4+0+6)=2$

h, $\begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 5\\ 1 & -2 & 1 & -2\end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 5\\ -2 & 1 & -2\end{vmatrix}-0.\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 5\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}+(-1).\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 5\\ 1 & -2 & -2\end{vmatrix}-2$

$=1.3-0+(-1).(-5)-2.(-1)=10$

Bài 2: Tính định thức sau bằng cách khai triển nó theo các phần tử của h

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ a & b & c & d\\ -1 & -1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

Bài giải:

$det(A) = (-1)^{i+1}a_{i1}det(M_{i1}) + (-1)^{i+2}a_{i2}det(M_{i2}) + ... + (-1)^{i+n}a_{in}det(M_{in})$.

$\begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ a & b & c & d\\ -1 & -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=a.\begin{vmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}-b.\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}+c.\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{vmatrix}-d.\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}$

$=a.3-b.1+c.2-d.(-1)=3a-b+2c+d$

Dạng 2: Tính định thức của ma trận (sử dụng phép biến đổi sơ cấp

Bài 1: Tính các định thức sau bằng cách sử dụng phép biến đổi sơ cấp:

a, $\begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 5\\ 1 & -2 & 1 & -2\end{vmatrix}$ b, $\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$

Bài giải:

a, $\begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 5\\ 1 & -2 & 1 & -2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 3 & 3 & 1\\ 0 & -2 & 2 & -4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 9 & -5\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 9\\ 0 & 0 & \end{vmatrix}$

$=1.(-1).9.\left(-\frac{10}{9}\right)=10$

b, $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{h1+h2+h3+h4 \to h1} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{6}h1 \to h1} 6.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{-h1+h2 \to h2 \\ -h1+h3 \to h3 \\ -h1+h4 \to h4}]{} 6.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 6.1.2.2.2 = 48$$

Bài 2: Cho $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \Delta$. Hỏi các định thức sau bằng bao nhiêu?

a, $\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = ?$ b, $\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a & b & c \end{vmatrix} = ?$ c, $\begin{vmatrix} a'' & c'' & b'' \\ a' & c' & b' \\ a & c & b \end{vmatrix} = ?$

Bài giải:

a, $\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = -\Delta$

b, $\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a & b & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \Delta$ c, $\begin{vmatrix} a'' & c'' & b'' \\ a' & c' & b' \\ a & c & b \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c & b \\ a' & c' & b' \\ a'' & c'' & b'' \end{vmatrix}$

Dạng 3: Giải phương trình

Bài 1: Tìm x thỏa mãn phương trình sau:

a, $\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -3 & x \end{vmatrix} = 0$ b, $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = 0$ c, $\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

Bài giải:

a, $\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ -3 & x \end{vmatrix} = (x-2).x-3 = x^2-2x-3 = 0 \Rightarrow x=-1, x=3$

b, $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \neq 0$ $\forall x$, vậy PT vô nghiệm

c, $\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x.\begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x.[(x+1).x-2] = x.(x^2+x-2) = 0 \Rightarrow x=0, x=1, x=$

Bài 2: Giải phương trình $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$

Bài giải:

Thay x = 2 ta được: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$ do đó x = 2 thỏa mãn phương trình đã

Tương tự với x = 3 ta được $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$ Với x = 4 ta có: $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$

Vậy x = 3 và x = 4 cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Do phương trình là bậc 3 nên có nhiều nhất 3 nghiệm thực hay phức, nên nghiệm của phương trình đã cho là 2, 3, 4

Dạng 4: Một số dạng bài tập khác.

Bài 1: Biết rằng các số 204, 527, 255 chia hết cho 17, hãy chứng minh $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

cho 17.

Bài giải: Áp dụng tính chất: khi ta nhân một hàng với hằng số λ rồi cộng vào một hàng khác thì được một định thức mới bằng định thức cũ.

Ta có $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4+10.0 \\ 5 & 2 & 7+10.2 \\ 2 & 5 & 5+10.5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4+10.0+100.2 \\ 5 & 2 & 7+10.2+100.5 \\ 2 & 5 & 5+10.5+100.2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 204 \\ 5 & 2 & 527 \\ 2 & 5 & 255 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 17.12 \\ 5 & 2 & 17.31 \\ 2 & 5 & 17.15 \end{vmatrix} = 17.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 12 \\ 5 & 2 & 31 \\ 2 & 5 & 15 \end{vmatrix}$ M17

Bài 2: Cho A và B là hai ma trận vuông cấp 3 thỏa mãn $|A| = -2$ và $|B| =$

a, $|BA|$ b, $|B^4|$ c, $|2A|$ d, $|(AB)^T|$ e, $|B^{-1}|$

Bài giải: Áp dụng các tính chất:

+) $\det(A^t) = \det(A)$;

+) $\det(kA) = k^n.\det(A)$ với A là ma trận vuông cấp n

+) Nếu A và B là hai ma trận vuông cùng cấp, thì $\det(AB) = \det(A).\det(B)$

a, $|BA| = |B|.|A| = 5.(-2) = -10$

b, $|B^4| = |B.B.B.B| = |B|.|B|.|B|.|B| = |B|^4 = 5^4 = 625$

c, Do A là ma trận cấp 3 nên $|2A| = 2^3|A| = 8.(-2) = -16$

d, $|(AB)^t| = |AB| = |A|.|B| = (-2).5 = -10$

e, Do $B.B^{-1} = I_3 \Rightarrow |B.B^{-1}| = |I_3| = 1$, $|B.B^{-1}| = |B|.|B^{-1}| = 1 \Rightarrow |B^{-1}| = \frac{1}{|B|} = \frac{1}{5}$

Bài tập tự luyện

Bài 1: a) Tính định thức sau $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

b) Tính định thức sau bằng cách khai triển nó theo các phần tử của cột 4: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Bài 2: Giải phương trình sau: $\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 0 & 2-x & 5 \\ 0 & 5 & 2-x \end{vmatrix} = 0$

Bài 3: Cho A là ma trận vuông cấp n, giả sử det(A) = 4.

Tìm $\det(A^tA)$; $\det(A^3)$; $\det(A^{-1})$; det(B) với $B^2 = A$

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\det(A) = 5$. B. $\det(A) = -13$.

C. $\det(A) = -1$. D. Các phương án trên đều sai.

Đáp án: D

Câu 2: Định thức của ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ là:

A. $\det(A) = ab - cd$. B. $\det(A) = ad - bc$.

C. $\det(A) = ac - bd$. D. $\det(A) = bc - ad$.

Đáp án: B

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 3: Định thức của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 2 & 1 & a^2 & 2 \end{bmatrix}$ tính theo a là

A. $\det(A) = 2a^3$. B. $\det(A) = 0$ với mọi a.

C. $\det(A) = -5a^2$. D. $\det(A) = 10a^3$.

Đáp án: B

Câu 4: Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & a^2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\det(A)$ bằng

A. $7a^2 - 19$. B. $7a^2 - 35$.

C. $9a^2 - 19$. D. $9a^2 - 35$.

Đáp án: B

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 3

MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 3

MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

- Ký hiệu: M_n là tập tất cả các ma trận vuông cấp n.

I_n (hoặc I) là ma trận đơn vị cấp n.

- Ma trận nghịch đảo của $A \in M_n$, ký hiệu A^{-1}, là ma trận thuộc M_n sao cho:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Khi đó ta còn nói là A khả đảo hay khả nghịch, hoặc không suy biến.

2, Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

a, Tìm ma trận nghịch đảo bằng phụ đại số

- Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Ta gọi M_{ij} ma trận con ứng với phần tử a_{ij} nhận được … bỏ đi hàng i và cột j chứa a_{ij}. Ký hiệu $d_{ij} = \det(M_{ij})$ là định thức con ứng với ph…

Đặt $C = [c_{ij}]_{n\times n}$ với $c_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ij}$ là phụ đại số của a_{ij}.

Nếu $\det(A) \neq 0$ thì A khả đảo với $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} C^t, \quad C = [c_{ij}]$

Ngược lại, nếu A khả đảo thì $\det(A) \neq 0$.

- Nếu hai ma trận cùng cấp A và B khả đảo thì AB khả đảo và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

b, Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp Gauss – Jordan

- Viết ma trận đơn vị I bên cạnh ma trận A
- Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa dần ma trận A về ma trận đơn vị I, tác động đồng thời phép biến đổi sơ cấp vào hàng của ma trận I.
- Khi A đã được biến đổi thành I thì I trở thành ma trận nghịch đảo A^{-1}.

$$\left[A \mid I\right] \xrightarrow{PBDSC} \left[I \mid A^{-1}\right]$$

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 3

MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1: Kiểm tra một ma trận là ma trận nghịch đảo của một ma …

Bài 1. Hãy chỉ ra rằng ma trận B là ma trận nghịch đảo của ma trận A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad AB = BA = I$$

Bài giải:

Ta có: $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Do đó $AB = BA = I$, theo định nghĩa ta có: **ma trận B là ma trận nghịch đảo …**

Dạng 2: Tìm ma trận nghịch đảo bằng phụ đại số

Bài 1: Các ma trận sau có khả đảo không, nếu có hãy tìm ma trận nghịch đảo b…

a, $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ b, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ c, $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Bài giải:

a, Ta có $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$. Do đó ma trận A không có ma trận nghịch đảo.

b, Ta có $\det B = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$ suy ra B khả đảo, tức tồn tại B^{-1} $\quad B^{-1} = \dfrac{1}{\det B} C^t$

$c_{11} = (-1)^{1+1}.|M_{11}| = 3 \qquad c_{12} = (-1)^{1+2}.|M_{12}| = -3$

$c_{21} = (-1)^{2+1}.|M_{21}| = -(-1) = 1 \qquad c_{22} = (-1)^{2+2}.|M_{22}| = 2$

Ma trận $C = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ Vậy $B^{-1} = \dfrac{1}{\det B} C^t = \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & \end{bmatrix}$

c, Ta có $\det D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$ suy ra D khả đảo, tức tồn tại D^{-1}

$c_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad c_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad c_{31} = (-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 1 & \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$c_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \qquad c_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \qquad c_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} =$

$c_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad c_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad c_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$

Ma trận $C = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 4 & -6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Vậy $D^{-1} = \dfrac{1}{\det D} C^t = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Dạng 3: Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp Gauss – Jordan

Bài 1: Áp dụng phương pháp Gauss – Jordan tính ma trận nghịch đảo của m

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&2&0\\2&-1&1\end{bmatrix}$$

Bài giải: Vì $\det A = 1$ khác 0 nên ma trận A có ma trận nghịch đảo, tức tồn tại A^{-1}.

Áp dụng phương pháp Gauss – Jordan tính ma trận nghịch ta thu được bảng sau:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\-1&2&0&0&1&0\\2&-1&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[h3=-2h1+h3]{h2=h1+h2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&4&1&1&1&0\\0&-5&-1&-2&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{h3=\frac{5}{4}h2+h3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&4&1&1&1&0\\0&0&\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}&\frac{5}{4}&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[h3=4h3]{h2=\frac{1}{4}h2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&0&1&-3&5&4\end{array}\right]\xrightarrow[h1=-h3+h1]{h2=-\frac{1}{4}h3+h2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&4&-5&-4\\0&1&0&1&-1&-1\\0&0&1&-3&5&4\end{array}\right]\xrightarrow{h1=-2h2+h1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Vậy $A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-3&-2\\1&-1&-1\\-3&5&4\end{bmatrix}$

Dạng 4: Giải phương trình ma trận

Bài 1. Giải phương trình $AX=B$ đối với ẩn là ma trận X, với:

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&2&1\\-2&3&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\1&0&2&2\\1&-2&2&0\end{bmatrix}$$

Bài giải: Xét phương trình ma trận $AX=B$ với A là ma trận vuông. Nếu A có ma trận nghịc

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B$$
$$\left(A^{-1}A\right)X=A^{-1}B$$
$$X=A^{-1}B$$

Để xét sự tồn tại của A^{-1} ta tính định thức của ma trận A đã cho: $\det A=\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&2&1\\-2&3&1\end{vmatrix}=1\neq 0$

do đó ma trận A có ma trận nghịch đảo (tìm bằng phương pháp phụ đại số): $A^{-1}=$

Do đó:

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}-1&4&-3\\-1&3&-2\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\1&0&2&2\\1&-2&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&5&1&9\\0&3&1&7\\1&-1&1&-3\end{bmatrix}$$

Dạng 5: Một số dạng bài tập khác

Bài 1. Cho A là một ma trận vuông cấp n

a, Cho det A = 3, hãy tính det (A^2) và det (A^3)

b, Cho biết A khả đảo và det A = 4; tính det (A^{-1})

c, Chứng minh rằng nếu A khả đảo và AB = AC thì B = C.

Bài giải:

a, det (A^2) = det (AA) = det (A). det(A) = 3.3 = 9

det (A^3) = det (A^2A) = det (A^2). det(A) = 9.3 = 27

b, Vì A khả đảo nên A có ma trận nghịch đảo A^{-1} và thỏa mãn

$AA^{-1} = I$

det (AA^{-1}) = det I

det (A).det(A^{-1}) = 1

suy ra: det(A^{-1}) = 1/ det (A) = 1/4

c, Chứng minh rằng nếu A khả đảo và AB = AC thì B = C.

Nhân A^{-1} với 2 vế của đẳng thức AB = AC ta có:

A^{-1} (AB) = A^{-1} (AC)

$(A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C$

Suy ra B = C

Bài 2. Cho ma trận chéo $A=\begin{bmatrix}a_{11}&0&0&0\\0&a_{22}&0&0\\0&0&\dots&0\\0&0&0&a_{nn}\end{bmatrix}$ trong đó $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}\neq 0$.

Chứng minh rằng A khả đảo và tìm A^{-1}

Bài giải: Ta có $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}\neq 0$ nên A khả đảo tức là tồn tại A^{-1}

Vì $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}\neq 0$ nên $a_{ii}\neq 0$ với mọi i.

Xét ma trận $B=\begin{bmatrix}\frac{1}{a_{11}}&0&\dots&0\\0&\frac{1}{a_{22}}&\dots&0\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&\frac{1}{a_{nn}}\end{bmatrix}$ Ta thấy AB = BA = I, do đó $B = A^{-1}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Hãy chỉ ra rằng ma trận B là ma trận nghịch đảo của ma trận A:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}, B=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-4 & -5 & 3\\ -4 & -8 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

Bài 2: Các ma trận sau có khả đảo không, nếu có hãy tìm ma trận nghịch đảo bằng pháp

a, $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ b, $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}$ c, $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & -2 & -1\end{bmatrix}$

Bài 3: Giải phương trình ma trận tìm ma trận A:

a, $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. b, $A.\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{bmatrix}$

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Ký hiệu ma trận nghịch đảo của ma trận A là

A. A^t. B. $\overline{A}$

C. A^{-1} D. $\det(A)$

Đáp án: C

Câu 2: Cho $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$. Gọi $C=\left[c_{ij}\right]_{3\times3}$ là ma trận phụ đại số tương ứng của ma trận A. Khi đó phần tử c_{23} được xác định bởi công thức là

A. $c_{23}=(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}$. B. $c_{23}=(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}$.

C. $c_{23}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}$. D. $c_{23}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}$.

Đáp án: B

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 3: Điều kiện của m để ma trận $A=\begin{bmatrix}m & 2\\ 1 & m+1\end{bmatrix}$ khả nghịch là

A. $m=1$ hoặc $m=-2$. B. Không có giá trị nào của m thỏa mãn.

C. $m\neq1$. D. $m\neq-2$ và $m\neq1$.

Đáp án: D

Câu 4: Ma trận nghịch đảo của ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ là

A. $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$. B. $A^{-1}=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$.

C. $A^{-1}=\begin{bmatrix}-5 & -3\\ -2 & -1\end{bmatrix}$. D. $A^{-1}=\begin{bmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$.

Đáp án: D

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 4

HẠNG CỦA MA TRẬN

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 4

HẠNG CỦA MA TRẬN

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN

Hạng của ma trận

- **Định nghĩa:** Hạng của ma trận A là cấp cao nhất của các định thức con khác không của A. Kí hiệu: rank A ($r(A)$)

- **Cách tính hạng của ma trận bằng phép biến đổi sơ cấp về hàng**

+ Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng đưa ma trận A về dạng ma trận bậc th

+ Hạng của ma trận bằng số hàng khác không của nó.

- **Tính chất**

+ $r(A) = r(A^t)$

+ Nếu A là một ma trận vuông cấp n khi đó $r(A) = n \leftrightarrow \det A \neq 0$

HỌC PHẦN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 4

HẠNG CỦA MA TRẬN

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1. Tìm hạng của ma trận

Bài 1. Tìm hạng của các ma trận sau:

$$a, A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2\end{bmatrix} \qquad b, B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1\end{bmatrix}$$

Bài giải: Để tìm hạng của ma trận ta áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng

$$a, A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2\end{bmatrix} \xrightarrow[h_3=-h_1+h_2]{h_2=-2h_1+h_2} \begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2\end{bmatrix} \xrightarrow{} \begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Ma trận bậc thang có hai hàng khác không, nên suy ra: rank(A) = 2

$$b, B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{h_3=-5h_1+h_3\\ h_4=-7h_1+h_4}]{h_2=-2h_1+h_2} \begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 0 & -7 & -13 & 6\\ 0 & -14 & -26 & 12\\ 0 & -14 & -26 & 8\end{bmatrix} \xrightarrow[h_4=-2h_2+h_4]{h_3=-2h_2+h_3} \begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 0 & -7 & -13 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_3\leftrightarrow h_4} \begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 0 & -7 & -13 & 6\\ 0 & 0 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Vậy rank(B) = 3 vì ma trận bậc thang có 3 hàng khác không.

Dạng 2. Biện luận hạng của ma trận

Bài 1. Xác định hạng của ma trận sau phụ thuộc k (k – số thực)

$$A=\begin{bmatrix}3 & k & 1 & 2\\ 1 & 4 & 7 & 2\\ 1 & 10 & 17 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

Bài giải:

$$A=\begin{bmatrix}3 & k & 1 & 2\\ 1 & 4 & 7 & 2\\ 1 & 10 & 17 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 3\end{bmatrix} \xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_4} \begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & k\\ 1 & 2 & 7 & 4\\ 1 & 4 & 17 & 10\\ 4 & 3 & 3 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{h_1\leftrightarrow h_4} \begin{bmatrix}4 & 3 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 7 & 4\\ 1 & 4 & 17 & 10\\ 3 & 2 & 1 & k\end{bmatrix} \xrightarrow{h_1\leftrightarrow h_2} \begin{bmatrix}1 & 2 & 7 & 4\\ 4 & 3 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 17 & 10\\ 3 & 2 & 1 & k\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{h_3=-h_1+h_3\\ h_4=-3h_1+h_4}]{h_2=-4h_1+h_2} \begin{bmatrix}1 & 2 & 7 & 4\\ 0 & -5 & -25 & -15\\ 0 & 2 & 10 & 6\\ 0 & -4 & -20 & k-12\end{bmatrix} \xrightarrow[h_4=-\frac{4}{5}h_2+h_4]{h_3=\frac{2}{5}h_2+h_3} \begin{bmatrix}1 & 2 & 7 & 4\\ 0 & -5 & -25 & -15\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & k\end{bmatrix} \xrightarrow{h_3\leftrightarrow h_4} \begin{bmatrix}1 & 2 & 7 & 4\\ 0 & -5 & -25 & -15\\ 0 & 0 & 0 & k\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Vậy: +) Nếu $k=0$ thì $r(A)=2$ +) Nếu $k\neq 0$ thì $r(A)=3$

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các ma trận bậc thang sau, ma trận có hạng bằng 2 là

A. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

B. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

C. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

D. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

Đáp án: D

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 2: Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & a & 0\end{bmatrix}$. Để $rank(A)=2$ thì điều kiện của a là:

A. $a=3$.

B. $a\neq 0$.

C. $a=0$.

D. Cả A và C đúng

Đáp án: C

Câu 3: Hạng của ma trận A được kí hiệu là:

A. $|A|$.

B. $r(A)$.

C. $\det(A)$.

D. $\|A\|$.

Đáp án: B

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 5

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 5:

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN

1 - Hệ phương trình tuyến tính là một hệ gồm m phương trình bậc nhất với n ẩn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Hoặc viết dưới dạng $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, i = 1..m, trong đó $x_1, x_2, ..., x_n$ là các ẩn số, a_{ij} là hệ số của ẩn, $b_1, ..., b_m$ là vế phải.

$$\text{Đặt } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Khi đó hệ phương trình có dạng ma trận là: Ax = b

- ***Định lý Kronechker – Capelli***: Hệ phương trình tuyến tính có nghiệm khi và chỉ khi $rankA = rank\overline{A}$

Nhận xét:

+) Nếu $rank(\overline{A}) > rank(A)$ thì hệ phương trình tuyến tính vô nghiệm.

+) Nếu $rank(\overline{A}) = rank(A) = n$ (với n là số ẩn) thì hệ phương trình tuyến tính có nghiệm duy nhất.

+) Nếu $rank(\overline{A}) = rank < n$ (với n là số ẩn) thì hệ phương trình tuyến tính có vô số nghiệm.

2 - Hệ Cramer là hệ phương trình tuyến tính có số phương trình bằng số ẩn và det(A) ≠ 0.

Định lí Cramer: Hệ Cramer có nghiệm duy nhất tính theo công thức $x = A^{-1}b$, hay $x_j = \frac{det(A_j)}{det(A)}$, với A_j là ma trận nhận được từ A sau khi thay cột thứ j bằng cột vế phải.

3 - Hệ thuần nhất là hệ có $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$, hệ có dạng ma trận là $Ax = \theta$.

Hệ thuần nhất luôn có nghiệm tầm thường $x = \theta$.

Trường hợp m = n, hệ thuần nhất có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi det(A) = 0.

4 - Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss - Jordan

+ Quá trình Gauss: Ta viết ma trận A và cạnh nó là ma trận vế phải b, ta được ma trận chữ nhật $\overline{A}$ = [A, b]. Ta áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng vào ma trận $\overline{A}$ để đưa dần ma trận A về dạng tam giác (trên); giải hệ tam giác trên từ dưới lên ta thu được nghiệm.

+ Quá trình Jordan: sau khi đưa ma trận A về dạng tam giác (trên) (đã thực hiện xong quá trình Gauss) ta tiếp tục áp dụng các phép biến đổi sơ cấp để đưa ma trận A về ma trận đơn vị.

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 5:

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1: Giải hệ Cramer

Bài 1. Áp dụng định lí Cramer giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

Bài giải:

Vì $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ nên đây là hệ Cramer.

Áp dụng định lí Crame ta có:

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ suy ra $\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3$

$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ suy ra $\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ suy ra $\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5.$

Vậy ta có nghiệm của hệ Cramer là:

$$x_1 = -\frac{3}{2},\ x_2 = -1,\ x_3 = \frac{5}{2}.$$

Bài 2. Viết nghiệm của hệ theo a, b, c: $\begin{cases} x + y - z = a \\ x + 2y - 2z = b \\ 2x - y + 2z = c \end{cases}$

Bài giải:

Vì $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ (với A là ma trận hệ số của hệ phương trình) nên hệ phương trình có nghiệm duy nhất phụ thuộc a, b và c

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ b & 2 & -2 \\ c & -1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 2a - b \qquad y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & b & -2 \\ 2 & c & 2 \end{vmatrix}}{1} = -6a + 4b + c$$

$$z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & b \\ 2 & -1 & c \end{vmatrix}}{1} = -5a + 3b + c$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x, y, z) = (2a - b, -6a + 4b + c, -5a + 3b + c)$

Dạng 2: Giải hệ phương trình bằng phép biến đổi sơ cấp

Bài 1. Áp dụng phương pháp Gauss giải hệ sau: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x + 4y + 9z = -9 \end{cases}$

Bài giải:

Ta viết ma trận A cạnh ma trận vế phải b, thu được ma trận chữ nhật [A,b]

$$\overline{A} = [A,b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 9 & -9 \end{array}\right]$$

Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp vào hàng đối với ma trận trên để đưa ma trận A về dạng tam giác trên ta có:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 9 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_3 = -h_1 + h_3]{h_2 = -h_1 + h_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 8 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_3 = -3h_2 + h_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_3 = \frac{1}{2}h_3}$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ tam giác trên: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = -2 \\ z = -2 \end{cases}$

Giải hệ tam giác trên này từ dưới lên ta thu được: $x = 1, y = 2, z = -2$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $x = 1, y = 2, z = -2$

Bài 2. Áp dụng phương pháp Gauss – Jordan giải hệ sau: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=-1 \\ x+4y+9z=-9 \end{cases}$

Bài giải:

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&-1\\1&4&9&-9\end{bmatrix}\xrightarrow[h_3=-h_1+h_3]{h_2=-h_1+h_2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-2\\0&3&8&-10\end{bmatrix}\xrightarrow{h_3=-3h_2+h_3}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-2\\0&0&2&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{h_3=\frac{1}{2}h_3}$$

$$\xrightarrow[h_1=-h_3+h_1]{h_2=-2h_3+h_2}\begin{bmatrix}1&1&0&3\\0&1&0&2\\0&0&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{h_1=-h_2+h_1}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&-2\end{bmatrix}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là: $\begin{cases} x & =1 \\ y & =2 \\ z & =-2 \end{cases}$

Dạng 3. Giải hệ thuần nhất

Bài 1. Xác định a để hệ sau có nghiệm không tầm thường: $\begin{cases} ax-3y+z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ 3x+2y-2z=0 \end{cases}$

Bài giải:

Ta có định thức của ma trận hệ số của ẩn là:

$$\det A=\begin{vmatrix}a&-3&1\\2&1&1\\3&2&-2\end{vmatrix}=-4a-20$$

Điều kiện cần và đủ để hệ thuần nhất đã cho có nghiệm không tầm thường là detA = 0

tức là: $-4a-20=0 \Leftrightarrow a=-5$

Trường hợp m = n, hệ thuần nhất có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi det(A) = 0.

Bài 2. Trong các hệ dưới đây, hệ nào có nghiệm không tầm thường, hệ nào

a, $\begin{cases} x+3y+5z+t=0 \\ 4x-7y-3z-t=0 \\ 3x+2y+7z+8t=0 \end{cases}$ b, $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ y+4z=0 \\ 5z=0 \end{cases}$

Bài giải:

a, Hệ đã cho là một hệ thuần nhất có số ẩn (4 ẩn) nhiều hơn số phương trình (3 phươn
trình) nên có vô số nghiệm và do đó có nghiệm không tầm thường

b, Hệ đã cho là một hệ thuần nhất có 3 phương trình và 3 ẩn với định thức của ma trận
hệ số là:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&5\end{vmatrix}=5\neq 0$$

Vậy, hệ đã cho chỉ có nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường.

Dạng 4. Biện luận hệ phương trình tuyến tính

Bài 1. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - ax_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = b \end{cases}$

a, Xác định a và b để hệ có nghiệm duy nhất

b, Xác định a và b để hệ có vô số nghiệm

c, Xác định a và b để hệ vô nghiệm

Bài giải:

$$\overline{A}=[A,b]=\begin{bmatrix}1&2&a&3\\3&-1&-a&2\\2&1&3&b\end{bmatrix}\xrightarrow[h_3=h_3-2h_1]{h_2=h_2-3h_1}\begin{bmatrix}1&2&a&3\\0&-7&-4a&-7\\0&-3&3-2a&b-6\end{bmatrix}\xrightarrow{h_3=h_3-\frac{3}{7}h_2}\begin{bmatrix}1&2&a\\0&-7&-4a&-7\\0&0&3-\frac{2a}{7}&b-\end{bmatrix}$$

a, Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $rankA = rank\overline{A} = 3$ suy ra $a \neq \frac{21}{2}$, b tùy ý

b, Hệ có vô số nghiệm khi và chỉ khi $rankA = rank\overline{A} < 3$ suy ra $a = \frac{21}{2}$, và b = 3

c, Hệ vô nghiệm khi và chỉ khi $rankA < rank\overline{A}$ suy ra $a = \frac{21}{2}$, và $b \neq 3$

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 6

HỌ VÉC TƠ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH TRONG KHÔNG GIAN V

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa không gian véc tơ:

Cho tập $V \neq \varnothing$, mỗi phần tử được gọi là một véc tơ. Ta gọi V là không gian véc tơ trên tập số th
định nghĩa được phép cộng hai véc tơ, ký hiệu là "+" và phép nhân một số thực với véc tơ, ký h
mười tiên đề sau với mọi véc tơ x, y thuộc V và với mọi λ, μ thuộc R:

1. $x+y \in V$ (đóng kín với phép cộng hai véc tơ)
2. $x+y=y+x$ (tính giao hoán của phép cộng)
3. $x+(y+z)=(x+y)+z$ (tính kết hợp của phép cộng)
4. $\exists 0 \in V: 0+x=x$ (phần tử trung hoà của phép cộng)
5. $\exists -x \in V: -x+x=0$ (phần tử đối của x)
6. $\lambda x \in V$ (đóng kín với phép nhân một số
7. $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ (tính phân bố của phép nhân
8. $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$ (tính phân bố của phép cộng số thực với phép nh
9. $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$ (tính kết hợp của phép nhân số thực với
10. $1.x=x$

Một số không gian véc tơ thường gặp:

(1) Không gian các bộ gồm n số thực: $R^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_k \in R, k = 1..n\}$

$x, y \in R^n$ với $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ và $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$

- Phép cộng: $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$
- Phép nhân: $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$

(2) Không gian các đa thức có bậc không quá n: $P_n(x) = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \mid a_i \in R\}$

- Với mọi p(x) và q(x) thuộc $P_n(x)$
  - Phép cộng: $(p + q)(x) = p(x) + q(x)$
  - Phép nhân: $(\lambda p)(x) = \lambda p(x)$

(3) Không gian các ma trận cỡ m×n: $M_{m\times n}$

Với $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$

- Phép cộng: $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$
- Phép nhân: $\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{m\times n}$

Tổ hợp tuyến tính của một họ véc tơ:

Cho $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ là một họ các véc tơ của không gian véc tơ V.

Tổ hợp tuyến tính của các véc tơ của họ S là biểu thức dạng $c_1s_1 + c_2s_2 + ... + c_ns_n$,

$c_1, c_2, ..., c_n$ là các hằng số thuộc R.

Họ véc tơ độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính

Cho $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ là một họ các véc tơ của không gian véc tơ V.

Nếu $c_1s_1 + c_2s_2 + ... + c_ns_n = \theta$ khi và chỉ khi $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$ thì ta nói họ S là độc lập tuyến

Họ S được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu nó không phải là độc lập tuyến tính.

Để kiểm tra tính độc lập tuyến tính của một họ véc tơ $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$, ta giải mộ

đại số tuyến tính thuần nhất $c_1s_1 + c_2s_2 + ... + c_ns_n = \theta$

$c_1 = c_2 = ... = c_n = 0 \longrightarrow$ S là độc lập tuyến tính	Hệ có vô số nghiệm $\longrightarrow$ S phụ

Nhận xét:

(1) Mọi họ chứa véc tơ θ đều là phụ thuộc tuyến tính (Do $0s_1 + 0s_2 + ... + 0s_n + 1.\theta = \theta$).

(2) Giả sử họ S phụ thuộc tuyến tính, nghĩa là tồn tại $c_k \neq 0$ sao cho: $c_1s_1 + ... + c_ks_k + ... + c_ns_n = \theta$

Ta suy ra: $s_k = \frac{1}{c_k}(c_1s_1 + ... + c_{k-1}s_{k-1} + c_{k+1}s_{k+1} + ... + c_ns_n)$

- Vậy nếu họ S là phụ thuộc tuyến tính thì trong họ S có ít nhất một véc tơ biểu diễn được thành tổ hợp tuyến

B – BÀI TẬP

Dạng 1: Biểu diễn một véc tơ thành tổ hợp tuyến tính của họ véc

ài 1: Trong không gian véc tơ R^2, cho họ véc tơ $S = \{u_1(-1,2); u_2(1,3)\}$

a) Biểu diễn véc tơ v(6, 8) thành tổ hợp tuyến tính của họ véc tơ S.

b) Chứng minh rằng: mọi véc tơ của không gian R^2 đều là tổ hợp tuyến tính của họ véc

Bài giải: a. Ta xét $v = au_1 + bu_2 \Leftrightarrow (6,8) = a(-1,2) + b(1,3) = (-a,2a) + (b,3b) = (-a+b,2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-a+b=6\\2a+3b=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\b=4\end{cases} \Rightarrow \boxed{v = -2u_1 + 4u_2}$$

b. Gọi u(x, y) là một véc tơ bất kỳ thuộc không gian R^2. Ta xét $u = au_1 + bu_2$

$\Leftrightarrow (x,y) = a(-1,2) + b(1,3) = (-a,2a) + (b,3b) = (-a+b, 2a+3b) \Leftrightarrow \begin{cases}-a+b=x\\2a+3b=y\end{cases}$

$\Rightarrow u = \frac{2x+y}{5}u_1 + \frac{-3x+y}{5}u_2$

Vậy mọi véc tơ của không gian R^2 đều là tổ hợp tuyến tính của họ

Bài 2: Trong không gian véc tơ R^3, biểu diễn véc tơ $v(3,-6,3)$ thành tổ hợp t

$S = \{u_1(-1,2,-1); u_2(2,-4,2); u_3(5,-10,5)\}$

Bài giải: Ta xét $v = au_1 + bu_2 + cu_3$

$$\Leftrightarrow (3,-6,3) = a(-1,2,-1) + b(2,-4,2) + c(5,-10,5)$$
$$= (-a+2b+5c, 2a-4b-10c, -a+2b+5c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-a+2b+5c=3\\2a-4b-10c=-6\\-a+2b+5c=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-a+2b+5c=3\\0=0\\0=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2s+5t-3\\b=s\\c=t\end{cases} \quad (t,s \in R)$$

$$v = (2s+5t-3).u_1 + s.u_2 + t.u_3$$

Bài 3: Trong không gian $P_1(x)$, biểu diễn véc tơ $p = 3x - 5$ thành tổ hợp tuyến

tơ $S = \{p_1 = 2x+1; p_2 = 4x+2\}$

Bài giải: Ta xét $p = ap_1 + bp_2$

$$\Leftrightarrow 3x - 5 = a(2x+1) + b(4x+2) \Leftrightarrow 3x - 5 = (2a+4b)x + (a+2b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2a+4b=3\\a+2b=-5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2a+4b=3\\0=17\end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm, nên p không là tổ hợp tuyến tính của họ véc tơ S.

Dạng 2: Xét sự độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của

Bài 1: Các họ véc tơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

a) $S=\{u_1(-1,2,3);u_2(0,1,-1);u_3(2,-1,1)\}\subset R^3$

b) $B=\{v_1(2,0,1);v_2(-4,0,-2)\}\subset R^3$

c) $B'=\{m_1(3,-1);m_2(-3,1)\}\subset R^2$

Bài giải: a) Ta có: $a.u_1+b.u_2+c.u_3=\theta \Leftrightarrow a(-1,2,3)+b(0,1,-1)+c(2,-1,1)=(0,0,0)$

$\Leftrightarrow (-a,2a,3a)+(0,b,-b)+(2c,-c,c)=(0,0,0)$

$\Leftrightarrow (-a+2c,2a+b-c,3a-b+c)=(0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-a+2c=0\\2a+b-c=0\\3a-b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\\c=0\end{cases}$$

Vậy S là họ véc tơ độc lập tuyến tính.

Bài 1: Các họ véc tơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính

a) $S=\{u_1(-1,2,3);u_2(0,1,-1);u_3(2,-1,1)\}\subset R^3$

b) $B=\{v_1(2,0,1);v_2(-4,0,-2)\}\subset R^3$

c) $B'=\{m_1(3,-1);m_2(-3,1)\}\subset R^2$

Bài giải: b) Ta có: $a.v_1+b.v_2=\theta\Leftrightarrow a(2,0,1)+b(-4,0,-2)=(0,0,0)$

$\Leftrightarrow (2a,0,a)+(-4b,0,-2b)=(0,0,0)$

$\Leftrightarrow (2a-4b,0,a-2b)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases}2a-4b=0\\0=0\\a-2b=0\end{cases}$

Vậy B là họ véc tơ phụ thuộc tuyến tính.

Nhận xét: Dễ thấy $v_2=(-4,0,-2)=-2(2,0,1)=-2v_1$, nên suy ra $2v_1+v_2=\theta$, vậy B là họ véc tơ phụ thuộc tuyến tính.

Bài 1: Các họ véc tơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính

a) $S=\{u_1(-1,2,3);u_2(0,1,-1);u_3(2,-1,1)\}\subset R^3$

b) $B=\{v_1(2,0,1);v_2(-4,0,-2)\}\subset R^3$

c) $B'=\{m_1(3,-1);m_2(-3,1)\}\subset R^2$

Bài giải:

c) $B'=\{m_1(3,-1);m_2(-3,1)\}\subset R^2$, dễ thấy $m_2=-m_1$ nên B' là họ véc tơ phụ thuộc tuyến tính.

$m_1+m_2=(3,-1)+(-3,1)=(0,0)=\theta$

$2m_1+2m_2=\theta$ $\quad$ $3m_1+3m_2=\theta$

Bài 2: Chứng minh rằng các họ véc tơ sau là phụ thuộc tuyến tính.

a) $B=\{u_1(1,-1);u_2(-2,1);u_3(0,3)\}\subset R^2$

b) $S=\{p_1=2x+1;p_2=-x+5;p_3=2x\}\subset P_1$

Bài giải:

a) Ta có: $a.u_1+b.u_2+c.u_3=\theta\Leftrightarrow a(1,-1)+b(-2,1)+c(0,3)=(0,0)$

$\Leftrightarrow (a,-a)+(-2b,b)+(0,3c)=(0,0)$

$\Leftrightarrow (a-2b,-a+b+3c)=(0,0)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a-2b=0\\-a+b+3c=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a-2b=0\\-b+3c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6t\\b=3t\quad(t\in R)\\c=t\end{cases}$$

Vậy B là họ véc tơ phụ thuộc tuyến tính.

b) Ta có: $a.p_1+b.p_2+c.p_3=\theta\Leftrightarrow a(2x+1)+b(-x$

$\Leftrightarrow (2a-b+2c)x+(a+5b)=0.x+0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b+2c=0\\a+5b=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b+2c=0\\-11b+2c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-10t\\b=2t\\c=11t\end{cases}$$

Vậy S là họ véc tơ phụ

Bài 3: Chứng minh rằng họ véc tơ sau là độc lập tuyến tính.

a) $B=\{u_1(2,1,0,3);u_2(-1,3,-2,5)\}\subset R^4$

b) $S=\left\{A=\begin{bmatrix}1&2\\-1&-3\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}-1&3\\2&1\end{bmatrix}\right\}\subset M_{2\times2}$

Bài giải: a) Ta có: $a.u_1+b.u_2=\theta\Leftrightarrow a(2,1,0,3)+b(-1,3,-2,5)=(0,0,0,0)$

$\Leftrightarrow (2a-b,a+3b,-2b,3a+5b)=(0,0,0,0)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b=0\\a+3b=0\\-2b=0\\3a+5b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$$

Vậy B là họ véc tơ độc lập tuyến tính.

Nhận xét: Do không tồn tại số k nào thỏa mãn $u_1=k.u_2$ nên B là họ véc

Bài 3: Chứng minh rằng họ véc tơ sau là độc lập tuyến tính.

a) $B=\{u_1(2,1,0,3);u_2(-1,3,-2,5)\}\subset R^4$

b) $S=\left\{A=\begin{bmatrix}1&2\\-1&-3\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}-1&3\\2&1\end{bmatrix}\right\}\subset M_{2\times2}$

Bài giải: b) Ta có $x.A+y.B=\theta\Leftrightarrow x\begin{bmatrix}1&2\\-1&-3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1&3\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x&2x\\-x&-3x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-y&3y\\2y&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x-y&2x+3y\\-x+2y&-3x+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\2x+3y=0\\-x+2y=0\\-3x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0\\5y=0\\y=0\\-2y=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

Vậy S là họ véc tơ độc lập tuyến tính.

Nhận xét: Do không tồn tại số k nào thỏa mãn $A=k.B$ nên S là họ véc tơ độc lập tuyến tính.

$\left\{A=\begin{bmatrix}1&2\\-1&-3\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}2&4\\-2&-6\end{bmatrix}\right\}\subset M_{2\times2}$ là họ véc tơ phụ thuộc tuyến tính, do $A=\frac{1}{2}.B$ hoặc B

Một số câu hỏi trắc nghiệm:

Câu 1: Họ véc tơ nào sau đây là họ véc tơ độc lập tuyến tính?

A. $S=\{m_1(-2,3); v(1,-4)\}\subset R^2$ B. $S_1=\{v_1(-1,2); v_2(1,-2)\}$

C. $S_2=\{u(3,5); \theta(0,0); v(-1,2)\}\subset R^2$ D. $S_3=\{u_1(1,1); u_2(2,2)\}\subset R^2$

Đáp án A

Câu 2: Họ véc tơ nào sau đây là họ véc tơ phụ thuộc tuyến tính?

A. $S=\{u_1(1,1); u_2(2,2)\}\subset R^2$ B. $S_1=\{v_1(-1,2); v_2(1,-2)\}$

C. $S_2=\{u(3,5); \theta(0,0); v(-1,2)\}\subset R^2$ D. Cả 3 đáp án trên.

Đáp án D

Một số câu hỏi trắc nghiệm:

Câu 3: Để họ véc tơ $S=\{u_1(1,-1); u_2(m,-m)\}\subset R^2$ là độc lập tuyến tính thì m thỏa mãn:

A. $m=1$ B. $m=-1$

C. $m\neq\pm1$ D. Đáp án khác.

Đáp án D (không có m để S đltt)

Câu 4: Véc tơ $v(3,-1)$ là tổ hợp tuyến tính của họ vec tơ nào sau đây:

A. $S_1=\{u_1(1,-2); u_2(2,0)\}$ B. $S_2=\{m(-1,3)\}$

C. Đáp án A và D D. $S=\{u(-3,1)\}$

Đáp án C $v(3,-1)=\frac{1}{2}u_1+\frac{5}{4}u_2$; $v=-u$

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 7

TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN VÉC TƠ HỮU HẠN

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN

Khái niệm về không gian n chiều:

Không gian véc tơ V được gọi là không gian n chiều nếu số lớn nhất các véc tơ độc ... trong V đúng bằng n. Số chiều của không gian V được ký hiệu là dim(V).

$\dim(\{\theta\})=0$ $\dim(R^n)=n$ $\dim(P_n(x))=n+1$ $\dim(M_{m\times n})$ ...

$\dim(R^2)=2$ $\dim(P_1(x))=2$ $\dim(M_{2\times 1})$ ...

$\dim(R^3)=3$ $\dim(P_2(x))=3$ $\dim(M$ ...

Cơ sở của không gian n chiều

- Cơ sở của không gian n chiều là họ bất kỳ gồm n véc tơ độc lập tuyến tính ...

- Trong không gian véc tơ V, mọi véc tơ bất kỳ được biểu diễn duy nhất dưới dạng ... của các véc tơ của một họ S khi và chỉ khi họ S là cơ sở của không gian.

- Trong không gian véc tơ n chiều R^n, cho họ $S=\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ và ma trận $A=[s_1, s_2, ...$ ... là một véc tơ của S). Họ S là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\det(A)\neq 0$.

- Cơ sở chính tắc trong không gian R^n là họ gồm n véc tơ $\{e_1, e_2, ...$ ... e_k (k = 1..n) là véc tơ có thành phần thứ k bằng 1, còn lại đều bằng 0.

$R^2: S=\{e_1(1,0); e_2(0,1)\}$ $R^3: S=\{e_1(1;0;0); e_2(0;1;0)$ ...

Toạ độ trong không gian n chiều

Giả sử $S=\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là một cơ sở của không gian n chiều V, khi đó mọi $u\in V$ ... duy nhất dưới dạng $u=c_1v_1+c_2v_2+..+c_nv_n$, với $c_k\in R$, k = 1..n. Các số $c_1, c_2, ..., c_n$ ... các toạ độ của u đối với cơ sở S.

Ký hiệu $(u)_S=(c_1, c_2, ..., c_n)$ được gọi là véc tơ toạ độ của u trong cơ sở S.

$[u]_S=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\...\\c_n\end{bmatrix}$ được gọi là ma trận toạ độ của u trong cơ sở S.

B – BÀI TẬP

Dạng 1: Chứng minh một họ véc tơ là cơ sở của không gian véc tơ

Bài 1: Chứng minh rằng các họ véc tơ sau là cơ sở của không gian véc tơ R^2.

a) $S=\{m_1(-2,3);m_2(1,-4)\}$ b) $B=\{u_1(3,-5);u_2(2,1)\}$

Bài giải: a) Ta có $\dim(R^2)=2$; họ S có 2 véc tơ, ta sẽ chỉ ra S là họ véc tơ độc lập tuyến

$$a.m_1+b.m_2=\theta \Leftrightarrow a(-2,3)+b(1,-4)=(0,0)\Leftrightarrow(-2a+b,3a-4b)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}-2a+b=0\\3a-4b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$$

Nên S là họ véc tơ độc lập tuyến tính. Vậy S là một cơ sở của R^2.

- Do không tồn tại số k nào để $m_1=k.m_2$, nên S là họ véc tơ độc lập tuyến tính, do đó S là một cơ
- Ta có: $\begin{vmatrix}-2&1\\3&-4\end{vmatrix}=5\neq0$, nên S là họ véc tơ độc lập tuyến tính, do đó S là một cơ sở của R^2.

b) Ta có: $\begin{vmatrix}3&2\\-5&1\end{vmatrix}=13\neq0$, nên B là họ véc tơ độc lập tuyến tính, do đó B là một cơ sở

Bài 2: Họ véc tơ nào sau đây là cơ sở của không gian R^3.

a) $S=\{m_1(-2,3,0);m_2(5,1,-4)\}$

b) $B=\{u_1(0,3,-5);u_2(-1,2,1);u_3(1,-1,2)\}$

c) $B'=\{v_1(1,-2,3);v_2(0,2,1);v_3(1,0,4)\}$

Bài giải:

a) Ta có $\dim(R^3)=3$; họ S có 2 véc tơ, nên S không là cơ sở của không gian R^3.

b) Ta có: $\begin{vmatrix}0&-1&1\\3&2&-1\\-5&1&2\end{vmatrix}=14\neq0$, nên B là họ véc tơ độc lập tuyến tính, do đó B là một cơ sở của

c) Ta có: $\begin{vmatrix}1&0&1\\-2&2&0\\3&1&4\end{vmatrix}=0$, nên B' là họ véc tơ phụ thuộc tuyến tính, do đó B' không là

Bài 3: Tìm m để họ véc tơ sau là cơ sở của không gian $P_1(x)$

a) $S=\{p_1=2x+m\}$

b) $B=\{q_1=3x-2;q_2=-mx+5\}$

Bài giải: a) Ta có $\dim(P_1(x))=2$; họ S có 1 véc tơ, nên S không là cơ sở của không gian

b) Ta cần tìm m để B là họ véc tơ độc lập tuyến tính,

$$a.q_1+b.q_2=\theta\Leftrightarrow a(3x-2)+b(-mx+5)=0.x+0\Leftrightarrow(3a-mb)x+(-2a+5b)=0.x+0\Leftrightarrow$$

Hệ trên có nghiệm duy nhất (0, 0) khi và chỉ khi $\begin{vmatrix}3&-m\\-2&5\end{vmatrix}\neq0\Leftrightarrow15-2m\neq0\Leftrightarrow m\neq\frac{15}{2}$

Vậy với $m\neq\frac{15}{2}$ thì B là một cơ sở của không gian $P_1(x)$.

Dạng 2: Tìm tọa độ của một véc tơ đối với cơ sở

Bài 1: Cho cơ sở $S=\{v_1(3,-1);v_2(1,4)\}$ của không gian véc tơ R^2.

a) Tìm tọa độ của véc tơ $v=(-1,3)$ đối với cơ sở S.

b) Biết $[u]_S=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$, tìm véc tơ u.

Bài giải:

a) Ta có $v=a.v_1+b.v_2\Leftrightarrow(-1,3)=a(3,-1)+b(1,4)\Leftrightarrow(-1,3)=(3a+b,-a+4b)\Leftrightarrow\begin{cases}3a+b=-1\\-a+4b=3\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Rightarrow v=-\frac{7}{13}v_1+\frac{8}{13}v_2 \quad\Rightarrow(v)_S=\left(-\frac{7}{13},\frac{8}{13}\right)$ véc tơ tọa độ của v đối với cơ sở S

$[v]_S=\begin{bmatrix}-\frac{7}{13}\\\frac{8}{13}\end{bmatrix}$ ma trận tọa độ của v đối với cơ sở S

b) Do $[u]_S=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$ nên $u=-2v_1+3v_2=-2(3,-1)+3(1,4)=(-6,2)+(3,12)=(-3,14)$

Bài 2: Trong không gian véc tơ R^3, cho họ véc tơ $S=\{v_1(1,0,0);v_2(2,2,0);v_3($

a) Tìm m để S là một cơ sở của R^3.

b) Với m = 3, tìm ma trận tọa độ của véc tơ $u(2,-1,3)$ đối với cơ sở S.

Bài giải:

a) Để S là một cơ sở của R^3 thì S cần là họ véc tơ độc lập tuyến tính, điều kiện là: $\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&m\end{vmatrix}\neq0\Leftrightarrow$

b) Với m = 3 thì $S=\{v_1(1,0,0);v_2(2,2,0);v_3(3,3,3)\}$ là một cơ sở của R^3.

$$u=av_1+bv_2+cv_3\Leftrightarrow(2,-1,3)=a(1,0,0)+b(2,2,0)+c(3,3,3)\quad\Leftrightarrow(2,-1,3)=(a+2b+3c,2b+3c,3c)\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b+3c=2\\2b+3c=-1\\3c=3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow u=3v_1-2v_2+v_3\Rightarrow[u]_S=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}$$

Đối với cơ sở chính tắc của R^3: $B=\{e_1(1,0,0);e_2(0,1,0);e_3(0,0,1)\}$, ta luôn có $u=(2,-1,3)=2(1,0,0)-(0,1,0)+3(0,0,1)$

Bài 3: Trong không gian $M_{2\times2}$, tìm véc tơ tọa độ của ma trận $A=\begin{bmatrix}2&0\\-1&3\end{bmatrix}$ đối với

$B=\left\{A_1=\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix};A_2=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix};A_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix};A_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$

Bài giải:

$$A=xA_1+yA_2+zA_3+tA_4\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2&0\\-1&3\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}-1&1\\0&0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+t$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2&0\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x&x\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y&y\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\z&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&t\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2&0\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x+y&x+y\\z&t\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y=2\\x+y=0\\z=-1\\t=3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow A=-1A_1+1A_2+(-1)A_3+3A_4\Rightarrow(A)_B=(-1,1,-1,3)$$

Dạng 3: Bài toán đổi cơ sở

Giả sử $A = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ và $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là hai cơ sở trong không gian vé... mọi véc tơ $v \in V$ đều có thể biểu diễn theo A và theo B.

Ma trận P thoả mãn $[v]_A = P[v]_B$ với mọi $v \in V$ được gọi là ma trận chuyển từ cơ sở A ... trong không gian V.

$$P = \left[[v_1]_A \quad [v_2]_A \quad \cdots \quad [v_n]_A\right]$$

Nếu P là ma trận chuyển cơ sở từ A sang B thì P khả đảo và P^{-1} là ma trận chuyển cơ sở ...

Bài 1: Trong không gian R^2 cho các cơ sở $B = \{e_1(1,0); e_2(0,1)\}$ và $S = \{v_1($...

a) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở S.

b) Cho véc tơ $v(7,2)$, tìm $[v]_S$ bằng hai cách.

Bài giải:

a) Ta có $v_1 = (1,1) = e_1 + e_2$; $v_2 = (2,1) = 2e_1 + e_2$ $\Rightarrow [v_1]_B = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$; $[v_2]_B = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow P = \left[[v_1]_B \quad [v_2]_B\right] = \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$$

b) Cách 1: $v = av_1 + bv_2 \Leftrightarrow (7,2) = a(1,1) + b(2,1) \Leftrightarrow \begin{cases}a+2b=7\\a+b=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-3\\b=5\end{cases} \Rightarrow [v]_S = \begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$

Cách 2:

$P = \begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$ là ma trận chuyển từ cơ sở B sang cơ sở S, nên ma trận chuyển từ cơ sở S sang cơ sở B ...

Do đó ta có: $[v]_S = P^{-1}[v]_B = \begin{bmatrix}-1 & 2\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\5\end{bmatrix}$

Một số câu hỏi trắc nghiệm:

Câu 1: Họ véc tơ nào sau đây không là cơ sở của không gian véc tơ R^2?

A. $S = \{u_1(1,1); u_2(2,2)\}$ B. $S_1 = \{v_1(-1,2); v_2(0,-2)\}$

C. $S_2 = \{u(3,5); v(-1,2)\}$ D. $S_3 = \{m(-1,5); n(-1,0)\}$

Đáp án A

Câu 2: Họ véc tơ nào sau đây là cơ sở của không gian véc tơ R^3?

A. $S = \{u_1(1,1,0); u_2(3,2,2)\}$ B. $S_1 = \{v_1(-1,2,-3)\}$

C. $S_2 = \{u(3,5,0); v(3,-1,2); w(0,0,0)\}$ D. $S_3 = \{m(-1,5,0); n($...

Đáp án D det = -10

Một số câu hỏi trắc nghiệm:

Câu 3: Trong không gian véc tơ R^2 cho véc tơ $u = (-1,4)$ và cơ sở $S = \{u_1(1,1); u_2(-3,2)\}$, khi ... ma trận tọa độ của u đối với cơ sở S là:

A. $(u)_S = (2,1)$ B. $[u]_S = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

C. $[u]_S = \begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$ D. $(u)_S = (-1,4)$

Đáp án B

Câu 4: Trong không gian véc tơ R^2 cho cơ sở $S = \{u_1(-1,0); u_2(2,1)\}$, biết $(u)_S = (-3,2)$, khi đó véc tơ u là:

A. $u = (-3,2)$ B. $[u]_S = \begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$

C. $u = (1,2)$ D. Đáp án khác

Đáp án C

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHUYÊN ĐỀ 8

KHÔNG GIAN CON SINH BỞI HỌ VÉC TƠ

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN

Không gian con: Tập con W của không gian véc tơ V được gọi là không ... nó cũng là không gian véc tơ với hai phép toán trên V.

Định lý: Tập con khác rỗng của không gian véc tơ là không gian con khi và chỉ khi nó ... hai phép toán cộng véc tơ và nhân véc tơ với một số thực.

Hạng của họ véc tơ: Số tối đa các véc tơ độc lập tuyến tính của họ véc tơ S được gọi là hạng ... và kí hiệu là rank(S).

Để tính hạng của họ véc tơ $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$, ta thành lập ma trận mà mỗi cột là một ... tức là $A = [s_1, s_2, ..., s_n]$, sau đó đưa về dạng bậc thang. Ta có rank(S) = rank(A).

Tổ hợp tuyến tính của họ véc tơ: Cho $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ là một họ các

véc tơ V. Tổ hợp tuyến tính của các véc tơ của họ S là biểu thức dạng c_1

trong đó $c_1, c_2, ..., c_n$ là các hằng số thuộc R.

Không gian con sinh bởi một họ véc tơ: Cho $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ là một họ các véc tơ củ

véc tơ V. Tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của S được gọi là bao tuyến tính của S, kí hiệu là

Đặt: W = span(S). Khi đó W là một không gian con của V, gọi là không gian con sinh bởi họ

dim(W) = rank(S), đồng thời bất kỳ bộ cực đại véc tơ độc lập tuyến tính trong S đều là cơ sở

Hệ sinh của không gian véc tơ: Cho S là một họ các véc tơ của không gian véc tơ V. N

thì ta nói họ S sinh ra V hay S là hệ sinh của V.

Trong một không gian véc tơ, số véc tơ sinh ra nó không nhỏ hơn số véc tơ độc l

---

B – BÀI TẬP

Dạng 1: Chứng minh một họ véc tơ là hệ sinh của không gian véc

Bài 1: Chứng minh các họ véc tơ sau là hệ sinh của không gian R^2.

a) $S = \{u_1(1,-1); u_2(2,-3)\}$ b) $S_1 = \{v_1(0,1); v_2(-2,5); v_3$

Bài giải:

a) Ta luôn có $span(S) \subset R^2$, ta cần chỉ ra $R^2 \subset span(S)$

Với bất kỳ véc tơ $u(x,y) \in R^2$, $u = a.u_1 + bu_2$

$$\Leftrightarrow (x,y) = a.(1,-1) + b(2,-3) \Leftrightarrow (x,y) = (a+2b, -a-3b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b = x \\ -a-3b = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3x+2y \\ b = -x-y \end{cases}$$

Vậy $u(x,y) \in span(S) \Rightarrow R^2 \subset span(S)$, tức là S là một hệ sinh của không

---

Bài 1: Chứng minh các họ véc tơ sau là hệ sinh của không gian R^2.

a) $S = \{u_1(1,-1); u_2(2,-3)\}$ b) $S_1 = \{v_1(0,1); v_2(-2,5$

Bài giải:

b) Ta luôn có $span(S_1) \subset R^2$, ta cần chỉ ra $R^2 \subset span(S_1)$

Với bất kỳ véc tơ $u(x,y) \in R^2$, $u = a.v_1 + bv_2 + cv_3$

$$\Leftrightarrow (x,y) = a.(0,1) + b(-2,5) + c(-1,1)$$
$$\Leftrightarrow (x,y) = (-2b-c, a+5b+c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2b-c = x \\ a+5b+c = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+5b+c = y \\ -2b-c = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3t+x+y \\ b = t \\ c = -2t- \end{cases}$$

Vậy $u(x,y) \in span(S_1) \Rightarrow R^2 \subset span(S_1)$, tức là S_1 là một hệ sinh của không gi

---

Bài 2: Mỗi họ véc tơ sau đây có sinh ra không gian R^3 không?

a) $S = \{u_1(1,1,-2)\}$

b) $B = \{v_1(1,-1,1); v_2(-1,2,5)\}$

c) $C = \{m_1(1,-2,1); m_2(3,1,0); m_3(-1,0,0)\}$

Bài giải:

a) Ta luôn có $span(S) \subset R^3$, với bất kỳ véc tơ $u(x,y,z) \in R^3$, ta xét: $u = a.u_1 \Leftrightarrow (x,y,z) = a.(1,1,-2) \Leftrightarrow (x,y,z) = ($

Hệ phương trình này không có nghiệm với x, y, z bất kỳ; nên $u(x,y,z) \notin span(S)$, vậy S không là hệ sinh của R

b) Ta luôn có $span(B) \subset R^3$, với bất kỳ véc tơ $u(x,y,z) \in R^3$, ta xét: $u = a.v_1 + bv_2$

$$\Leftrightarrow (x,y,z) = a.(1,-1,1) + b(-1,2,5) \Leftrightarrow (x,y,z) = (a-b, -a$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b = x \\ -a+2b = y \\ a+5b = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b = x \\ b = y+x \\ 6b = z-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b = x \\ b = y+x \\ 0 = z \end{cases}$$

Hệ phương trình này không có nghiệm với x, y, z bất kỳ; nên $u(x,y,z) \notin span(B)$, vậy B khôn

---

Bài 2: Mỗi họ véc tơ sau đây có sinh ra không gian R^3 không?

a) $S = \{u_1(1,1,-2)\}$

b) $B = \{v_1(1,-1,1); v_2(-1,2,5)\}$

c) $C = \{m_1(1,-2,1); m_2(3,1,0); m_3(-1,0,0)\}$

Bài giải:

c) Ta luôn có $span(C) \subset R^3$, với bất kỳ véc tơ $u(x,y,z) \in R^3$, ta xét: $u = a.m_1 + b.m_2 + c.m_3$

$$\Leftrightarrow (x,y,z) = a.(1,-2,1) + b(3,1,0) + c(-1,0,0)$$
$$\Leftrightarrow (x,y,z) = (a+3b-c, -2a+b, a)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3b-c = x \\ -2a+b = y \\ a = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = z \\ b = y+2z \\ c = -x+3y+7z \end{cases}$$

Hệ phương trình này có nghiệm với bất kỳ x, y, z; nên $u(x,y,z) \in span(C) \Rightarrow R^3 \subset span(C)$, vậy C

Dạng 2: Tìm cơ sở và số chiều của không gian con sinh bởi họ

Bài 1: Tìm hạng của các họ véc tơ sau

a) $S = \{u_1(1,1,-1); u_2(-1,2,0); u_3(0,3,-1); u_4(-2,1,1)\} \subset R^3$

b) $B = \{v_1(0,1,1,-1); v_2(1,-1,1,2); v_3(2,0,3,-1); v_4(-1,1,-1,-2)\} \subset R^4$

Bài giải:

a) Ta xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[h1+h3=h3]{-h1+h2=h2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{h2-3h3=h3}$$

Vậy rank(A) = 2, nên rank(S) = 2

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[2h1+h4=h4]{h1+h2=h2}$$

Bài 1: Tìm hạng của các họ véc tơ sau

a) $S=\{u_1(1,1,-1);u_2(-1,2,0);u_3(0,3,-1);u_4(-2,1,1)\}\subset R^3$

b) $B=\{v_1(0,1,1,-1);v_2(1,-1,1,2);v_3(2,0,3,-1);v_4(-1,1,-1,-2)\}\subset R^4$

Bài giải:

b) Ta xét ma trận $A=\begin{bmatrix}0&1&1&-1\\1&-1&1&2\\2&0&3&-1\\-1&1&-1&-2\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&-1\\1&-1&1&2\\2&0&3&-1\\-1&1&-1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{h1\leftrightarrow h2}\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\0&1&1&-1\\2&0&3&-1\\-1&1&-1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[h1+h4\to h4]{-2h1+h3\to h3}\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\0&1&1&-1\\0&2&1&-5\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{-2h2+h3\to h3}\begin{bmatrix}1&\\0&\end{bmatrix}$$

Vậy rank(A) = 3, nên rank(B) = 3

Bài 2: Tìm cơ sở và số chiều của không gian con sinh bởi họ véc tơ s

a) $S=\{u_1(1,1,-1);u_2(-1,2,0);u_3(0,3,-1);u_4(-2,1,1)\}\subset R^3$

b) $B=\{v_1(0,1,1,-1);v_2(1,-1,1,2);v_3(2,0,3,-1);v_4(-1,1,-1,-2)\}\subset R^4$

Bài giải:

a) Ta có $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&2&0\\0&3&-1\\-2&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[2h1+h4\to h4]{h1+h2\to h2}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&3&-1\\0&3&-1\\0&3&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[-h2+h4\to h4]{-h2+h3\to h3}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&3&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

Vậy rank(A) = 2, do đó rank(S) = 2, nên số chiều của span(S) là 2.

Để tìm cơ sở của span(S), ta cần chỉ ra 2 véc tơ độc lập tuyến tính của không gian span(S).

Ta có thể chọn $\{u_1(1,1,-1);u_2(-1,2,0)\}$ hoặc $\{u_1(1,1,-1);u_3(0,3,-1)\}$ là cơ sở của span(S) vì các họ véc tơ này là độc l

Ta cũng có thể chọn họ véc tơ $\{(1,1,-1);(0,3,-1)\}$ (là 2 véc tơ hàng khác không của ma trận bậc thang thu được kh

trận A) là cơ sở của span(S), vì các véc tơ này sau khi biến đổi vẫn là véc tơ thuộc span(S) và dễ thấy chúng

Bài 2: Tìm cơ sở và số chiều của không gian con sinh bởi họ véc tơ sa

a) $S=\{u_1(1,1,-1);u_2(-1,2,0);u_3(0,3,-1);u_4(-2,1,1)\}\subset R^3$

b) $B=\{v_1(0,1,1,-1);v_2(1,-1,1,2);v_3(2,0,3,-1);v_4(-1,1,-1,-2)\}\subset R^4$

Bài giải:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&-1\\1&-1&1&2\\2&0&3&-1\\-1&1&-1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow{h1\leftrightarrow h2}\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\0&1&1&-1\\2&0&3&-1\\-1&1&-1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[h1+h4\to h4]{-2h1+h3\to h3}\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\0&1&1&-1\\0&2&1&-5\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{-2h2+h3\to h3}\begin{bmatrix}1&\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

Vậy rank(A) = 3, nên rank(B) = 3, do đó không gian span(B) có số chiều là 3,

Và có một cơ sở là $\{(1,-1,1,2);(0,1,1,-1);(0,0,-1,-3)\}$

Một số câu hỏi trắc nghiệm:

Câu 1: Họ véc tơ nào sau đây là một hệ sinh của không gian véc tơ R^2?

A. $S=\{u_1(1,1);u_2(-1,2)\}$ B. $S_1=\{v_1(1,2);v_2(2,4)\}$

C. $S_2=\{u(3,5)\}$ D. $S_3=\{n(1,0)\}$

Đáp án A

Câu 2: Hạng của họ véc tơ nào sau đây bằng 3?

A. $S=\{u_1(1,1,-2)\}$ B. $S_1=\{v_1(1,2,-1);v_2(0,2,4)\}$

C. $S_2=\{u(3,5,-1);v(-1,2,1);w(0,0,1)\}$ D. $S_3=\{m(-1,0,-2);n(1,0,2);p(2,0,4)\}$

Đáp án C

Một số câu hỏi trắc nghiệm:

Câu 3: Số chiều của không gian con sinh bởi họ véc tơ $S=\{u(-1,2);v(1,1)\}\subset R^2$

A. 0 B. 1

C. 2 D. 3

Đáp án C

Câu 4: Số chiều của không gian con sinh bởi họ véc tơ $S=\{u(-1,2,1);v(1,-2,-1);w(3,-6,-3)\}\subset R$

A. 0 B. 1

C. 2 D. 3

Đáp án B

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 9

KHÔNG GIAN NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN

Không gian con: Tập con W của không gian véc tơ V được gọi là không gian con của

là không gian véc tơ với hai phép toán trên V.

Tổ hợp tuyến tính của họ véc tơ: Cho $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ là một họ các véc tơ của không

Ta gọi tổ hợp tuyến tính của các véc tơ của họ S là biểu thức dạng $c_1s_1 + c_2s_2 + ... + c_ns_n$,

…, c_n là các hằng số thuộc R.

~~**Hệ sinh của không gian véc tơ:** Cho S là một họ các véc tơ của không gian véc tơ V.~~ Tập

hợp tuyến tính của S được gọi là bao tuyến tính của S, kí hiệu là span(S). Nếu span(S) = V thì

sinh ra V hay S là hệ sinh của V.

Định lý: Trong một không gian véc tơ V, mọi họ S các véc tơ độc lập tuyến tính sinh

của V và dim(V) bằng số véc tơ của S.

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Hệ thuần nhất là hệ phương trình tuyến tính có dạng $Ax = \theta$

- Hệ thuần nhất luôn có nghiệm tầm thường $x = \theta$.

- Hệ thuần nhất vuông có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $\det(A) = 0$.

Định lý: Hệ $Ax = b$ có nghiệm khi và chỉ khi $\text{rank}(\overline{A}) = \text{rank}(A)$

- Nếu $\text{rank}(\overline{A}) > \text{rank}(A)$ thì hệ vô nghiệm.
- Nếu $\text{rank}(\overline{A}) = \text{rank}(A)$ thì hệ có nghiệm
  - nghiệm sẽ là duy nhất nếu $\text{rank}(\overline{A}) = \text{rank}(A) = n$ = số lượng ẩn của hệ phương trình.
  - Nếu $\text{rank}(\overline{A}) = \text{rank}(A) = r < n$, hệ có vô số nghiệm, trong đó có $n - r$ thành phần

    ý, các thành phần còn lại được tính theo $n - r$ thành phần này. ♦

B – BÀI TẬP

Dạng 1: Giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Bài 1: Giải các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

a) $\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ x+2y \quad =0 \\ \quad y+z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z \quad =0 \\ -x-y+z=0 \\ 2x+2y+3z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5 \quad =0 \\ -x_1 \quad +3x_3-2x_4+x_5=0 \end{cases}$

Bài giải:

a) Đây là hệ thuần nhất có 3 phương trình với 3 ẩn số và ta có định thức của ma trận

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, nên hệ đã cho chỉ có nghiệm tầm thường (0, 0, 0).

Bài 1: Giải các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

a) $\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ x+2y \quad =0 \\ \quad y+z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z \quad =0 \\ -x-y+z=0 \\ 2x+2y+3z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4- \\ -x_1 \quad +3x_3-2x_4 \end{cases}$

Bài giải: b) Đây là hệ thuần nhất có 3 phương trình với 3 ẩn số và ta có định thức của ma trận hệ số là

nên hệ đã cho có nghiệm không tầm thường.

Ta có: $\overline{A} = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-2h1+h3=h3]{h1+h2=h2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{h2-2h3=h3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\text{rank}(\overline{A}) = \text{rank}(A) = 2 < 3$

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm, trong đó có 2 ẩn chính và $3 - 2 = 1$ ẩn phụ.

Hệ có dạng: $\begin{cases} x+y+z \quad =0 \\ \quad 2z=0 \\ \quad 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$ Tập nghiệm của hệ đã

Bài 1: Giải các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

a) $\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ x+2y \quad =0 \\ \quad y+z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z \quad =0 \\ -x-y+z=0 \\ 2x+2y+3z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5 \quad =0 \\ -x_1 \quad +3x_3-2x_4+x_5=0 \end{cases}$

Bài giải: c) Đây là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có 2 phương trình với 5 ẩn số.

Hệ có dạng: $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5 \quad =0 \\ -x_1 \quad +3x_3-2x_4+x_5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5 \quad =0 \\ 0x_1+2x_2+2x_3-x_4+0x_5=0 \end{cases}$

$\text{rank}(\overline{A}) = \text{rank}(A) = 2 < 5$, nên hệ phương trình có vô số nghiệm, trong đó có 2 ẩn chính và 5 – 2

Nghiệm của hệ là: $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -4t - m + n \\ x_2 = t \\ x_3 = m \\ x_4 = 2x_2 + 2x_3 = 2t + 2m \\ x_5 = n \end{cases}$ | $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = m \\ x_3 = n \\ x_4 = 2x_2 + 2x_3 = 2m + 2n \\ x_5 = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = t + 2m - n + 2n \end{cases}$

Tập nghiệm của hệ là: $\{(-4t-m+n, t, m, 2t+2m, n) | t, m, n \in R\}$ | Tập nghiệm của hệ là: $\{(t, m, n, 2m +$

Bài 2: Tìm m để hệ phương trình sau chỉ có nghiệm tầm thường?

a) $\begin{cases} x+y+z \quad =0 \\ -x-y+z=0 \\ x+my+3z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=0 \\ mx+2y=0 \end{cases}$

Bài giải: Các hệ phương trình đã cho là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có số phương trình bằng

Hệ đó chỉ có nghiệm tầm thường khi $\det(A) \neq 0$

a) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 2 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

b) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 2 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$

Dạng 2: Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ ph... tuyến tính thuần nhất

Bài 1: Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $Ax = \theta$ ...

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad b)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Bài giải: Xét hệ thuần nhất với n ẩn số $Ax = 0$. Nghiệm của hệ là một bộ gồm n số $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$.

Gọi W là tập các nghiệm của hệ trên. Khi đó nếu $x \in W$; $y \in W$ thì $Ax = \theta$ và $Ay = \theta$.

Do đó: $A(x+y) = Ax + Ay = \theta + \theta = \theta$; $A(kx) = k.Ax = k\theta = \theta$

Vậy $x + y \in W$; $kx \in W$; nghĩa là W đóng kín với phép cộng véc tơ và phép nhân véc tơ với một số của R^n, ...

không gian véc tơ con của R^n, được gọi là không gian nghiệm của hệ $Ax = \theta$.

Để tìm cơ sở của W, ta sẽ giải hệ phương trình $Ax = \theta$, rồi chỉ ra một hệ sinh độc lập tuyến tính của W, ...

chính là số véc tơ của hệ sinh tìm được.

Bài 1: Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính ...

với ma trận A cho bởi:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad b)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Bài giải:

a) Ta có $Ax = \theta \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = 0 \\ -x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y \ldots \\ 2 \ldots \\ 0 \ldots \end{cases}$

Tập nghiệm của hệ là $W = \{(-2t, t, 0) | t \in R\} = \{t(-2,1,0) | t \in R\}$

Đặt $S = \{u(-2,1,0)\}$, ta thấy mọi nghiệm của hệ đã cho đều là tổ hợp tuyến tính của S, nên S là một hệ ...

đồng thời dễ thấy S là độc lập tuyến tính. Vậy S là một cơ sở của W, do đó $\dim(W) = 1$.

Vậy không gian nghiệm của hệ đã cho có số chiều là 1 và có một cơ sở là $S = \{u(-2,1,0)\}$

Bài 1: Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính th...

với ma trận A cho bởi:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad b)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Bài giải: b) $Ax = \theta \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t - s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$

Tập nghiệm của hệ là: $W = \{(-t-s, t, s) | t, s \in R\} = \{(-t, t, 0) + (-s, 0, s) | t, s \in R\} = \{t(-1,1,0) + s(-1,0,1) | t, s \in R \ldots$

Đặt $S = \{u_1(-1,1,0); u_2(-1,0,1)\}$, ta thấy mọi nghiệm của hệ đã cho đều là tổ hợp tuyến tính của S, nên S là một hệ sinh của W, ...

dễ thấy S là độc lập tuyến tính (do không tồn tại số k nào để $u_1 = k.u_2$). Vậy S là một cơ sở của W, do đó $\dim(W) = 2$.

Vậy không gian nghiệm của hệ đã cho có số chiều là 2 và có một cơ sở là $S = \{u_1(-1,1,0); u_2(-1,0,1)\}$

- $Ax = \theta \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = -t - s \end{cases}$ $W = \{(t, s, -t-s) | t, s \in R\} = \{(t, 0, -t) + (0, s, -s) | t, s \in R\} = \{t(1,0 \ldots$

Vậy không gian nghiệm của hệ đã cho có số chiều là 2 và có một cơ sở là $S' = \{v_1(1,0,-1); \ldots$

Bài 2: Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến t...

$$a)\ \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Bài giải:

a) Đây là hệ thuần nhất có 3 phương trình với 3 ẩn số và ta có định thức của ma trận hệ số là $\begin{vmatrix} 2 & 1 & \ldots \\ 1 & 2 & 0 \ldots \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ...

nên hệ đã cho chỉ có nghiệm tầm thường (0, 0, 0).

Do đó không gian nghiệm của hệ đã cho là không gian không, là không gian 0 chiều và quy ước là khôn...

Bài 2: Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến ...

$$a)\ \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Bài giải:

b) Ta có: $\overline{A} = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-2h1+h3=h3]{h1+h2=h2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{h2-2h3=h3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \operatorname{rank}(\overline{A}) = \operatorname{ran}\ldots$

Vậy hệ phương trình có vô số nghiệm, trong đó có 2 ẩn chính và 3 – 2 = 1 ẩn phụ.

Hệ có dạng: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ Tập nghiệm của hệ đã cho là: $\{(-t, t, 0) | t \in R\} = \{t(-1,1,0) \ldots$

Đặt $S = \{u(-1,1,0)\}$, ta thấy mọi nghiệm của hệ đã cho đều là tổ hợp tuyến tính của S, nên S là một hệ sinh ...

nghiệm của hệ đã cho; đồng thời dễ thấy S là độc lập tuyến tính. Vậy S là một cơ sở của không gian ...

Vậy không gian nghiệm của hệ đã cho có số chiều là 1 và có một cơ sở là $S = \{u(-1,1,0)\}$

Bài 2: Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nh...

$$a)\ \begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Bài giải: c) Đây là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có 2 phương trình với 5 ẩn số.

Hệ có dạng: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 0x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 0x_5 = 0 \end{cases}$

Do $\operatorname{rank}(\overline{A}) = \operatorname{rank}(A) = 2 < 5$, nên hệ phương trình có vô số nghiệm, trong đó có 2 ẩn chính và $5 - 2 = 3$ ...

Nghiệm của hệ là: $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -4t - m + n \\ x_2 = t \\ x_3 = m \\ x_4 = 2x_2 + 2x_3 = 2t + 2m \\ x_5 = n \end{cases}$ Tập nghiệm của hệ là: $\{(-4t - m + n, t, m, 2t + 2m, n) | t, m, n \in R\}$

$= \{(-4t, t, 0, 2t, 0) + (-m, 0, m, 2m, 0) + (n, 0, 0, \ldots$

$= \{t(-4,1,0,2,0) + m(-1,0,1,2,0) + n(1,0,0,0,1) \ldots R \ldots$

Đặt $S = \{u_1(-4,1,0,2,0); u_2(-1,0,1,2,0); u_3(1,0,0,0,1)\}$, ta thấy mọi nghiệm của hệ đã cho đều là tổ hợp tuyến tính của S, nên S là một ...

Ta sẽ chứng minh S là họ véc tơ độc lập tuyến tính. Thật vậy, ta có: $a.u_1 + b.u_2 + c.u_3 = 0 \Leftrightarrow a(-4,1,0,2,0) + b(-1,0,1,2,0) + c(\ldots$

$\Leftrightarrow (-4a - b + c, a, b, 2a + 2b, c) = (0,0,0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -4a - b + c = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ 2a + 2b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

Do đó S là một cơ sở của không gian ngh...

Vậy k/g–nghiệm của hệ đã cho có số ...

$S = \{u_1(-4,1,0,2,0); u_2(-1,0,1,2,0); \ldots$

Một số câu hỏi trắc nghiệm:

Câu 1: Hệ phương trình nào sau đây chỉ có nghiệm tầm thường?

A. $\begin{cases} x-y=0 \\ -2x+2y=0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x-y=0 \\ -x+y=0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x-y=0 \\ -2x+y=0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x-y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

Đáp án C

Câu 2: Hệ phương trình nào sau đây có nghiệm không tầm thường?

A. $\begin{cases} x+y=0 \\ -2x+2y=0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x-y=0 \\ -2x+y=0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x-y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

Đáp án D

Một số câu hỏi trắc nghiệm:

Câu 3: Tập nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-2y=0 \\ x-y+5z=0 \end{cases}$ là

A. $\{(t,t,0) | t \in R\}$ B. $\{(t,-t,0) | t \in R\}$

C. $\{(0,0,t) | t \in R\}$ D. Đáp án khác

Đáp án A

Câu 4: Không gian nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-2y+2z=0 \\ -x+y-z=0 \end{cases}$ có số chiều là

A. 0 B. 1

C. 2 D. 3

Đáp án C

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 10

TÍCH VÔ HƯỚNG

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa tích vô hướng: Xét không gian véc tơ V. Tích vô hướng của u và v, ký hiệu <u, v

thoả mãn các tiên đề sau:

1. <u, v> xác định với mọi u, v ∈ V.
2. <u, v> = <v, u>
3. <u + v, w> = <u, w> + <v, w> với ∀ w∈ V
4. ∀ λ ∈ R có <λu, v> = λ <u, v>
5. <u, u> ≥ 0
6. <u, u > = 0 ⇔ u = θ.

Không gian véc tơ mà tồn tại tích vô hướng trên nó được gọi là không gian có tích vô hướng. N

chiều thì gọi là không gian Euclid.

Tích vô hướng Euclid trong không gian R^n:

$$x=(x_1,x_2,...,x_n);\quad y=(y_1,y_2,...,y_n):\quad <x,y>=x_1.y_1+x_2.y_2+...+$$

Trong không gian R^2, với $x = (x_1, x_2)$ và $y = (y_1, y_2)$, ta định nghĩa $<x, y> = x_1y_1 + 2x_2y$

Dễ kiểm tra rằng nó thoả mãn các tiên đề của tích vô hướng.

Độ dài của véc tơ: Trong không gian có tích vô hướng, độ dài (hay chuẩn) của véc tơ u, kí

là số không âm xác định bởi công thức $\|u\| = \sqrt{<u, u>}$

Trong không gian R^n với tích vô hướng Euclid, với $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ thì $\|u\| = \sqrt{<u, u>} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + }$

(còn gọi là độ dài Euclid của u)

Trong một không gian có tích vô hướng, hai véc tơ u và v gọi là **trực giao** nếu

Nếu u trực giao với mọi véc tơ của một họ S thì ta nói u **trực giao với S**.

Một họ véc tơ trong không gian có tích vô hướng được gọi là **họ trực giao** nếu

khác nhau nào của họ cũng trực giao với nhau.

Một họ véc tơ trực giao trong đó mỗi véc tơ đều có chuẩn bằng 1 gọi là **họ trực chuẩn**

Một cơ sở gồm các véc tơ trực giao được gọi là **cơ sở trực giao**, thêm vào đó, nếu

véc tơ cùng bằng 1 thì được gọi là **cơ sở trực chuẩn.**

Trong mọi không gian Euclid n chiều khác rỗng đều tồn tại ít nhất một cơ sở

Quá trình trực chuẩn hoá Gram–Schmidt

Định lý: Với $S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ là một họ các véc tơ độc lập tuyến tính trong không gian

ta có thể xây dựng được họ trực chuẩn $S' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sao cho $span(S_k) = span(S_k')$

với $S_k = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ và $S_k' = \{v_1, v_2, \dots; v_k\}$, $k = 1..m$.

Bước 1: Đặt $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$

Bước 2: Đặt $a_2 = u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1$. Lấy $v_2 = \dfrac{a_2}{\|a_2\|}$

Bước 3: Đặt $a_3 = u_3 - \langle u_3, v_1\rangle v_1 - \langle u_3, v_2\rangle v_2$. Lấy $v_3 = \dfrac{a_3}{\|a_3\|}$

Bước k: Đặt $v_k = \dfrac{a_k}{\|a_k\|}$ với $a_k = u_k - \langle u_k, v_{k-1}\rangle v_{k-1} - \langle u_k, v_{k-2}\rangle v_{k-2} - \dots - \langle u_k, v_1\rangle$

B – BÀI TẬP

Dạng 1: Chứng minh một họ véc tơ là họ trực giao, họ trực chuẩn

Bài 1: Với tích vô hướng Euclid, chứng minh rằng các họ véc tơ sau là họ

a) $S = \{u_1(1,-1,2); u_2(-1,1,1); u_3(3,3,0)\} \subset R^3$

b) $B = \left\{v_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right); v_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right); v_3(0,0,1,0); v_4(0,0,0,1)\right\} \subset R^4$

Bài giải:

a) Ta có: $\langle u_1, u_2\rangle = 1.(-1) + (-1).1 + 2.1 = 0$

$\langle u_2, u_3\rangle = (-1).3 + 1.3 + 1.0 = 0$

$\langle u_3, u_1\rangle = 3.1 + 3.(-1) + 0.2 = 0$

Do đó S là họ véc tơ trực giao.

Bài 1: Với tích vô hướng Euclid, chứng minh rằng các họ véc tơ sau là

a) $S = \{u_1(1,-1,2); u_2(-1,1,1); u_3(3,3,0)\} \subset R^3$

b) $B = \left\{v_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right); v_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right); v_3(0,0,1,0); v_4(0,0,0,1)\right\} \subset R^4$

Bài giải:

b) Ta có:

$\langle v_1, v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}.\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}} + 0.0 + 0.0 = 0$

$\langle v_1, v_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}.0 + \frac{1}{\sqrt{2}}.0 + 0.1 + 0.0 = 0$

$\langle v_1, v_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}.0 + \frac{1}{\sqrt{2}}.0 + 0.0 + 0.1 = 0$

$\langle v_2, v_3\rangle = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).0 + \frac{1}{\sqrt{2}}.0 + 0.1$

$\langle v_2, v_4\rangle = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).0 + \frac{1}{\sqrt{2}}.0 + 0.0 +$

$\langle v_3, v_4\rangle = 0.0 + 0.0 + 1.0 + 0.1 = 0$

Do đó B là họ véc tơ trực giao.

Bài 2: Với tích vô hướng Euclid trong R^3, hãy xác định k để u và v là hai véc tơ

a) $u = (2,1,3)$; $v = (1,7,k)$

b) $u = (k,k,1)$; $v = (k,5,6)$

Bài giải:

a) Để u và v là hai véc tơ trực giao thì tích vô hướng của chúng cần bằng 0.

$\langle u, v\rangle = 2.1 + 1.7 + 3.k = 0 \Leftrightarrow 9 + 3k = 0 \Leftrightarrow k = -3$

b) $\langle u, v\rangle = k.k + k.5 + 1.6 = 0 \Leftrightarrow k^2 + 5k + 6 = 0 \Leftrightarrow k_1 = -3, k_2 = -2$

Bài 3: Cho họ véc tơ $S = \left\{x = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right); y = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right)\right\} \subset R^2$.

Chứng minh rằng S là họ véc tơ trực chuẩn trong R^2 theo tích vô hướng $\langle u, v\rangle$

nhưng không trực chuẩn theo tích vô hướng Euclid $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2$

Bài giải: Ta có: $\langle u, v\rangle^* = 3.\frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{2}{\sqrt{30}} + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right).\frac{3}{\sqrt{30}} = 0$

$\langle u, v\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{2}{\sqrt{30}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right).\frac{3}{\sqrt{30}} = -\frac{1}{\sqrt{150}} \neq 0$

Nên S là họ véc tơ trực giao theo tích vô hướng $\langle u, v\rangle^* = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ và không là họ trực giao theo tích vô hướng Euclid.

$\|u\|^* = \sqrt{3.\frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{1}{\sqrt{5}} + 2.\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)} = 1$; $\|v\|^* = \sqrt{3.\frac{2}{\sqrt{30}}.\frac{2}{\sqrt{30}} + 2.\frac{3}{\sqrt{30}}.\frac{3}{\sqrt{30}}} = 1$

Do đó S là họ trực chuẩn theo tích vô hướng $\langle u, v\rangle^* = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$

Dạng 2: Trực chuẩn hóa Gram – Schmidt họ véc tơ độc lập tuy

Bài 1: Với tích vô hướng Euclid, hãy trực chuẩn hóa Gram – Schmidt họ vé

a) $S = \{u_1(1,-3); u_2(2,2)\} \subset R^2$

b) $B = \{u_1(1,1,1); u_2(-1,1,0); u_3(1,2,1)\} \subset R^3$

Bài giải:

a) $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \dfrac{(1,-3)}{\sqrt{10}} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$a_2 = u_2 - \langle u_2, v_1\rangle .v_1 = (2,2) - \left(\frac{-4}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = (2,2) + \left(\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{12}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5}(3,1)$

$v_2 = \dfrac{a_2}{\|a_2\|} = \dfrac{\frac{4}{5}(3,1)}{\frac{4}{5}\sqrt{10}} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

Ta xây dựng được họ trực chuẩn là: $S' = \left\{v_1\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right); v_2\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right\}$

Bài 1: Với tích vô hướng Euclid, hãy trực chuẩn hóa Gram – Schmidt

a) $S=\{u_1(1,-3);u_2(2,2)\}\subset R^2$

b) $B=\{u_1(1,1,1);u_2(-1,1,0);u_3(1,2,1)\}\subset R^3$

Bài giải: b) $v_1=\frac{u_1}{\|u_1\|}=\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$a_2=u_2-<u_2,v_1>.v_1=(-1;1;0)-(0)\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=(-1;1;0)$ $\quad v_2=\frac{a_2}{\|a_2\|}=\frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}=$

$a_3=u_3-<u_3,v_1>.v_1-<u_3,v_2>.v_2=(1,2,1)-\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

$=(1,2,1)-\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},0\right)=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{-1}{3}\right)=\frac{1}{6}(1,1,-2)$

$v_3=\frac{a_3}{\|a_3\|}=\frac{\frac{1}{6}(1,1,-2)}{\frac{1}{6}\sqrt{6}}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$

Ta xây dựng được họ trực chuẩn là: $B'=\left\{v_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right);v_2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right);v_3\right.$

Bài 2: Tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}2x+2y+2z=0\\2x+2y+2z=0\\2x+2y+2z=0\end{cases}$$

Bài giải: $\begin{cases}2x+2y+2z=0\\2x+2y+2z=0\\2x+2y+2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2y+2z=0\\0=0\\0=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-t-s\\y=t\\z=s\end{cases}$

Tập nghiệm của hệ là: $W=\{(-t-s,t,s)|t,s\in R\}=\{(-t,t,0)+(-s,0,s)|t,s\in R\}=\{t(-1,1,0)+s(-1,0,1)|t,s$

Đặt $S=\{u_1(-1,1,0);u_2(-1,0,1)\}$, ta thấy mọi nghiệm của hệ đã cho đều là tổ hợp tuyến tính của S, nên S là một hệ sinh

dễ thấy S là độc lập tuyến tính (do không tồn tại số k nào để $u_1=k.u_2$). Vậy S là một cơ sở của W, do đó dim(W) = 2.

Vậy không gian nghiệm của hệ đã cho có số chiều là 2 và có một cơ sở là $S=\{u_1(-1,1,0);u_2(-1,0,1)\}$

$v_1=\frac{u_1}{\|u_1\|}=\frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

$a_2=u_2-<u_2,v_1>.v_1=(-1,0,1)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)=\frac{1}{2}(-1,-1,2)$ $\quad v_2=\frac{a_2}{\|a_2\|}=\frac{\frac{1}{2}(-1,-1,2)}{\frac{1}{2}\sqrt{6}}=\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\right.$

Vậy không gian nghiệm của hệ phương trình đã cho có một cơ sở trực chuẩn là: $S'=\{v_1($

Một số câu hỏi trắc nghiệm:

Câu 1: Trong không gian véc tơ R^2 với tích vô hướng Euclid, họ véc tơ nào sau đây là họ

A. $S=\{u_1(1,1);u_2(-2,3)\}$ B. $S_1=\{v_1(1,2);v_2(2,-1)\}$

C. $S_2=\{u(3,5,);v(-1,2)\}$ D. $S_3=\{m(-1,-2);n(1,0)\}$

Đáp án B

Câu 2: Họ véc tơ nào sau đây là một cơ sở trực chuẩn của không gian véc tơ R^2 với tích vô hướng

A. $S=\{u_1(1,1);u_2(-2,3)\}$ B. $S_1=\{v_1(1,2);v_2(2,-1)\}$

C. $S_2=\{u(3,5,);v(-1,2)\}$ D. $S_3=\{m(0,-1);n(1,0)\}$

Đáp án D

Một số câu hỏi trắc nghiệm:

Câu 3: Trong không gian véc tơ R^2 với tích vô hướng Euclid, trực chuẩn hóa véc tơ v(1,

A. $(1,-1)$ B. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

C. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

Đáp án C

Câu 4: Trong không gian véc tơ R^2 với tích vô hướng Euclid, không gian nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x\\2x\end{cases}$

một cơ sở trực chuẩn là

A. $(1,-1)$ B. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

C. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ D. $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

Đáp án B

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 11

ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH, TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa ánh xạ tuyến tính: Cho hai không gian véc tơ V và W. Ánh xạ T: V → W được gọi

nếu ∀u, v∈V và λ ∈ R:

1) $T(u+v)=T(u)+T(v)$

2) $T(\lambda u)=\lambda T(u)$

Nếu V = W thì T được gọi là toán tử tuyến tính.

Tính chất: Nếu T: V → W là ánh xạ tuyến tính thì:

1) $T(\theta)=\theta$

2) $T(-u)=-T(u)\ \forall u\in V$

3) $T(u-v)=T(u)-T(v)$

B – BÀI TẬP

Dạng 1: Chứng minh một ánh xạ là ánh xạ tuyến tính

Bài 1: Chứng minh ánh xạ T: $R^2 \to R^3$ xác định bởi $T(x, y) = (x, x + y, x - y)$ là một ánh

Bài giải: Với $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$, $\lambda \in R$

$$T(u + v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, x_1 + y_1 + x_2 + y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2) =$$
$$= (x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1) + (x_2, x_2 + y_2, x_2 - y_2) = T(u) + T(v)$$

$$T(\lambda u) = T(\lambda x_1, \lambda y_1) = (\lambda x_1, \lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_1 - \lambda y_1) = \lambda(x_1, x_1 + y_1, x_1 - y_1) = \lambda T(u)$$

Vậy T là một ánh xạ tuyến tính.

Bài 2. Chứng minh rằng các ánh xạ sau không là ánh xạ tuyến tính

a) T: R → R xác định bởi $T(x) = 2x + 1$

b) T: R → R xác định bởi $T(x) = x^2$

Bài giải:

a) Với $x, y \in R$: $T(x + y) = 2(x + y) + 1 = 2x + 2y + 1$

$$T(x) + T(y) = (2x + 1) + (2y + 1) = 2x + 2y + 2$$

$T(x+y) \neq T(x) + T(y)$ nên T không phải là một ánh xạ tuyến tính.

b) Với $x, y \in R$: $T(x + y) = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$$T(x) + T(y) = x^2 + y^2$$

$T(x+y) \neq T(x) + T(y)$ với mọi $x, y \in R$, nên T không phải là một ánh

Bài 3: Ánh xạ nhân ma trận

Cho ma trận A cỡ m×n và véc tơ $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, [x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow A[x] = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} =$$

Xét quy luật đặt T: $R^n \to R^m$ xác định bởi $[T(x)] = A[x]$

$\forall x, y \in R^n$, $\forall \lambda \in R$, $[T(\lambda x + y)] = A[\lambda x + y] = \lambda A[x] + A[y] = \lambda[T(x)] + [T$

Vậy T là một ánh xạ tuyến tính, được gọi là **ánh xạ nhân ma trận.**

Bài 4: Chứng minh rằng ánh xạ $T: M_{m\times n} \to M_{n\times m}$, $T(A) = A^t$ là một ánh

Bài giải:

Cho A và B là hai ma trận cỡ m×n, khi đó:

$$T(A+B) = (A+B)^t = A^t + B^t = T(A) + T(B); \quad T(\lambda A) = (\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda T(A)$$

Vậy T là một ánh xạ tuyến tính.

Bài 5: Với $V = I_{[a, b]}$ là không gian các hàm khả tích trên đoạn [a, b], ánh xạ J: V→ R

$J(f) = \int_a^b f(x)dx$ là một ánh xạ tuyến tính.

Thật vậy, ta có:

$$J(f + g) = \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = J(f) + J(g).$$

$$J(\lambda f) = \int_a^b [\lambda f(x)]dx = \lambda \int_a^b f(x)dx = \lambda J(f)$$

Vậy phép lấy tích phân là ánh xạ tuyến tính.

Dạng 2: Tìm ảnh, tạo ảnh của véc tơ qua ánh xạ tuyến tính.

Bài 1: Cho ánh xạ tuyến tính $T: R^2 \to R^3$, $T(x, y) = (x - y, x, 2y)$.

a) Tìm ảnh của véc tơ $u(3,1)$ qua ánh xạ T.

b) Tìm véc tơ v, w trong không gian R^2 sao cho $T(v) = (0,1,2)$; $T(w) = (1,3,6)$

Bài giải: a) Ta có: $T(u) = T(3,1) = (2,3,2)$

b) Gọi $v(x, y) \in R^2 : T(v) = (0,1,2)$

$$\Leftrightarrow T(x,y) = (0,1,2) \Leftrightarrow (x - y, x, 2y) = (0,1,2) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x = 1 \\ 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow v(1,1)$$

Gọi $w(x, y) \in R^2 : T(w) = (1,3,6)$

$$\Leftrightarrow T(x,y) = (1,3,6) \Leftrightarrow (x - y, x, 2y) = (1,3,6) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x = 3 \\ 2y = 6 \end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm, nên không có véc tơ w nào của không gian R^2

Bài 2: Cho toán tử tuyến tính $T: R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (3x + y, x - 5y)$.

a) Tìm ảnh của véc tơ $u(1,-2)$ qua ánh xạ T.

b) Tìm véc tơ v trong không gian R^2 sao cho $T(v) = (3,-5)$

Bài giải: a) Ta có: $T(u) = T(1,-2) = (1,11)$

b) Gọi $v(x, y) \in R^2 : T(v) = (3,-5)$

$$\Leftrightarrow T(x,y) = (3,-5) \Leftrightarrow (3x + y, x - 5y) = (3,-5) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 3 \\ x - 5y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases}$$

Bài 3: Cho ánh xạ tuyến tính $T: R^3 \to R^4$, $T(u) = (1,0,-2,3)$; $T(v) = (-1,2,1,-4)$. Tìm $T(2u + v)$;

Bài giải:

$$T(2u + v) = T(2u) + T(v) = 2T(u) + T(v) = 2(1,0,-2,3) + (-1,2,1,-4) = (2,0,-4,3) + (-1,2$$

$$T(-3v) = -3T(v) = -3.(-1,2,1,-4) = (3,-6,-3,12)$$

Bài 4: Cho toán tử tuyến tính $T: R^3 \to R^3$ thỏa mãn $T(1,0,0) = (2,-1,4)$; $T(0,1,0) = (1,5,-2)$; $T($

Tìm $T(2,3,-2)$

Bài giải: $(2,3,-2) = 2(1,0,0) + 3(0,1,0) + (-2)(0,0,1)$

$$T(2,3,-2) = T\left[2(1,0,0) + 3(0,1,0) + (-2)(0,0,1)\right]$$

$$= 2T(1,0,0) + 3T(0,1,0) - 2T(0,0,1)$$

$$= 2(2,-1,4) + 3(1,5,-2) - 2(0,3,1) = (7,7,0)$$

Bài 5: Tìm ảnh của véc tơ $v(-1,2)$ qua ánh xạ nhân ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

Bài giải:

Gọi T là ánh xạ nhân ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

$$T: R^3 \to R^2, \quad [T(v)] = A[v]$$

$$[T(-1,2)] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T(-1,2) = (-5,-3,9)$$

Một số câu hỏi trắc nghiệm:

Câu 1: Ánh xạ $f: R^2 \to R^3$ nào dưới đây là ánh xạ tuyến tính:

A. $f(x,y) = (2x+y, x-y, 3y)$. B. $f(x,y) = (2x^2, 3y, x)$.

C. $f(x,y) = (x, -3y^3, y)$. D. $f(x,y) = (2x^4, 0, y)$.

Đáp án A

Câu 2 : Cho ánh xạ $f: R^2 \to R^3$ thoả mãn $f(x, y) = (x, y + x, y - kx)$. Để f là ánh xạ tuyến tín

A. $k = 0$. B. $k > 0$.

C. $k < 0$. D. $k \in$ ¡ .

Đáp án D

Một số câu hỏi trắc nghiệm:

Câu 3 : Ánh xạ nào sau đây không phải là một toán tử tuyến tính

A $f: R^3 \to R^3$ $f(x,y,z) = (2x+z, -x+2y, y+5z)$

B. $f: R^2 \to R^3$ $f(x,y) = (2x+5y, 3x-2y, 3x)$.

C. $f: R^3 \to R^3$ $f(x,y,z) = (2x+y, 3x-2y, z)$.

D. $f: R^2 \to R^2$ $f(x,y) = (x+y, x-2y)$.

Đáp án B

Câu 4: Cho ánh xạ tuyến tính $T: R^2 \to R^3$ xác định bởi $T(x,y) = (x+2y, x-y, 2x+y)$ và $u_1 = (1, 2)$. Khi đó $T(u_1)$ bằng:

A. (5, 1, 4). B. (–5, –1, 4).

C. (–5, 1, –4). D. (5, –1, 4).

Đáp án D

Một số câu hỏi trắc nghiệm:

Câu 5 : Biết $T: R^3 \to R^3$ là một toán tử tuyến tính thỏa mãn $T(u_1) = (1, 3, -2)$, T(

khi đó $T(u_1 + 2u_2)$ bằng:

A. (1, 4, –2). B. (–1, 3, –2).

C. (3, 3, 2). D. (2, 4, 2).

Đáp án C

Câu 6: Cho toán tử tuyến tính $T: R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (x - 2y, -x + 4y)$. Chọn đáp án đúng.

A. $T(3,1) = (1, 0)$. B. $T(0,0) = (0, 0)$.

C. $T(1,1) = (-1, 1)$. D. $T(3,-1) = (5, -3)$.

Đáp án B

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHUYÊN ĐỀ 12

HẠT NHÂN VÀ ẢNH CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍN

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa ánh xạ tuyến tính: Cho hai không gian véc tơ V và W. Ánh xạ T: V → W được gọi

nếu ∀u, v∈V và λ ∈ R:

1) T(u + v) = T(u) + T(v)

2) T(λu) = λT(u)

Nếu V = W thì T được gọi là toán tử tuyến tính.

Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính:

Giả sử T: V→ W là ánh xạ tuyến tính giữa hai không gian véc tơ.

Hạt nhân của T, kí hiệu ker(T) hay $T^{-1}(\theta)$, là tập {x∈V: T(x) = θ}.

Ảnh của T, kí hiệu im(T) hay T(V), là tập {y ∈W : ∃x∈V, T(x) = y}.

Với ánh xạ không T: V → W, T(u) = θ ∀u ∈ V. Khi đó ker(T) = V, im(T) = {θ}.

Với ánh xạ đồng nhất T: V → V, T(u) = u ∀u ∈ V. Khi đó ker(T) = {θ}, im(T) =

- Tính chất của hạt nhân và ảnh: Nếu T: V→ W là một ánh xạ tuyến tính thì ker(T) và

là các không gian con của V và W.

Hạng của ánh xạ tuyến tính: Hạng của ánh xạ tuyến tính T, ký hiệu rank(T), là số chiều

gian ảnh của nó, tức rank(T) = dim(im(T)).

Nếu T: V→ W là ánh xạ tuyến tính từ không gian véc tơ n chiều V tới không gian W thì

dim(im(T)) + dim(ker(T)) = n, hay rank(T) + dim(ker(T)) = n.

B – BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm hạt nhân của ánh xạ tuyến tính

Bài 1: Tìm hạt nhân của các ánh xạ tuyến tính sau :

a) $T:R^2 \to R^3, T(x,y) = (-x+y,0,-2y)$

b) $T:R^3 \to R^2, T(x,y,z) = (-x+y+z, x+y-2z)$

Bài giải:

a) $ker(T) = \{u(x,y) \in R^2 : T(u) = \theta\}$

$$T(u) = \theta \Leftrightarrow T(x,y) = \theta \Leftrightarrow (-x+y,0,-2y) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ 0=0 \\ -2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$ker(T) = \{u(0,0) = \theta\}$

Bài 1: Tìm hạt nhân của các ánh xạ tuyến tính sau :

a) $T:R^2 \to R^3, T(x,y) = (-x+y,0,-2y)$

b) $T:R^3 \to R^2, T(x,y,z) = (-x+y+z, x+y-2z)$

Bài giải:

b) $ker(T) = \{u(x,y,z) \in R^3 : T(u) = \theta\}$

$$T(u) = \theta \Leftrightarrow T(x,y,z) = \theta \Leftrightarrow (-x+y+z, x+y-2z) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z=0 \\ 2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3t \\ y=t \\ z=2t \end{cases}$$

$ker(T) = \{(3t,t,2t), t \in R\} = \{t(3,1,2), t \in R\}$

Bài 2: Cho ánh xạ tuyến tính $T:P_2(x) \to P_3(x), T(p(x)) = xp(x)$. Véc tơ nào sau

a) $p(x) = x^2$ b) $h(x) = 0$ c) $q(x) = 1+x$

Bài giải:

$$T(p(x)) = xp(x) = x.x^2 = x^3$$

$$T(h(x)) = xh(x) = x.0 = 0 \qquad h(x) \in ker(T)$$

$$T(q(x)) = xq(x) = x.(1+x) = x^2 + x$$

Bài 3: Tìm một cơ sở và số chiều của không gian hạt nhân của ánh xạ nhân ma

Bài giải:

Gọi T là ánh xạ nhân ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $T:R^3 \to R^3$, $[T(v)] = A.[v]$

$$[T(x,y,z)] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-z \\ 4x-2z \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T(x,y,z) = (2x-z, 4x-2z, 0)$$

$ker(T) = \{(x,y,z) \in R^3$

$$T(x,y,z) = \theta \Leftrightarrow (2x-z, 4x-2z, 0) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-z=0 \\ 4x-2z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-z=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=s \\ z=2t \end{cases}$$

$\Rightarrow ker(T) = \{(t,s,2t) | t,s \in R\} = \{t(1,0,2) + s(0,1,0) | t,s \in R\}$

Dễ thấy $S = \{u(1;0;2); v(0;1;0)\}$ là họ độc lập tuyến tính và là hệ sinh ra không gian $ker(T)$

nên S là 1 cơ sở của $ker(T)$ và số chiều của $ker(T)$ là 2.

Bài 4: Cho ánh xạ tuyến tính $J : P_1(x) \to R,\ J(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)dx$. Hãy

Bài giải:

$$ker(J) = \{p(x) = ax + b \in P_1(x) : J(p(x)) = \theta\}$$

$$J(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)dx = \int_{-1}^{1} (ax+b)dx = \left(a\frac{x^2}{2} + bx\right)\Big|_{-1}^{1} = 2b$$

$$J(p(x)) = \theta \Leftrightarrow 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

$$ker(J) = \{p(x) = ax\}$$

Dạng 2: Tìm không gian ảnh của ánh xạ tuyến tính.

Bài 1: Cho ánh xạ tuyến tính $T : P_2(x) \to P_3(x), T(p(x)) = xp(x)$. Véc tơ nào sau đâ

a) $m(x) = x + x^2$ b) $h(x) = 1 + x$ c) $q(x) = 3 - x^2$

Bài giải: $im(T) = \{n(x) \in P_3(x) : \exists\, p(x) \in P_2(x), T(p(x)) = n(x)\}$

$T(p(x)) = m(x) \Leftrightarrow xp(x) = x + x^2 \Leftrightarrow p(x) = 1 + x \Rightarrow \exists\, p(x) \in P_2(x), T(p(x)) = m(x) \Rightarrow$

$T(p(x)) = h(x) \Leftrightarrow xp(x) = 1 + x$

Không tồn tại $p(x) \in P_2(x), T(p(x)) = h(x) \Rightarrow h(x) \notin im(T)$

$T(p(x)) = q(x) \Leftrightarrow xp(x) = 3 - x^2$

Không tồn tại $p(x) \in P_2(x), T(p(x)) = q(x) \Rightarrow q(x) \notin im(T)$

Bài 2: Tìm một cơ sở và số chiều của không gian ảnh của ánh xạ nhân ma trậ

Bài giải: Gọi T là ánh xạ nhân ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $T : R^3 \to R^3$, $[T(v)] = A.[v]$

$$[T(x,y,z)] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - z \\ 4x - 2z \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T(x,y,z) = (2x - z, 4x - 2z, 0)$$

- $im(T) = \{(a,b,c) \in R^3 : \exists (x,y,z), T(x,y,z) = (a,b,c)\}$

$$T(x,y,z) = (a,b,c) \Leftrightarrow (2x - z, 4x - 2z, 0) = (a,b,c) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - z = a \\ 4x - 2z = b \\ 0 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - z = a \\ 0 = b - 2a \\ 0 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = t \\ b = 2t \\ c = 0 \end{cases}$$

- $\Rightarrow im(T) = \{(t, 2t, 0) | t \in R\} = \{t(1,2,0) | t \in R\}$

Dễ thấy $S = \{u(1,2,0)\}$ là họ độc lập tuyến tính và là hệ sinh ra không gian $im(T)$ nên S là 1 cơ sở của *im(T)* và số chiều của *im(T)* là 1.

Bài 3: Tìm hạng của ánh xạ tuyến tính $T : R^3 \to R^4$, $T(x,y,z) = (x + y$

Bài giải: rank(T) = dim(im(T)) $im(T) = \{(a,b,c,d) \in R^4 : \exists (x,y,z) \in R^3,$

$$T(x,y,z) = (a,b,c,d) \Leftrightarrow (x + y - z, -x - y + z, x + z, z) = (a,b,c,d)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = a \\ -x - y + z = b \\ x + z = c \\ z = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = a \\ 0 = a + b \\ -y + 2z = -a + c \\ z = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = a \\ -y + 2z = -a + c \\ z = d \\ 0 = a + b \end{cases}$$

Để hệ trên có nghiệm thì $a + b = 0 \Rightarrow b = -a$

$im(T) = \{(a, -a, c, d)\} = \{(a, -a, 0, 0) + (0, 0, c, 0) + (0, 0, 0, d)\} = \{a(1, -1, 0, 0) + c(0, 0, 1, 0) + d(0$

Dễ thấy $S = \{(1, -1, 0, 0); (0, 0, 1, 0); (0, 0, 0, 1)\}$ là họ độc lập tuyến tính và là hệ sinh ra không gian *im(T)*, nên S là 1 cơ sở của *im(T)* và số chiều của *im(T)* là 3.

Vậy rank(T) = 3.

Bài 4: Tìm dim(ker(T)) trong đó

a) $T : R^5 \to R^7$ có hạng bằng 3.

b) $T : P_4(x) \to P_3(x)$ có hạng bằng 1.

c) Im của $T : R^6 \to R^3$ là R^3.

Bài giải:

a) dim(ker(T)) = dim(R^5) – dim(im(T)) = dim(R^5) – rank(T) = 5 – 3 = 2

b) dim(ker(T)) = dim(P_4(x)) – dim(im(T)) = = dim(P_4(x)) – rank(T) = 5 – 1 = 4

c) dim(ker(T)) = dim(R^6) – dim(im(T)) = dim(R^6) – dim(R^3) = 6 – 3 = 3

Một số câu hỏi trắc nghiệm:

Câu 1: Cho ánh xạ tuyến tính $f : R^2 \to R^3, f(x,y) = (x + y, -x - y, 2x + 2y)$. Véc tơ nào sau

A. $u(1,1)$. B. $u(2,2)$.

C. $u(1,-1)$. D. $u(-1,-1)$.

Đáp án C

Câu 2: Cho ánh xạ tuyến tính $f : R^3 \to R^2, f(x,y,z) = (x + y - z, -x - y + z)$. Véc tơ nào sau đây thuộc

A. $u(1,1,2)$. B. $u(2,2,4)$.

C. $u(1,-1,0)$. D. Cả ba đáp án trên.

Đáp án D

Một số câu hỏi trắc nghiệm:

Câu 3: Cho toán tử tuyến tính $f: R^2 \to R^2, f(x,y) = (-x+y, 2x-2y)$. Véc tơ nào sau

A. $u(1,1)$. B. $u(3,-6)$.

C. $u(1,-1)$. D. $u(-1,-1)$.

Đáp án B

Câu 4: Cho ánh xạ T là ánh xạ nhân ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, không gian ker(T) có số chiều là:

A. 0. B. 1.

C. 2. D. 3.

Đáp án B

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 13

MA TRẬN CỦA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN

Ma trận của ánh xạ tuyến tính:

Xét ánh xạ tuyến tính T: V → W và hai cơ sở $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$, $B' = \{v_1, v_2, \ldots,$
Ma trận A cỡ m×n thỏa mãn $[T(x)]_{B'} = A[x]_B$ với mọi $x \in V$, được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính T: V→ W ứng với cơ sở B trong V và cơ sở B' trong W.

Nếu B và B' là các cơ sở chính tắc thì A được gọi là ma trận chính tắc của T.

Xét ánh xạ tuyến tính T: V → W và hai cơ sở $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset V$, $B' = \{v_1,$

Giả sử trong cơ sở B, nếu véc tơ $x \in V$ có biểu diễn $x = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n$,

$$T(x) = x_1T(u_1) + x_2T(u_2) + \ldots + x_nT(u_n).$$

Như vậy, ánh xạ T hoàn toàn được xác định thông qua các véc tơ $T(u_j)$, $j = 1..n$.

Với mọi $j = 1..n$, vì $T(u_j) \in W$ nên trong cơ sở B' nó có biểu diễn $T(u_j) = t_{1j}v_1 + t_{2j}v_2$

Vì vậy $T(x) = \sum_{j=1}^{n} x_jT(u_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{m} t_{kj}v_k = \sum_{k=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} t_{kj}x_j)v_k$.

Giả sử trong cơ sở B', ta có $T(x) = y_1v_1 + y_2v_2 + \ldots + y_mv_m$.

Khi đó $y_1 = \sum_{j=1}^{n} t_{1j}x_j$, $y_2 = \sum_{j=1}^{n} t_{2j}x_j$, ..., $y_m = \sum_{j=1}^{n} t_{mj}x_j$, hay $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{m1} & t_{m2} & \ldots & t_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \end{bmatrix}$

Đặt $A = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{m1} & t_{m2} & \ldots & t_{mn} \end{bmatrix} = [[T(u_1)]_{B'}\ [T(u_2)]_{B'} \ldots [T(u_n)]_{B'}]$, ta có $[T(x)]_{B'} = A[x]_B$.

B – BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính

Bài 1: Cho ánh xạ tuyến tính $T: R^3 \to R^2, T(x,y,z) = (-x+y+z, x+y)$. Tìm ma trận của T
các cơ sở $B = \{u_1(-1,2,1); u_2(0,1,3); u_3(2,-1,0)\} \subset R^3$ và $B' = \{v_1(3,-2); v_2(1,1)\} \subset R^2$

Bài giải: Gọi A là ma trận cần tìm. Khi đó $A = \left[[T(u_1)]_{B'}\quad [T(u_2)]_{B'}\quad [T(u_3)]_{B'}\right]$

$T(u_1) = T(-1,2,1) = (4,1)$; $T(u_2) = T(0,1,3) = (4,1)$; $T(u_3) = T(2,-1,0) = (-3,1)$

$T(u_1) = av_1 + bv_2 \Leftrightarrow (4,1) = a(3,-2) + b(1,1) \Leftrightarrow (4,1) = (3a+b, -2a+b) \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b=4 \\ -2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a= \\ b=11 \end{cases}$

$\Rightarrow T(u_1) = \frac{3}{5}v_1 + \frac{11}{5}v_2 \Rightarrow [T(u_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{11}{5} \end{bmatrix}$ Tương tự ta tìm được: $[T(u_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{11}{5} \end{bmatrix}$, $[T($

Vậy ma trận cần tìm là: $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{11}{5} & \frac{11}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$

Bài 2: Cho ánh xạ tuyến tính $T: R^2 \to R^3$ xác định bởi $T(x,y) = (x-2y, 3x+y, 0$
$u_2\} \subset R^2$, $B' = \{v_1, v_2, v_3\} \subset R^3$ với $u_1 = (1, 0)$; $u_2 = (2, 3)$ và $v_1 = (1, 1, 1)$; $v_2 = (2,$

1. Tìm ma trận của T đối với các cơ sở B và B'.
2. Tìm ma trận của T đối với các cơ sở B và cơ sở chính tắc của R^3.

Bài giải: Gọi A là ma trận của T đối với các cơ sở B và B' $A = \left[[T(u_1)]_{B'}\quad [T(u_2\right.$

$T(u_1) = T(1,0) = (1,3,0)$; $T(u_2) = T(2,3) = (-4,9,0)$

$T(u_1) = av_1 + bv_2 + cv_3 \Leftrightarrow (1,3,0) = a(1,1,1) + b(2,0,1) + c(-3,0,1) \Leftrightarrow (1,3,0) = (a+2b-$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b-3c=1 \\ a=3 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-11/5 \\ c=-4/5 \end{cases} \Rightarrow [T(u_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ -11/5 \\ -4/5 \end{bmatrix}$ Tương tự ta tìm được: $[T(u_2)]$

Vậy ma trận cần tìm là: $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -11/5 & -8 \\ -4/5 & -1 \end{bmatrix}$

Bài 2: Cho ánh xạ tuyến tính $T: R^2 \to R^3$ xác định bởi $T(x,y) = (x-2y, 3x+y, 0)$

$u_2) \subset R^2$, $B' = (v_1, v_2, v_3) \subset R^3$ với $u_1 = (1, 0)$; $u_2 = (2, 3)$ và $v_1 = (1, 1, 1)$; $v_2 = (2,$

1. Tìm ma trận của T đối với các cơ sở B và B'.
2. Tìm ma trận của T đối với các cơ sở B và cơ sở chính tắc của R^3.

Bài giải: Gọi A_1 là ma trận của T đối với các cơ sở B và cơ sở chính tắc của R^3.

$$A_1 = \left[\left[T(u_1)\right]_S \quad \left[T(u_2)\right]_S \right]$$

Trong đó: $S = \{e_1(1,0,0);\ e_2(0,1,0);\ e_3(0,0,1)\}$

$$T(u_1) = T(1,0) = (1,3,0) \Rightarrow \left[T(u_1)\right]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad T(u_2) = T(2,3) = (-4,9,0) \Rightarrow \left[T(u_2)\right]_S = \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận cần tìm là: $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ma trận chính tắc của ánh xạ tuyến tính

Bài 3: Tìm ma trận chính tắc của các ánh xạ tuyến tính sau:

a) $T: R^3 \to R^2, T(x,y,z) = (-x+2y+3z, 5x+y)$

b) $T: R^2 \to R^3, T(x,y) = (-5x+3y, x-4y, 3x)$

c) $T: R^4 \to R^3, T(x,y,z,t) = (x+2y-t, x+y-z, 2y+4t)$

Bài giải:

$T: R^3 \to R^2, T(x,y,z) = (-x+2y+3z, 5x+y)$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$T: R^2 \to R^3, T(x,y) = (-5x+3y, x$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$T: R^4 \to R^3, T(x,y,z,t) = (x+2y-t, x+y-z, 2y+4t)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Bài 4: Cho ánh xạ tuyến tính $T: P_2(x) \to P_4(x)$, $T(p(x)) = x^2 p(x)$. Tìm ma trận

$B = \{p_1 = 1+x^2; p_2 = 1+2x+3x^2; p_3 = 4+5x+x^2\} \subset P_2(x)$ và $B' = \{q_1 = 1; q_2 = x, q_3 = x^2; q_4 =$

Bài giải: Gọi A là ma trận cần tìm. Khi đó $A = \left[\left[T(p_1)\right]_{B'} \quad \left[T(p_2)\right]_{B'} \quad \left[T(p_3)\right]_{B'} \right]$

$T(p_1) = T(1+x^2) = x^2(1+x^2) = x^2 + x^4 = 0 + 0x + x^2 + 0x^3 + x^4$

$T(p_2) = T(1+2x+3x^2) = x^2(1+2x+3x^2) = x^2 + 2x^3 + 3x^4 = 0 + 0x + x^2 + 2x^3 + 3x^4$

$T(p_3) = T(4+5x+x^2) = x^2(4+5x+x^2) = 4x^2 + 5x^3 + x^4 = 0 + 0x + 4x^2 + 5x^3 + x^4$

$$\left[T(p_1)\right]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \left[T(p_2)\right]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận cần tìm là: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Dạng 2: Tìm ma trận của toán tử tuyến tính

Bài 1: Cho toán tử tuyến tính $T: R^2 \to R^2$ xác định bởi $T(x,y) = (2y, x$

Tìm ma trận của T đối với cơ sở $B = \{u_1, u_2\}$, trong đó $u_1 = (1, 2)$; $u_2 = ($

Bài giải: $A = \left[\left[T(u_1)\right]_B \quad \left[T(u_2)\right]_B \right]$

$T(u_1) = T(1,2) = (4,-3); \quad T(u_2) = T(3,4) = (8,-6)$

$T(u_1) = au_1 + bu_2 \Leftrightarrow (4,-3) = a(1,2) + b(3,4) \Leftrightarrow (4,-3) = (a+3b, 2a+4b)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3b=4 \\ 2a+4b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-25/2 \\ b=11/2 \end{cases} \Rightarrow \left[T(u_1)\right]_B = \begin{bmatrix} -25/2 \\ 11/2 \end{bmatrix}$$

Tương tự ta tìm được: $\left[T(u_2)\right]_B = \begin{bmatrix} -25 \\ 11 \end{bmatrix}$

Vậy ma trận cần tìm là: $A = \begin{bmatrix} -25/2 & -25 \\ 11/2 & 11 \end{bmatrix}$

Bài 2: Tìm ma trận của toán tử tuyến tính $T: R^3 \to R^3, T(x,y,z) = (x-y$

đối với cơ sở $B = \{u_1(1,0,1); u_2(0,1,1); u_3(1,1,0)\}$

Bài giải: Gọi A là ma trận cần tìm. Khi đó $A = \left[\left[T(u_1)\right]_B \quad \left[T(u_2)\right]_B \quad \left[T(u_3)\right]_B \right]$

$T(u_1) = T(1,0,1) = (1,-1,0); T(u_2) = T(0,1,1) = (-1,1,-1); T(u_3) = T(1,1,0) = (0,0,1)$

$T(u_1) = au_1 + bu_2 + cu_3 \Leftrightarrow (1,-1,0) = a(1,0,1) + b(0,1,1) + c(1,1,0) \Leftrightarrow (1,-1,0) = (a+c, b+c, a+b)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+c=1 \\ b+c=-1 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow T(u_1) = u_1 - u_2 + 0u_3 \Rightarrow \left[T(u_1)\right]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tương tự ta tìm được: $\left[T(u_2)\right]_B = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}; \quad \left[T(u_3)\right]_B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$

Vậy ma trận cần tìm là: $A = \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

Dạng 3: Tìm ánh xạ tuyến tính

Bài 1: Cho $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -10 \\ -5 & 6 & -5 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ là ma trận của toán tử tuyến tính $T: R^3 \to$

$B = \{u_1, u_2, u_3\} \subset R^3$. với $u_1 = (2, -1, 0)$, $u_2 = (-1, 1, -1)$, $u_3 = (1, 1, -2)$. Tìm $T(u_1)$

Bài giải:

$$A = \left(\left[T(u_1)\right]_B \quad \left[T(u_2)\right]_B \quad \left[T(u_3)\right]_B \right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -10 \\ -5 & 6 & -5 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left[T(u_1)\right]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$T(u_1) = -1u_1 - 5u_2 + 3u_3 = -(2, -1, 0) - 5(-1, 1, -1) + 3(1, 1, -2) = (6, -1,$

Bài 2: Biết $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -10\\ -5 & 6 & -5\\ 3 & -2 & 8\end{pmatrix}$ là ma trận của toán tử tuyến tính $T: R^3 \rightarrow$

$B=\{u_1,u_2,u_3\}\subset R^3$, với $u_1 = (2, -1, 0)$, $u_2 = (-1, 1, -1)$, $u_3 = (1, 1, -2)$. Tìm công thức x

Bài giải: $[T(u_1)]_B=\begin{bmatrix}-1\\ -5\\ 3\end{bmatrix}\Rightarrow T(u_1)=-1u_1-5u_2+3u_3=-(2,\ -1,\ 0)-5(-1,\ 1,\ -1)+3(1,\ 1,\ -2)=(6,-1,-1)$

$T(u_2)=0u_1+6u_2-2u_3=0(2,\ -1,\ 0)+6(-1,\ 1,\ -1)-2(1,\ 1,\ -2)=(-8,4,-2)$

$T(u_3)=-10u_1-5u_2+8u_3=-10(2,\ -1,\ 0)-5(-1,\ 1,\ -1)+8(1,\ 1,\ -2)=(-7,13,-11)$

$T: R^3\rightarrow R^3, T(x,y,z)=(ax+by+cz, dx+ey+fz, gx+hy+kz)$

$T(u_1)=T(2,-1,0)=(2a-b,2d-e,2g-h)=(6,-1,-1)$

$T(u_2)=T(1,1,-1)=(a+b-c,d+e-f,g+h-k)=(-8,4,-2)$

$T(u_3)=T(1,1,-2)=(a+b-2c,d+e-2f,g+h-2k)=(-7,13,-11)$

$\begin{cases}2a-b=6\\ a+b-c=-8\\ a+b-2c=-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=-8\\ c=-1\end{cases}$

$T(x,y,z)=(-x-8y-z,-2x-3y-9z,2x+5y+9z)$

Một số câu hỏi trắc nghiệm:

Câu 1: Cho ánh xạ $f: R^2\rightarrow R^3$ thoả mãn $f(x,y)=(x+3y,-x+y,2x-3y)$. Khi đó ma trận chính tắc của f có cột thứ 2 bằng:

A. $\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$. B. $\begin{bmatrix}3\\-1\\3\end{bmatrix}$. C. $\begin{bmatrix}3\\1\\-3\end{bmatrix}$. D. $\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$.

Đáp án C

Câu 2: Cho ánh xạ tuyến tính $T: R^2\rightarrow R^3$ xác định bởi $T(x,y)=(x+2y,x-y,2x+y)$ và 2 cơ sở $B=(u_1,u_2)\subset R^2$, $B'=(v_1,v_2,v_3)\subset R^3$ với $u_1=(1,2)$, $u_2=(2,-1)$, $v_1=(1,2,1)$, $v_2=(-2,1,2)$, $v_3=(0,1,1)$. Khi đó $[T(u_1)]_{B'}$ bằng:

A. $\begin{bmatrix}-15\\10\\39\end{bmatrix}$. B. $\begin{bmatrix}-15\\-10\\-39\end{bmatrix}$.

C. $\begin{bmatrix}-15\\39\\-10\end{bmatrix}$. D. $\begin{bmatrix}-15\\-10\\39\end{bmatrix}$.

Một số câu hỏi trắc nghiệm:

Câu 3: Cho ánh xạ tuyến tính $T: R^3\rightarrow R^2$ xác định bởi $T(x,y,z)=(y-2z,x+y)$ và cơ sở $B=\{$

$u_1=(2,-1,0)$, $u_2=(-1,1,-1)$, $u_3=(1,1,-2)$. Ma trận của T đối với các cơ sở B của R^3 và cơ sở chính t

A. $\begin{bmatrix}-1 & 3 & -5\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix}$. B. $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & 0\\ 5 & 2\end{bmatrix}$.

C. $\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$. D. $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & 4\\ -5 & 2\end{bmatrix}$.

Câu 4: Cho ma trận của toán tử tuyến tính $T: R^3\rightarrow R^3$ đối với cơ sở $B=\{u_1,u_2,u_3\}$ với $u_1=(2,3,0)$, $u_2=(-1,1,0)$, $u_3=(3,3,3)$ là $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 2 & -2\\ -2 & -4 & 2\end{bmatrix}$. Khi đó $T(u_1)$ là:

A. $(8,-1,2)$. B. $(-4,-3,-6)$.

C. $(3,-2,4)$. D. $(0,12,6)$.

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 14

MA TRẬN ĐỒNG DẠNG

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa ma trận đồng dạng: Giả sử A và B là hai ma trận vuông cùng cấp n. Ta nói A
nếu tồn tại một ma trận khả đảo P cấp n sao cho $A = P^{-1}BP$

Ma trận của toán tử tuyến tính thông qua phép đổi cơ sở:

Giả sử T là một toán tử tuyến tính trong không gian n chiều V. Nếu A và A' tương ứng là các
của T đối với các cơ sở B và B' thì $A' = P^{-1}AP$, trong đó P là ma trận chuyển cơ sở từ B sang

B – BÀI TẬP

Bài 1: Chứng minh các khẳng định sau:

a) Nếu ma trận A đồng dạng với ma trận B thì B đồng dạng với A.

b) Nếu ma trận A đồng dạng với ma trận B, ma trận B đồng dạng với ma trận
thì A đồng dạng với C.

Bài giải: a) Ma trận A đồng dạng với ma trận B, nên tồn tại ma trận P sao cho $A=P^{-1}B$

Khi đó: $PAP^{-1}=P\left(P^{-1}BP\right)P^{-1}=PP^{-1}BPP^{-1}=I.B.I=B$

Đặt $Q=P^{-1}\Rightarrow B=PAP^{-1}=Q^{-1}AQ$. Vậy ma trận B đồng dạng với ma trận A.

b) Ma trận A đồng dạng với ma trận B, nên tồn tại ma trận P sao cho $A=P^{-1}BP$

Ma trận B đồng dạng với ma trận C, nên tồn tại ma trận Q sao cho $B=Q^{-1}CQ$

Khi đó: $A=P^{-1}BP=P^{-1}\left(Q^{-1}CQ\right)P=\left(P^{-1}Q^{-1}\right)C(QP)=(QP)^{-1}C(QP)$

Đặt $R=QP\Rightarrow A=R^{-1}CR$, vậy A đồng dạng với C.

Bài 2: Chứng minh rằng nếu ma trận khả nghịch A đồng dạng với ma
ma trận B cũng khả nghịch và A^{-1} đồng dạng với B^{-1}.

Bài giải: Ma trận A đồng dạng với ma trận B, nên tồn tại ma trận P sao cho $A = P^{-1}BP$

$$A = P^{-1}BP \Rightarrow \det(A) = \det(P^{-1}BP)$$

$$= \det(P^{-1})\det(B)\det(P) = \det(B)\det(P^{-1})\det(P) = \det(B)\det(P^{-1}P) = \det(B$$

A là ma trận khả nghịch nên $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \det(B) \neq 0$ Vậy B là ma trận khả nghịch.

$$A = P^{-1}BP \Rightarrow A^{-1} = (P^{-1}BP)^{-1} = P^{-1}.(P^{-1}B)^{-1} = P^{-1}.B^{-1}.(P^{-1})^{-1} = P^{-1}.B^{-1}.P$$

Vậy A^{-1} đồng dạng với B^{-1}

Bài 3: Chứng minh rằng nếu ma trận A đồng dạng với ma trận B thì A
tổng quát A^n sẽ đồng dạng với B^n.

Bài giải: Ma trận A đồng dạng với ma trận B, nên tồn tại ma trận P sao cho A =

$$A^2 = (P^{-1}BP)^2 = (P^{-1}BP)(P^{-1}BP) = P^{-1}BP.P^{-1}BP = P^{-1}B^2P$$

Vậy A^2 đồng dạng với B^2.

$$A^3 = A^2.A = P^{-1}B^2P.P^{-1}BP = P^{-1}B^3P$$

$$A^{n-1} = P^{-1}B^{n-1}P \Rightarrow A^n = A^{n-1}.A = P^{-1}B^{n-1}P.P^{-1}BP = P^{-1}B^nP$$

Do vậy A^n đồng dạng với B^n.

Bài 4: Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
Hãy tìm A^{10}.

Bài giải: $A = P^{-1}BP \Rightarrow A^{10} = (P^{-1}BP)^{10} = (P^{-1}BP).(P^{-1}BP).(P^{-1}BP).....(P^{-1}BP) = P^{-1}B^{10}P$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix} \qquad B^3 = B^2.B = \begin{bmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{bmatrix}$$

$$B^{n-1} = \begin{bmatrix} 1^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow B^n = B^{n-1}.B = \begin{bmatrix} 1^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

$$B^{10} = \begin{bmatrix} 1^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{bmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2^{10} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-2^{10} & 2^{10} \end{bmatrix}$$

Bài 5: Cho toán tử tuyến T: $R^2 \to R^2$ xác định bởi $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2,$
Tìm ma trận của T ứng với cơ sở B' = $\{u_1, u_2\}$ với $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (1, 2)$

Bài giải:

Cách 1: Gọi A_1 là ma trận cần tìm. Khi đó $A_1 = \left[[T(u_1)]_{B'} \quad [T(u_2)]_{B'} \right]$

$$T(u_1) = T(1,1) = (2,2); \quad T(u_2) = T(1,2) = (3,6)$$

$$T(u_1) = au_1 + bu_2 \Leftrightarrow (2,2) = a(1,1) + b(1,2) \Leftrightarrow (2,2) = (a+b, a+2b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a+2b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(u_1) = 2u_1 + 0u_2 \Rightarrow [T(u_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tương tự ta tìm được $[T(u_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

Vậy ma trận của T đối với cơ sở B' là: $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Bài 5: Cho T: $R^2 \to R^2$ xác định bởi $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, -2x_1 + 4x_2)$. Tìm
ứng với cơ sở B' = $\{u_1, u_2\}$ với $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (1, 2)$ bằng hai cách.

Bài giải:

Cách 2: Cơ sở chính tắc trong R^2 là B = $\{e_1, e_2\}$ với $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Ma trận chính tắc của

Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang B':

Ta có $u_1 = 1.e_1 + 1.e_2$, $u_2 = 1.e_1 + 2.e_2$, nên ma trận chuyển từ B sang B' là $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_1 = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận của T đối với cơ sở B' là: $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Bài 6: Tìm ma trận của toán tử tuyến tính $T: P_1(x) \to P_1(x), T(a+bx) = (a$
$B = \{p_1 = 6+3x; p_2 = 10+2x\}$, rồi suy ra ma trận của T đối với cơ sở $B' = \{q_1 = 2; q_2 = 3+2x\}$

Bài giải: Gọi A là ma trận của T đối với cơ sở B. Khi đó $A = \left[[T(p_1)]_B \quad [T(p_2)]_B \right]$

$$T(p_1) = T(6+3x) = 9+3x; \quad T(p_2) = T(10+2x) = 12+2x$$

$$T(p_1) = ap_1 + bp_2 \Leftrightarrow 9+3x = a(6+3x) + b(10+2x) \Leftrightarrow 9+3x = (6a+10b) + (3a+2b)x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a+10b=9 \\ 3a+2b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2/3 \\ b=1/2 \end{cases} \Rightarrow T(p_1) = \frac{2}{3}p_1 + \frac{1}{2}p_2 \Rightarrow [T($$

Tương tự ta tìm được $[T(p_2)]_B = \begin{bmatrix} -2/9 \\ 4/3 \end{bmatrix}$ Vậy ma trận của T đối với cơ sở B là: $A = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/9 \\ 1/2 & 4/3 \end{bmatrix}$

Gọi A' là ma trận của T đối với cơ sở B', khi đó $A' = P^{-1}AP$, trong đó P là ma trận chuyển từ cơ sở B s

$$q_1 = -\frac{2}{9}p_1 + \frac{1}{3}p_2 \Rightarrow [q_1]_B = \begin{bmatrix} -2/9 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} -2/9 & 7/9 \\ 1/3 & -1/6 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & 7/2 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \frac{7}{9}p_1 - \frac{1}{6}p_2 \Rightarrow [q_2]_B = \begin{bmatrix} 7/9 \\ -1/6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vậy } A' = \begin{bmatrix} 3/4 & 7/2 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2/3 & -2/9 \\ 1/2 & 4/3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -2/9 & 7/9 \\ 1/3 & -1/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bài 7: Giả sử $A=\begin{bmatrix}1&3&0\\3&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$ là ma trận chính tắc của toán tử tuyến tính T

Hãy tìm ma trận của T đối với cơ sở $B=\{u_1(1,1,0);u_2(1,-1,0);u_3(0,0,1)\}$

Bài giải:

Gọi A_1 là ma trận của T đối với cơ sở B. Khi đó $A_1=P^{-1}AP$, với P là ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc của R^3 sang cơ sở B.

$$B=\{u_1(1,1,0);u_2(1,-1,0);u_3(0,0,1)\}\Rightarrow P=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \qquad P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A_1=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&0\\3&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 15

TRỊ RIÊNG VÀ VÉC TƠ RIÊNG CỦA MA TRẬN VUÔNG

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 15

TRỊ RIÊNG VÀ VÉC TƠ RIÊNG CỦA MA TRẬN VUÔNG

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa:

Cho ma trận A vuông cấp n. Số thực λ được gọi là trị riêng của ma trận vuông A nếu phương trình $Ax=\lambda x, x\in R^n$ có nghiệm $x\neq\theta$

Véc tơ $x\neq\theta$ được gọi là véc tơ riêng ứng với trị riêng λ

Cách tìm trị riêng và véc tơ riêng của ma trận vuông A cấp n:

+ Tìm trị riêng của ma trận vuông A ta đi giải phương trình đặc trưng của A là:

$$\det(A-\lambda I)=0$$

(Đa thức $\det(A-\lambda I)$ được gọi là đa thức đặc trưng của A)

Nếu $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{bmatrix}$ thì $A-\lambda I=\begin{bmatrix}a_{11}-\lambda&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}-\lambda&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}-\lambda\end{bmatrix}$

+ Tìm véc tơ riêng: Với mỗi trị riêng λ tìm được, giải hệ $(A-\lambda I)x=\theta$ và tìm nghiệm $x\neq\theta$ của hệ đó.

Không gian nghiệm của phương trình $(A-\lambda I)x=\theta$ được gọi là không gian riêng của A ứng với trị riêng λ

Ta có $(A-\lambda I)x=\theta$ là hệ:

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\dots+a_{1n}x_n=0\\\dots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0\end{cases}$$

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 15

TRỊ RIÊNG VÀ VÉC TƠ RIÊNG CỦA MA TRẬN VUÔNG

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1: Tìm trị riêng của ma trận vuông

Bài 1. Tìm đa thức đặc trưng của các ma trận sau:

$$a, A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix} \qquad b, B=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 1\\ -3 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Bài giải:

a, Đa thức đặc trưng của ma trận A là:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\ -1 & 0-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(0-\lambda)+2=\lambda^2-3\lambda+2$$

b, Đa thức đặc trưng của ma trận B là:

$$\det(B-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & -1\\ 1 & 3-\lambda & 1\\ -3 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda)+2-[3(3-\lambda)+($$

$$=(3-\lambda)(\lambda^2-4)$$

Bài 2. Tìm trị riêng của các ma trận sau:

$$a,\ A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix} \qquad b,\ B=\begin{bmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{bmatrix}$$

Bài giải:

a) Phương trình đặc trưng của A: $\det(A-\lambda I)=0$

$$\leftrightarrow\begin{vmatrix}3-\lambda & 0\\ 8 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0\leftrightarrow(3-\lambda)(-1-\lambda)=0\leftrightarrow\lambda_1=-1,$$

Vậy ma trận A có 2 trị riêng: $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$

b, Phương trình đặc trưng của B: $\det(B-\lambda I)=0$

$$\leftrightarrow\begin{vmatrix}4-\lambda & -5 & 2\\ 5 & -7-\lambda & 3\\ 6 & -9 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0\leftrightarrow\lambda^2(-\lambda+1)=0\ \leftrightarrow\lambda_1=$$

Vậy ma trận B có 2 trị riêng: $\lambda_1=0,\lambda_2=1$

Dạng 2: Tìm véc tơ riêng của ma trận vuông (Tìm cơ sở của không gia

Bài 1: Tìm cơ sở của không gian riêng của các ma trận sau:

$$a,\ A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix} \qquad b,\ B=\begin{bmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{bmatrix}$$

Bài giải:

a, Ta có (từ ví dụ 2 – Dạng 1): Ma trận A có 2 trị riêng: $\lambda_1=-1,\lambda_2=3$

+) Véc tơ riêng ứng với trị riêng $\lambda_1=-1$ là $x=(x_1;x_2)$ thỏa mãn $(A-(-1)I)x=\theta$

$$\leftrightarrow\begin{bmatrix}3-(-1) & 0\\ 8 & -1-(-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}4 & 0\\ 8 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{cases}4x_1=0\\ 8x_1=0\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2\in\end{cases}$$

Từ đó ta có: $x=(x_1;x_2)=(0;x_2)=x_2(0;1)$

Vậy ứng với trị riêng $\lambda_1=-1$ có một véc tơ riêng độc lập tuyến tính là (0; 1)

Không gian riêng tương ứng là không gian con của R^2 có số chiều bằng 1 và nh

véc tơ (0; 1) làm cơ sở.

+) Véc tơ riêng ứng với trị riêng $\lambda_2=3$ là $x=(x_1;x_2)$ thỏa mãn $(A-3I)$

$$\leftrightarrow\begin{bmatrix}0 & 0\\ 8 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{cases}0x_1=0\\ 8x_1-4x_2=0\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}x_1\in\mathbb{R}\\ x_2=2x_1\end{cases}$$

Từ đó ta có: $x=(x_1;x_2)=(x_1;2x_1)=x_1(1;2)$

Vậy ứng với trị riêng $\lambda_2=3$ có một véc tơ riêng độc lập tuyến tính là (1; 2).

Không gian riêng tương ứng là không gian con của R^2 có số chiều bằng 1 và nhận véc tơ (1; 2) làm cơ sở.

b, Ta có (từ bài 2 – Dạng 1): Ma trận B có 2 trị riêng: $\lambda_1=0,\lambda_2=1$

+) Véc tơ riêng ứng với trị riêng $\lambda_1=0$ là $x=(x_1;x_2;x_3)$ thỏa mãn:

$$(B-0.I)x=\theta$$

$$\leftrightarrow\begin{bmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{cases}4x_1-5x_2+2x_3=0\\ 5x_1-7x_2+3x_3=0\\ 6x_1-9x_2+4x_3=0\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}x_1\in R\\ x_2=2x_1\\ x_3=3x_1\end{cases}$$

Từ đó ta có: $x=(x_1;x_2;x_3)=(x_1;2x_1;3x_1)=x_1(1;2;3)$

Vậy ứng với trị riêng $\lambda_1=0$ có một véc tơ riêng độc lập tuyến tính là (1; 2; 3).

Không gian riêng tương ứng là không gian con của R^3 có số chiều bằng 1 và nhận véc tơ (1; 2; 3) làm cơ sở.

+) Véc tơ riêng ứng với trị riêng $\lambda_2=1$ là $x=(x_1;x_2;x_3)$ thỏa mãn $(B-1.$

$$\leftrightarrow\begin{bmatrix}3 & -5 & 2\\ 5 & -8 & 3\\ 6 & -9 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{cases}3x_1-5x_2+2x_3=0\\ 5x_1-8x_2+3x_3=0\\ 6x_1-9x_2+3x_3=0\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=x_3\\ x_3\in R\end{cases}$$

Từ đó ta có: $x=(x_1;x_2;x_3)=(x_1;x_1;x_1)=x_1(1;1;1)$

Vậy ứng với trị riêng $\lambda_2=1$ có một véc tơ riêng độc lập tuyến tính là (1;1;1).

Không gian riêng tương ứng là không gian con của R^3 có số chiều bằng 1 và nhận véc tơ (1; 1; 1) làm cơ sở.

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Ma trận $A=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ -3 & 4\end{bmatrix}$ có các trị riêng là

A. $\lambda_1=-3;\lambda_2=4$ B. $\lambda_1=-3;\lambda_2=0$

C. $\lambda_1=0;\lambda_2=4$ D. Đáp án khác

Đáp án: A

Câu 2: Ma trận nào sau đây có trị riêng là $\lambda_1=1;\lambda_2=2$

A. $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ B. $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

C. $C=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ D. Cả 3 đáp án trên

Đáp án: D

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 3: Ma trận $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ có các trị riêng là

A. $\lambda=-2$ B. $\lambda_1=2;\lambda_2=2;\lambda_3=0$

C. $\lambda_1=1;\lambda_2=2$ D. Đáp án A và C

Đáp án: C

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 16

CHÉO HÓA MA TRẬN

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 16

CHÉO HÓA MA TRẬN

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN

- **Định nghĩa:** Cho ma trận vuông A cấp n, nếu tồn tại ma trận khả đảo P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo thì A *được gọi là chéo hoá được* và P được gọi là ma trận làm chéo hoá ma trận A.

- **Điều kiện để ma trận vuông A chéo hóa được:**

+) Điều kiện cần và đủ để ma trận A vuông cấp n chéo hoá được là nó có n véc tơ riêng độc lập tuyến tính.

+) Điều kiện đủ để ma trận A vuông cấp n chéo hóa được là có n trị riêng khác nhau.

- **Quy trình chéo hóa ma trận:**

+) Tìm các trị riêng λ_k và các véc tơ riêng độc lập tuyến tính tương ứng p_k, k = 1..n.

+) Lập ma trận P = $[p_1, p_2, ..., p_n]$, tức $p_1, p_2, ..., p_n$ là các cột của P.

+) Lập B = $P^{-1}AP$, là ma trận chéo với các phần tử chéo liên tiếp là $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 16

CHÉO HÓA MA TRẬN

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1: Chứng minh một ma trận không chéo hóa được

Bài 1. Chứng minh rằng ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ không chéo hóa được.

Bài giải:

Điều kiện cần và đủ để ma trận vuông cấp n chéo hoá được là nó có n véc tơ ri... lập tuyến tính. Như vậy nếu ma trận A cấp n không có đủ n véc tơ riêng độc lập tuyến ... nó không chéo hóa được.

+) Tìm trị riêng: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0 \leftrightarrow \lambda = 2$

+) Tìm véc tơ riêng: ứng với trị riêng $\lambda = 2$ ta có hệ $(A - 2.I)x = \theta$

$$\leftrightarrow \begin{cases} (2-2)x_1 + 0x_2 = 0 \\ x_1 + (2-2)x_2 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 \in R \end{cases}$$ Ta có: $x = (x_1; x_2) = (0; x_2) = ...$

Ứng với trị riêng $\lambda = 2$ có 1 véc tơ riêng độc lập tuyến tính là (0, 1).

Vậy: Ma trận A chỉ có một véc tơ riêng độc lập tuyến tính nên không chéo h...

Dạng 2. Tìm ma trận P làm chéo hóa ma trận A

Bài 1. Tìm ma trận P làm chéo hóa ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Bài giải:

+) Tìm trị riêng: $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & -2 \\ -3 & 4-\lambda & 0 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \quad \leftrightarrow \lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = ...$

+) Tìm véc tơ riêng:

- Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 1$ ta có hệ phương trình $(A - I)x = \theta$

$$\leftrightarrow \begin{cases} (-1-1)x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ -3x_1 + (4-1)x_2 + 0x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + (3-1)x_3 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 \in R \end{cases}$$

Ta có $x = (x_1; x_2; x_3) = (x_3; x_3; x_3) = x_3(1; 1; 1)$

Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 1$ có 1 véc tơ riêng độc lập tuyến tính là p_1= (1, 1, 1).

- Ứng với trị riêng $\lambda_2 = 2$ ta có hệ phương trình $(A - 2.I)x = \theta$

$$\leftrightarrow \begin{cases} (-1-2)x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ -3x_1 + (4-2)x_2 + 0x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + (3-2)x_3 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 \in R \end{cases}$$

Ta có có $x = (x_1; x_2; x_3) = \left(\frac{2}{3}x_3; x_3; x_3\right) = \frac{1}{3}x_3(2; 3; 3)$

Ứng với trị riêng $\lambda_2 = 2$ có 1 véc tơ riêng độc lập tuyến tính là p_2= (2, 3, 3).

- Ứng với trị riêng $\lambda_3 = 3$ ta có hệ phương trình $(A - 3.I)x = \theta$

$$\leftrightarrow \begin{cases} (-1-3)x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ -3x_1 + (4-3)x_2 + 0x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + (3-3)x_3 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 \in R \\ x_2 = 3x_1 \\ x_3 = 4x_1 \end{cases}$$

Ta có $x = (x_1; x_2; x_3) = (x_1; 3x_1; 4x_1) = x_1(1; 3; 4)$

Ứng với trị riêng $\lambda_3 = 3$ có 1 véc tơ riêng độc lập tuyến tính là p_3= (1, 3, 4).

Vậy: Ma trận P làm chéo hóa ma trận A là:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{Khi đó: } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là đúng

A. Ma trận vuông A được gọi là chéo hoá được, nếu tồn tại ma trận khả đảo P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo.

B. Ma trận vuông A được gọi là chéo hoá được, nếu tồn tại ma trận P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận khả đảo.

C. Đáp án A và B

D. Ma trận vuông A được gọi là chéo hoá được, nếu tồn tại ma trận P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận trực giao.

Đáp án: A

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 2: Điều kiện cần và đủ để ma trận vuông cấp n chéo hoá được là:

A. Ma trận đó có n trị riêng.

B. Ma trận đó có n véc tơ riêng độc lập tuyến tính.

C. Ma trận đó có n trị riêng phân biệt.

D. Đáp án B và C.

Đáp án: B

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 17

CHÉO HÓA TRỰC GIAO

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 17

CHÉO HÓA TRỰC GIAO

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN

- **Định nghĩa:** Cho ma trận vuông A cấp n, nếu tồn tại ma trận trực giao P sao cho $P^{-1}AP$ là ma trận chéo thì A được gọi là chéo hoá trực giao được và P được gọi là ma trận làm chéo hoá trực giao ma trận A.

- **Điều kiện để ma trận vuông A chéo hóa trực giao được:**

+) Điều kiện cần và đủ để ma trận vuông cấp n chéo hoá trực giao được là nó có n véc tơ riêng trực chuẩn

+) Ma trận vuông cấp n chéo hóa trực giao được khi và chỉ khi nó là ma trận đối xứng.

- **Quy trình chéo hóa trực giao ma trận đối xứng:**

+) Tìm các trị riêng λ_k và một cơ sở cho mỗi không gian riêng của ma trận đối xứng A

+) Áp dụng quá trình trực chuẩn hóa Gram – Schmidt vào mỗi cơ sở đó để được một cơ sở trực chuẩn cho mỗi không gian riêng

+) Lập ma trận P mà các cột của nó là các véc tơ cơ sở đã được trực chuẩn hóa, đó chính là ma trận làm chéo hóa trực giao ma trận đối xứng A.

CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Chuyên đề 17

CHÉO HÓA TRỰC GIAO

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng 1: Chéo hóa trực giao ma trận

Bài 1: Tìm ma trận P làm chéo hóa trực giao ma trận A và xác định $P^{-1}AP$

a) $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ b) $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{bmatrix}$

Bài giải:

a) +) Tìm trị riêng và cơ sở của không gian riêng

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1^2=0 \leftrightarrow \lambda=2, \lambda=4$$

- Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 2$ ta có hệ phương trình $(A-2I)x = \theta$

$$\leftrightarrow \begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_1+x_2=0\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}x_1=-x_2\\ x_2\in R\end{cases}$$ Ta có $x=(x_1;x_2)=(-x_2;x_2)=x_2(-1;1)$

Vậy không gian riêng ứng với $\lambda_1 = 2$ có cơ sở là $\{p_1=(-1, 1)\}$

- Ứng với trị riêng $\lambda_2 = 4$ ta có hệ phương trình $(A-4I)x = \theta$

$$\leftrightarrow \begin{cases}-x_1+x_2=0\\ x_1-x_2=0\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}x_1=x_2\\ x_2\in R\end{cases}$$ Ta có $x=(x_1;x_2)=(x_2;x_2)=x_2(1;1)$

Vậy không gian riêng ứng với $\lambda_2 = 4$ có cơ sở là $\{p_2=(1, 1)\}$

+) Áp dụng quá trình trực chuẩn hóa Gram – Schmidt vào mỗi cơ sở:

- Trực chuẩn hóa véc tơ p_1: $v_1=\frac{p_1}{\|p_1\|}=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

- Trực chuẩn hóa véc tơ p_2: $v_2=\frac{p_2}{\|p_2\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

+) Vậy ma trận P làm chéo hóa trực giao ma trận A là:

$P=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$ Khi đó: $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$

b) +) Tìm trị riêng và cơ sở của không gian riêng

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 4-\lambda & 2\\ 2 & 2 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(8-\lambda)=0 \leftrightarrow \lambda=2, \lambda=8$$

- Ứng với trị riêng $\lambda_1 = 2$ ta có hệ phương trình $(A-2I)x = \theta$

$$\leftrightarrow \begin{cases}(4-2)x_1+2x_2+2x_3=0\\ 2x_1+(4-2)x_2+2x_3=0\\ 2x_1+2x_2+(4-2)x_3=0\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}x_1=-x_2-x_3\\ x_2\in R\\ x_3\in R\end{cases}$$

Ta có $x=(x_1;x_2;x_3)=(-x_2-x_3;x_2;x_3)=x_2(-1;1;0)+x_3(-1;0;1)$

Vậy không gian riêng ứng với $\lambda_1 = 2$ có cơ sở là $\{p_1=(-1,1,0); p_2=(-1, 0, 1)\}$

Trực chuẩn hóa các véc tơ của cơ sở trên là: $v_1=\frac{p_1}{\|p_1\|}=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)$

$a_2=p_2-\langle p_2,v_1\rangle.v_1=(-1,0,1)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)=\left(\frac{-1}{2};\frac{-1}{2};1\right)$ $v_2=\frac{a_2}{\|a_2\|}$

- Ứng với trị riêng $\lambda_2 = 8$ ta có hệ phương trình $(A-8I)x = \theta$

$$\leftrightarrow \begin{cases}(4-8)x_1+2x_2+2x_3=0\\ 2x_1+(4-8)x_2+2x_3=0\\ 2x_1+2x_2+(4-8)x_3=0\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}x_1=x_2\\ x_2=x_3\\ x_3\in R\end{cases}$$

Ta có $x=(x_1;x_2;x_3)=(x_3;x_3;x_3)=x_3(1;1;1)$

Vậy không gian riêng ứng với $\lambda_2 = 8$ có cơ sở là $\{p_3=(1,1,1)\}$

Trực chuẩn hóa véc tơ của cơ sở trên là: $v_3=\frac{p_3}{\|p_3\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

+) Vậy ma trận P làm chéo hóa trực giao ma trận A là:

$P=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$ Khi đó: $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{bmatrix}$

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Điều kiện cần và đủ để ma trận A vuông cấp n chéo hoá trực giao được là:

A. Ma trận A có n véc tơ riêng độc lập tuyến tính.

B. Ma trận A có n véc tơ riêng trực chuẩn.

C. Ma trận A có n véc tơ riêng.

D. Ma trận A có n trị riêng

Đáp án: B

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 2: Ma trận nào sau đây chéo hoá trực giao được:

$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}3 & -2 & -1\\ 2 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

A. Ma trận A và ma trận C

B. Ma trận B

C. Không ma trận nào

D. Cả 3 ma trận A, B, C.

Đáp án: A

III. KẾT LUẬN

Đề tài xây dựng video các chuyên đề Đại số tuyến tính có ý nghĩa quan trọng trong việc nâng cao chất lượng đào tạo sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp. Bên cạnh đó, hệ thống video các chuyên đề là tài liệu tham khảo giúp sinh viên có thể ôn lại bài giảng khi học trực tiếp trên lớp. Đề tài đã xây dựng 17 chuyên đề theo đề cương học phần Đại số tuyến tính trên phần mềm Powerpiont, sau đó tiến hành quay 21 video với thời gian mỗi video phù hợp.

Đề tài có ý nghĩa quan trọng đối với quá trình chuyển đổi số của Nhà trường, là tài liệu quan trọng phục vụ chương trình đào tạo từ xa, giảng dạy và học tập môn Xác suất Thống kê trong trường Đại học kỹ thuật Công nghiệp.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Larson, Edwards, Falvo (2009), Elementary Linear Algebra 6th edition, Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company.

[2] Ôn Ngũ Minh (2012), Bài giảng toán 1, Đại học KTCN Thái Nguyên.

[3] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2004), Toán học cao cấp Tập 1- NXB Giáo dục 2004.

[4] Nguyễn Đình Trí , Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh- Bài tập Toán học cao cấp tập 1- NXB Giáo dục, 2004

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

THUYẾT MINH
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP TRƯỜNG
NĂM 2022

TÊN ĐỀ TÀI

XÂY DỰNG VIDEO
CÁC CHUYÊN ĐỀ ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

MÃ SỐ: T2022-VD17

Chủ nhiệm đề tài: ThS. Phạm Thị Thu

THÁI NGUYÊN, NĂM 2022

THUYẾT MINH ĐỀ TÀI
KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP TRƯỜNG NĂM 2022

1. TÊN ĐỀ TÀI: Xây dựng Video các chuyên đề Đại số tuyến tính	2. MÃ SỐ: T2022-VD17
3. LĨNH VỰC NGHIÊN CỨU Khoa học Tự nhiên [x] Khoa học Kỹ thuật và Công nghệ [ ] Khoa học Y, dược [ ] Khoa học Nông nghiệp [ ] Khoa học Xã hội [ ] Khoa học Nhân văn [ ]	4. LOẠI HÌNH NGHIÊN CỨU Cơ bản [ ] Ứng dụng [ ] Triển khai [x]

5. THỜI GIAN THỰC HIỆN DỰ KIẾN: 12 tháng

Từ tháng 04 năm 2022 đến tháng 04 năm 2023

6. CHỦ NHIỆM ĐỀ TÀI

Họ và tên: Phạm Thị Thu — Học vị: Thạc sỹ

Chức danh khoa học: — Năm sinh: 1988

Địa chỉ cơ quan: ĐH KTCN — Điện thoại di động: 0942392984

Điện thoại cơ quan: — Fax:

E-mail: phamthithu@tnut.edu.vn

7. NHỮNG THÀNH VIÊN THAM GIA NGHIÊN CỨU ĐỀ TÀI

TT	Họ và tên	Đơn vị công tác và lĩnh vực chuyên môn	Nội dung nghiên cứu cụ thể được giao	Chữ ký
1	Lê Bích Ngọc	Khoa KHCB – ĐH KTCN. Lĩnh vực chuyên môn: Toán học	Thiết kế power point chuyên đề 1,3	Ng
2	Vũ Hồng Quân	Khoa KHCB – ĐH KTCN. Lĩnh vực chuyên môn: Toán học	Thiết kế power point chuyên đề 2	Uf

8. ĐƠN VỊ PHỐI HỢP CHÍNH

Tên đơn vị trong và ngoài nước	Nội dung phối hợp nghiên cứu	Họ và tên người đại diện đơn vị

9. TỔNG QUAN TÌNH HÌNH NGHIÊN CỨU THUỘC LĨNH VỰC CỦA ĐỀ TÀI Ở TRONG VÀ NGOÀI NƯỚC

9.1. Trong nước *(phân tích, đánh giá tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực của đề tài ở Việt Nam, liệt kê danh mục các công trình nghiên cứu, tài liệu có liên quan đến đề tài được trích dẫn khi đánh giá tổng quan)*

- Học tập trực tuyến đã không còn xa lạ và đang bùng nổ mạnh mẽ trên thế giới cũng như ở Việt Nam. Hệ thống các video của lĩnh vực Toán học nói chung đang phát triển mạnh mẽ và rất được quan tâm trong giai đoạn hiện nay. Người học có thể dễ dàng tìm kiếm video các chuyên đề từ các nguồn khác nhau của internet.

- Các video chuyên đề về các nội dung kiến thức Đại số tuyến tính cũng đang được quan tâm trong giai đoạn hiện nay tuy nhiên số lượng video về lĩnh vực này chưa được nhiều và phong phú như các lĩnh vực khác của Toán học.

9.2. Ngoài nước *(phân tích, đánh giá tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực của đề tài trên thế giới, liệt kê danh mục các công trình nghiên cứu, tài liệu có liên quan đến đề tài được trích dẫn khi đánh giá tổng quan)*

9.3. Danh mục các công trình đã công bố thuộc lĩnh vực của đề tài của chủ nhiệm và những thành viên tham gia nghiên cứu (*họ và tên tác giả; bài báo; ấn phẩm; các yếu tố về xuất bản*)

a) Của chủ nhiệm đề tài

b) Của các thành viên tham gia nghiên cứu

(Những công trình được công bố trong 5 năm gần nhất)

10. TÍNH CẤP THIẾT CỦA ĐỀ TÀI

- Học tập và giảng dạy trực tuyến đang là lựa chọn và giải pháp phù hợp tại thời điểm dịch bệnh covid đang diễn biến phức tạp hiện nay. Học tập trực tuyến đem lại rất nhiều lợi ích đột phá so với cách học truyền thống nhờ tính tương thích cao, sự linh hoạt và cá nhân hóa. Người học giờ đây đóng vai trò trung tâm và chủ động của quá trình đào tạo, có thể học mọi lúc, mọi nơi. Tuy nhiên, hình thức học tập này chưa thực sự đạt được chất lượng như mong muốn do nhiều yếu tố chủ quan và khách quan như điều kiện về cơ sở vật chất, ý thức học tập của sinh viên, khó khăn trong việc quản lý sinh viên trong giờ học của giáo viên, …

- Học phần Đại số tuyến tính là một học phần được giảng dạy cho sinh viên năm nhất của trường ĐH KTCN. Nội dung kiến thức của học phần này được sử dụng nhiều trong các môn học chuyên ngành của sinh viên trong những năm học tiếp theo. Với mong muốn nâng cao chất lượng học tập cho sinh viên trường ĐH KTCN trong giai đoạn học online cũng như sau này. Đồng thời giúp các sinh viên không được học học phần Đại số tuyến tính trong khung chương trình của mình vẫn có thể tiếp cận với môn học này, nhóm nghiên cứu đề xuất đề tài: *"Xây dựng Video các chuyên đề Đại số tuyến tính"* để sinh viên có thể tiếp thu kiến thức tốt hơn khi xem các video sau mỗi buổi học cũng như ôn tập cuối kỳ.

11. MỤC TIÊU ĐỀ TÀI

- Nghiên cứu tìm hiểu cách xây dựng và biên tập video các chuyên đề.
- Xây dựng các video tóm tắt được các nội dung cơ bản và bài tập của học phần Đại số tuyến tính giúp cho sinh viên học tập tốt hơn học phần này.

12. ĐỐI TƯỢNG, PHẠM VI NGHIÊN CỨU

12.1. Đối tượng nghiên cứu: Xây dựng video các chuyên đề Đại số tuyến tính

12.2. Phạm vi nghiên cứu: Các nội dung dạy và học học phần Đại số tuyến tính tại trường ĐH Kỹ thuật Công nghiệp.

13. CÁCH TIẾP CẬN, PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

13.1. Cách tiếp cận: Thu thập thông tin – Luận cứ lý thuyết, thực tiễn – Phân tích, thảo luận – Kết luận, đề nghị.

13.2. Phương pháp nghiên cứu: Đề tài sử dụng các phương pháp nghiên cứu:

- Phương pháp nghiên cứu lý thuyết.
- Phương pháp thực nghiệm sư phạm.

14. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU VÀ TIẾN ĐỘ THỰC HIỆN

14.1. Nội dung nghiên cứu (***Mô tả chi tiết những nội dung nghiên cứu của đề tài***)

14.2. Tiến độ thực hiện

STT	Các nội dung, công việc thực hiện	Sản phẩm	Thời gian (bắt đầu-kết thúc)	Người thực hiện
1	Xây dựng thuyết minh đề tài, xây dựng đề cương cho các video các chuyên đề; nghiên cứu tìm hiểu các phần mềm thiết kế xây dựng video.	Báo cáo	04/2022-05/2022	Phạm Thị Thu
2	Xây dựng hệ thống video các chuyên đề 1, 2 của học phần Đại số tuyến tính.	Video	05/2022-08/2022	Phạm Thị Thu; Lê Bích Ngọc; Vũ Hồng Quân.
3	Xây dựng hệ thống video chuyên đề 3, 4 của học phần Đại số tuyến tính.	Video	08/2022-03/2023	Phạm Thị Thu; Lê Bích Ngọc;

4	Viết báo cáo, nghiệm thu	Báo cáo	03/2023-04/2023	Phạm Thị Thu

15. SẢN PHẨM

Stt	Tên sản phẩm	Số lượng	Yêu cầu chất lượng sản phẩm *(mô tả chi tiết chất lượng sản phẩm đạt được như nội dung, hình thức, các chỉ tiêu, thông số kỹ thuật,...)*
I	Sản phẩm khoa học (Các công trình khoa học sẽ được công bố: sách, bài báo khoa học, ..)		
1.1			
1.2			
...			
II	Sản phẩm đào tạo (cử nhân, thạc sĩ, tiến sĩ,...)		
2.1			
2.2			
...			
III	Sản phẩm ứng dụng		
3.1	Video các chuyên đề Đại số tuyến tính		
3.2			
...			

16. PHƯƠNG THỨC CHUYỂN GIAO KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU VÀ ĐỊA CHỈ ỨNG DỤNG

16.1. Phương thức chuyển giao

16.2. Địa chỉ ứng dụng

17. TÁC ĐỘNG VÀ LỢI ÍCH MANG LẠI CỦA KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

17.1. Đối với lĩnh vực giáo dục và đào tạo: tạo ra sản phẩm học thuật có chất lượng và có ý nghĩa thực tiễn trong dạy và học các học phần Toán cho sinh viên khối trường đại học .

17.2. Đối với lĩnh vực khoa học và công nghệ có liên quan: Phát triển hướng nghiên cứu đổi mới phương pháp dạy và học theo định hướng phát triển năng lực người học và đổi mới giáo dục trong thời đại 4.0.

17.3. Đối với phát triển kinh tế-xã hội: Tạo ra cở sở khoa học cho việc xây dựng và phát triển thương hiệu một trường đại học, cơ sở giáo dục nghề nghiệp cho đất nước trong thời đại công nghiệp hóa ngày nay.

17.4. Đối với tổ chức chủ trì và các cơ sở ứng dụng kết quả nghiên cứu: nâng cao chất lượng dạy và học trong quá trình đào tạo của trường ĐH Kỹ Thuật Công Nghiệp, giúp định hướng vai trò truyền thông ngày nay trong công cuộc xây dựng niềm tin của khách hàng vào cơ sở đào tạo nghề nghiệp.

18. KINH PHÍ THỰC HIỆN ĐỀ TÀI

Tổng kinh phí: 3,600,000đ

Bằng chữ: Ba triệu sáu trăm nghìn đồng chẵn.

(Dự toán chi tiết các mục chi đính kèm có xác nhận của các đơn vị liên quan.)

Ngày tháng năm 2022

Chủ nhiệm đề tài	**PHÒNG KHCN&HTQT**
ThS. Phạm Thị Thu	
HỘI ĐỒNG KHOA KHCB	**KT. HIỆU TRƯỞNG** **PHÓ HIỆU TRƯỞNG**
Nguyễn Văn Trường	BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN **PGS.TS. Vũ Ngọc Pi**

ĐVT: VNĐ

DỰ TOÁN KINH PHÍ ĐỀ TÀI KH&CN CẤP TRƯỜNG NĂM 2022

Tên đề tài: Xây dựng Video các chuyên đề Đại số tuyến tính

Chủ nhiệm đề tài: ThS. Phạm Thị Thu

Thành viên chính: ThS. Lê Bích Ngọc ; ThS. Vũ Hồng Quân

Thành viên:

ĐVT: VNĐ

STT	Nội dung	Dự toán			
1	***Mục chi tiền công lao động tham gia trực tiếp (1)***	**Người thực hiện**	**Số ngày công**	**Hệ số tiền công theo ngày (2)***	**Thành tiền**
1.1	Xây dựng thuyết minh đề tài. Nghiên cứu tìm hiểu các phần mềm thiết kế xây dựng video bài giảng.	Phạm Thị Thu	0,5	0,45	335.250
1.2	Xây dựng video gồm chuyên đề 1: Ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính; chuyên đề 2: Không gian véc tơ và không gian Euclid	Lê Bích Ngọc	1	0,3	447.000
		Vũ Hồng Quân	1	0,3	447.000
		Phạm Thị Thu	1	0,45	670.500
1,3	Xây dựng video gồm chuyên đề 3: Ánh xạ tuyến tính; chuyên đề 4: Trị riêng và véc tơ riêng	Lê Bích Ngọc	1	0,3	447.000
		Phạm Thị Thu	1	0,45	670.500
1,4	Viết báo cáo nghiệm thu	Phạm Thị Thu	0,5	0,45	335.250
	Tổng 1				**3.352.500**
2	***Chi mục khác***				
3,1	Photo, in ấn				**247.500**
	Tổng 2				**247.500**
	Tổng 1+2				**3.600.000**

Cơ quan chủ trì
KT. HIỆU TRƯỞNG
PHÓ HIỆU TRƯỞNG

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN ★

PGS.TS. Vũ Ngọc Pi

TRƯỞNG PHÒNG KHCN&HTQT

CHỦ NHIỆM ĐỀ TÀI

ThS. Phạm Thị Thu

TRƯỞNG PHÒNG KH - TC