ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

BÁO CÁO TỔNG KẾT

ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP TRƯỜNG

XÂY DỰNG NGÂN HÀNG VIDEO BÀI GIẢNG HỌC PHẦN GIẢI TÍCH 2

Mã số: T2022-VD19

Chủ nhiệm đề tài: ThS. Nguyễn Thị Huệ

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2023

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

BÁO CÁO TỔNG KẾT

ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP TRƯỜNG

XÂY DỰNG NGÂN HÀNG VIDEO BÀI GIẢNG HỌC PHẦN GIẢI TÍCH 2

Mã số: T2022-VD19

Xác nhận của tổ chức chủ trì	Chủ nhiệm đề tài
KT. HIỆU TRƯỞNG	*(ký, họ tên)*
PHÓ HIỆU TRƯỞNG	
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO · TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP · ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN	
PGS.TS. Vũ Ngọc Pi	Nguyễn Thị Huệ

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2023

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP
Đơn vị: Khoa KHCB&ƯD

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

1. Thông tin chung:

- Tên đề tài: **Xây dựng ngân hàng video bài giảng học phần Giải tích 2**
- Mã số: **T2022-VD19**
- Chủ nhiệm: ThS. Nguyễn Thị Huệ
- Cơ quan chủ trì: Đại học Kỹ thuật Công nghiệp
- Thời gian thực hiện: 04/2022 – 10/2023

2. Mục tiêu:

+ Xây dựng 44 video bài giảng lý thuyết cho học phần Giải tích 2.
+ Cung cấp một ngân hàng video bài giảng học phần Giải tích 2 dùng làm tài liệu học tập cho sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên.

3. Kết quả nghiên cứu:

Đề tài đã hoàn thành việc quay 44 video giảng dạy học phần Giải tích 2 dùng làm tư liệu tự học, tự nghiên cứu cho sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên.

4. Sản phẩm.

- Sản phẩm đào tạo: *không*
- Sản phẩm khoa học: *không*
- Sản phẩm ứng dụng: 44 video bài giảng học phần Giải tích 2

5. Hiệu quả và khả năng áp dụng

Kết quả nghiên cứu đã đáp ứng được mục tiêu nghiên cứu của đề tài: Cung cấp một ngân hàng video gồm 44 video bài giảng học phần Giải tích 2 dùng làm tài liệu học tập cho sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên..

6. Khả năng áp dụng và phương thức chuyển giao kết quả nghiên cứu

Kết quả của đề tài có thể dùng làm tài liệu học tập học phần Giải tích 2 cho giảng viên và sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên, giúp sinh viên có thể tự học trước bài học hoặc tự nghiên cứu, đào sâu kiến thức sau giờ học trên lớp, qua đó giúp các em hiểu và yêu thích môn học cũng như đạt kết quả tốt ở môn học này.

Ngày tháng năm 2023

Cơ quan chủ trì	Chủ nhiệm đề tài
KT.HIỆU TRƯỞNG	
PHÓ HIỆU TRƯỞNG	
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN	
PGS.TS. Vũ Ngọc Pi	**Nguyễn Thị Huệ**

THAI NGUYEN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Faculty of Fundamental Science

INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

1. General information:

Project title: Using linear algebra theory to solve some problems for analytic geometry, extreme of multivariable functions and problem of vibration.

Code number: T2022 – VD19.

Coordinator: MSc. Nguyễn Thị Huệ

Implementing institution: Thai Nguyen University of Technology.

Duration: from April 2022 to Otober 2023.

2. Objectives:

+ Compose 44 lectures in form of videos for the subject of Calculus 2.

+ Preparing a lecture bank in a subject of Calculus 2 used as learning materials for student at Thai Nguyen University of Technology.

3. Research results:

The project has completed recording 44 videos of teaching the subject of Calculus 2 to be used as self-study materials for students at Thai Nguyen University of Technology.

4. Products:

- Application products: a lecture bank for the course of Calculus 2

5. Effects:

The results of research sastify the objective of project: Preparing a lecture bank in a subject of Calculus 2 used as learning materials for student at Thai Nguyen University of Technology

6. Applicability and Transferred Method of the research results

The results of the Scientific project can be used as a document on the subject of Calculus 2 subject for lecturers and students at Thai Nguyen University of Technology, helping students to learn by themselves before the lesson or to research on their own knowledge after class, thereby helping them understand and love the subject as well as achieve good results in this subject.

MỤC LỤC

I. MỞ ĐẦU

1. TỔNG QUAN VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

Hiện nay với sự phát triển của internet và mạng xã hội, các em sinh viên có thể dễ dàng tìm kiếm được những video bài giảng về học phần Giải tích 2 trên Youtube hoặc những kênh khác, tuy nhiên bên cạnh những kênh bài giảng chất lượng thì cũng có nhiều kênh chưa được kiểm chứng về độ uy tín và chính xác. Hơn nữa, các video bài giảng mà các em tìm kiếm được cũng có thể không trùng khớp với nội dung kiến thức và yêu cầu của môn học Giải tích 2 đang được giảng dạy tại trường Đại học Kĩ thuật Công Nghiệp.

2. TÍNH CẤP THIẾT CỦA VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

Học phần Giải tích 2 là học phần toán dành cho sinh viên năm thứ 2 của trường Đại học Kĩ thuật công nghiệp có thời lượng 3 tín chỉ với khối lượng kiến thức rất lớn. Nếu sinh viên không tự khắc phục được những nhược điểm của việc học online thì đa số các em sẽ rất khó nắm vững kiến thức của học phần này. Vì vậy yêu cầu thực tiễn của việc dạy học online môn Giải tích 2 trong tình hình dịch bệnh Covid- 19 là các em sinh viên cần có thêm những kênh tự học khác ngoài giờ tham gia lớp học để có thể nắm vững kiến thức của môn học. Chúng tôi nhận thấy rằng việc học qua video bài giảng là một kênh tự học mang tính trực quan, sinh động và thuận lợi cho người dạy cũng như người học về thời gian. Do đó chúng tôi đề xuất xây dựng ngân hàng video bài giảng cho môn học Giải tích 2 nhằm cung cấp cho sinh viên một kênh tự học bổ ích, đồng thời ngân hàng video bài giảng cũng sẽ góp phần tạo điều kiện cho cả thầy, cô và sinh viên có nhiều thời gian thảo luận, trao đổi hơn trong những giờ lên lớp.

II. NỘI DUNG

1. TÓM TẮT ĐỀ TÀI

Đề tài hướng đến mục tiêu là xây dựng ngân hàng gồm 44 video bài giảng lý thuyết của học phần Giải tích 2 để dùng làm tài liệu học trực quan cho sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên.

- Đề tài gồm các mục nội dung cụ thể như sau:

Chương 1. Hàm nhiều biến

Chương 2. Tích phân bội

Chương 3. Tích phân đường và tích phân mặt

Chương 4. Phương trình vi phân

2. CHƯƠNG 1. HÀM SỐ NHIỀU BIẾN

Theo đề cương môn học Giải tích 2, nội dung của Chương 1 được chia thành các mục sau:

1.1. Hàm số nhiều biến số
1.2. Giới hạn và liên tục của hàm số nhiều biến số
1.3. Đạo hàm riêng
1.4. Vi phân
1.5. Đạo hàm của hàm hợp
1.6. Đạo hàm của hàm ẩn
1.7. Đạo hàm theo hướng
1.8. Đạo hàm và vi phân cấp cao
1.9. Bài toán cực trị không điều kiện
1.10. Bài toán cực trị có điều kiện
1.11. Bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Với các mục nội dung như trên, thì nhóm tác giả đã chia Chương 1 thành 11 video, với nội dung của từng video như sau:

<u>Video 1</u>. 1.1.Hàm số nhiều biến

<u>Video 2</u>. 1.2. Giưới hạn và sự liên tục của hàm số nhiều biến

<u>Video 3</u>. 1.3 Đạo hàm riêng

<u>Video 4</u>. 1.4. Vi phân

<u>Video 5</u>.

1.5. Đạo hàm của hàm hợp

1.6. Đạo hàm của hàm ẩn

<u>Video 6</u>. 1.7. Đạo hàm theo hướng

Video 7. 1.8.Đạo hàm cấp cao

Video 8. 1.8. Vi phân cấp cao

Video 9. 1.9. Bào toán cực trị không điều kiện

Video 10. 1.10.Bài toán cực trị có điều kiện

Video 11. 1.11.Bài toán tìm GTLN, GTNN

3. CHƯƠNG 2. TÍCH PHÂN BỘI

Theo đề cương môn học Giải tích 2, nội dung của Chương 2 được chia thành các mục sau:

2.1. Tích phân lặp
2.2. Tích phân kép
2.2.1. Khái niệm tích phân kép
2.2.2. Cách tính tích phân kép trong tọa độ đề các
2.2.3. Đổi biến trong tính tích phân kép
2.2.4. Tính tích phân kép trong tọa độ cực
2.2.5. Ứng dụng hình học của tích phân kép
2.2.6. Ứng dụng cơ học của tích phân kép
2.3. Tích phân bội 3
2.3.1. Khái niệm tích phân bội 3
2.3.2. Cách tính tích phân bội 3 trong tọa độ đề các
2.3.3. Đổi biến số tổng quát trong tính tích phân bội 3
2.3.4. Tính tích phân bội 3 trong hệ tọa độ trụ
2.3.5. Tính tích phân bội 3 trong hệ tọa độ cầu
2.3.6. Ứng dụng của tích phân bội 3

Với các mục nội dung như trên, nhóm tác giả đã chia chương 2 thành 14 video, với nội dung của từng video như sau:

Video 1. 2.1. Tích phân lặp

Video 2. 2.2.1. Khái niệm tích phân kép

Video 3. 2.2.2. Cách tính tích phân kép trong tọa độ đề các

Video 4. 2.2.2. Cách tính tích phân kép trong tọa độ đề các (tiếp)

Video 5. 2.2.3. Đổi biến trong tính tích phân kép

Video 6. 2.2.4. Tính tích phân kép trong tọa độ cực

Video 7. 2.2.5. Ứng dụng hình học của tích phân kép

Video 8. 2.2.6. Ứng dụng cơ học của tích phân kép

Video 9. 2.3.1. Khái niệm tích phân bội 3

Video 10. 2.3.2. Cách tính tích phân bội 3 trong tọa độ đề các

Video 11. 2.3.3. Đổi biến số tổng quát trong tính tích phân bội 3

Video 12. 2.3.4. Tính tích phân bội 3 trong hệ tọa độ trụ

Video 13. 2.3.5.Tính tích phân bội 3 trong hệ tọa độ cầu

Video 14. 2.3.6. Ứng dụng của tích phân bội 3

4. CHƯƠNG 3. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

Theo đề cương học phần Giải tích 2, nội dung của Chương 3 được chia thành các mục sau:

3.1. Tích phân đường loại 1

3.1.1. Định nghĩa

3.1.2. Cách tính

3.1.3. Trường hợp đường lấy tích phân là đường trong không gian

3.1.4. Ứng dụng của tích phân đường loại 1

3.2. Tích phân đường loại 2

3.2.1. Định nghĩa

3.2.2. Cách tính

3.2.3. Trường hợp đường lấy tích phân là đường trong không gian

3.2.4. Công thức Green- Green's theorem

3.2.5. Điều kiện để tích phân đường loại 2 không phụ thuộc vào đường lấy tích phân

3.2.6. Tính công của lực biến đổi

3.3. Tích phân mặt loại 1

3.3.1. Định nghĩa

3.3.2. Cách tính

3.3.3. Ứng dụng

3.4. Tích phân mặt loại 2

3.4.1. Khái niệm mặt định hướng

3.4.2. Định nghĩ tích phân mặt loại 2

3.4.3. Cách tính

3.4.4. Công thức Stokes

3.4.5. Công thức Ostrogradsky

Với các mục nội dung như trên, nhóm tác giả đã chia chương 3 thành 9 video, với nội dung của từng video như sau:

Video 1.

3.1.1. Định nghĩa

3.1.2. Cách tính

Video 2.

3.1.3. Trường hợp đường lấy tích phân là đường trong không gian

3.1.4. Ứng dụng của tích phân đường loại 1

Video 3.

3.2.1. Định nghĩa

3.2.2. Cách tính

Video 4.

3.2.3. Trường hợp đường lấy tích phân là đường trong không gian

3.2.4. Công thức Green- Green's theorem

Video 5.

3.2.5. Điều kiện để tích phân đường loại 2 không phụ thuộc vào đường lấy tích phân

3.2.6. Tính công của lực biến đổi

Video 6.

3.3.1. Định nghĩa

3.3.2. Cách tính

Video 7.

3.3.3. Ứng dụng

Video 8.

3.4.1. Khái niệm mặt định hướng

3.4.2. Định nghĩ tích phân mặt loại 2

Video 9.

3.4.3. Công thức Stokes

3.4.4. Công thức Ostrogradsky

5. CHƯƠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Theo đề cương học phần Giải tích 2, nội dung của Chương 4 được chia thành các mục sau:

4.1. Phương trình vi phân cấp 1

4.1.1. Đại cương về phương trình vi phân cấp 1

4.1.2. Phương trình với biến số phân ly

4.1.3. Phương trình thuần nhất

4.1.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

4.1.5. Phương trình Bernboulli

4.2. Phương trình vi phân cấp 2

4.2.1. Đại cương về phương trình vi phân cấp 2

4.2.2. Phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính có hệ số không đổi

4.3. Hệ phương trình vi phân

Với các mục nội dung như trên, nhóm tác giả đã chia chương 4 thành 10 video, với nội dung của từng video như sau:

Video 1. 4.1.1. Đại cương về phương trình vi phân cấp 1

Video 2. 4.1.2. Phương trình với biến số phân ly

Video 3. 4.1.3. Phương trình thuần nhất

Video 4. 4.1.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Video 5. 4.1.5. Phương trình Bernoulli

Video 6. 4.2.1. Đại cương về phương trình vi phân cấp 2

Video 7. 4.2.2. Phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính có hệ số không đổi

Video 8. 4.2.2. Phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính có hệ số không đổi (tiếp)

Video 9. 4.2.2. Phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính có hệ số không đổi (tiếp)

Video 10. 4.3. Hệ phương trình vi phân

6. NỘI DUNG CÁC VIDEO

Nội dung của từng video được trình bày trên bài giảng powerpoint như sau:

2. CHƯƠNG 1. HÀM NHIỀU BIẾN

Chương 1. ĐẠO HÀM RIÊNG

1.1. Hàm nhiều biến

Ví dụ về hàm 2 biến trong thực tế:

- Nhiệt độ của trái đất tại 1 điểm trên bề mặt tại thời điểm bất kì phụ thuộc kinh độ x và vĩ độ y của điểm đó. Tức T= f(x,y)
- Thể tích V của hình trụ tròn phụ thuộc bán kính đáy r và chiều cao h của nó. Vì vậy V là hàm của 2 biến r và h. $V(r,h)=\pi r^2 h$

a. ĐN: Một hàm của n biến là quy tắc

$$f: R^n \to R$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

+ Tập xác định của f là tập $D=\{(x_1,\ldots,x_n)\in R^n\}\subset R^n$ làm cho $f(x_1, \ldots, x_n)$ có nghĩa.

+ Tập giá trị của hàm f là tập tất cả các giá trị mà hàm f có thể nhận khi $(x_1, \ldots, x_n)\in D$

+ Khi n=2 → hàm 2 biến $f: R^2 \to R$
$$(x,y)\mapsto z=f(x,y)$$

Ví dụ: $z=f(x,y)= x^2+xy+3y$

+ Khi n=3 → hàm 3 biến u=f(x,y,z) (Ví dụ: u=xy+cosxyz)

Ví dụ 1. Tính giá trị f(3, 2) và tìm miền xác định của các hàm số sau:

$y=\frac{P(x)}{Q(x)}, Q(x)\neq 0$ $\quad y=\arcsin x,\ |x|\le 1$

$y=\sqrt[2k]{f(x)}, f(x)\ge 0$ $\quad y=\arccos x,\ |x|\le 1$

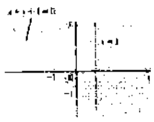
$y=\log_a x,\ x>0$

$$a) f(x,y)=\frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$$

$$+) f(3,2)=\frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

+ Hàm số xác định khi

$$\begin{cases} x-1\neq 0 \\ x+y+1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ y\ge -x-1\end{cases}$$



Cách xác định miền thỏa mãn y≥ -x-1

+) Đg y=-x-1 chia mặt phẳng xOy thành 2 nửa mp

+) Lấy 1 điểm thuộc 1 trong 2 nửa mặt phẳng đó, g/s lấy điểm (0,0) thay vào bpt: y≥ -x-1 được:

0≥ 0-1 ⇔ 0≥ -1 ⇒ đúng

thì miền cần lấy là nửa mp chứa điểm (0,0)

$$\Rightarrow D=\{(x,y)\,|\,y\ge -x-1, x\neq 1\}$$

TXĐ của hàm f là tập các điểm nằm trên và nằm phía trên đường thẳng y= -x-1 loại trừ những điểm nằm trên đường thẳng x=1

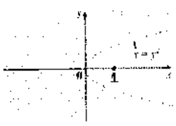
$$b) f(x,y)=x\ln(y^2-x)$$

$$+ f(3,2)=3\ln(2^2-3)=3\ln 1=0$$

+ Hàm số xác định khi

$$y^2-x>0 \Leftrightarrow x<y^2$$

$$\Rightarrow D=\{(x,y)\,|\,x<y^2\}$$



Cách xác định miền thỏa mãn đk x<y²

+ Vẽ đường x=y²

+ Lấy điểm (1,0) thay vào bpt x<y² ta được:

1<0⇒ Sai

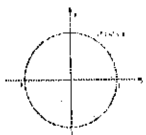
Vậy miền cần lấy không chứa điểm (1,0) tức là miền nằm phía bên trái đường x=y²

Miền xác định của f là tập hợp tất cả các điểm nằm phía bên trái của parbol x=y² (không kể biên)

Ví dụ 2. Tìm miền xác định và lập giá trị của hàm: $g(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

+ Hàm số xác định khi: $9-x^2-y^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2+y^2\le 9$

$$\Rightarrow D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 9\}$$



Miền xác định của g là hình tròn tâm (0,0) bán kính R= 3

+ Tìm miền giá trị của g

- $z=\sqrt{9-x^2-y^2}\ge 0$
- $9-x^2-y^2\le 9 \Rightarrow \sqrt{9-x^2-y^2}\le 3$

Vậy miền giá trị của hàm số là: z∈[0,3]

2. CHƯƠNG 1. HÀM NHIỀU BIẾN

+ Khi tính giới hạn của hàm nhiều biến ta cũng sử dụng các công thức và phép toán tương tự hàm một biến.

Ví dụ 3. Tính $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=1$

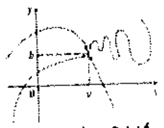
2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1+x^2+y^2}{x^2y^2}(1-\cos xy)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1+x^2+y^2}{x^2y^2}2\sin^2\frac{xy}{2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+x^2+y^2).\frac{2}{4}\frac{\sin^2\frac{xy}{2}}{\frac{x^2y^2}{4}}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 1}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 1}}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{x}{x+y}}$

$=e^{\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 1}}\frac{x}{x+y}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to 1}}\frac{1}{1+\frac{y}{x}}}=e^1=e$

Chú ý: Nếu tồn tại giới hạn thì $f(x, y)$ phải dần tới cùng một giới hạn mà không phụ thuộc vào việc (x, y) dần tới (a, b) như thế nào.



Một số cách chứng minh hàm 2 biến không có giới hạn

Cách 1. Nếu $f(x, y)\to L_1$ khi $(x, y)\to(a, b)$ dọc theo đường C_1

$f(x, y)\to L_2$ khi $(x, y)\to(a, b)$ dọc theo đường C_2

Thì không tồn tại $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

Ví dụ 4. CMR không tồn tại các giới hạn sau: 1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

+ Cho $(x,y)\to(0,0)$ dọc theo đường y=x ta được

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-x^2}{x^2+x^2}=0$

+ Cho $(x,y)\to(0,0)$ dọc theo đường y=2x ta được

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-4x^2}{x^2+4x^2}=-\frac{3}{5}$

$\Rightarrow$ khong ton tai $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$

+ Cho $(x,y)\to(0,0)$ theo phương của đường $x=ky^2$ ta được

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{ky^4}{k^2y^4+y^4}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{ky^4}{(k^2+1)y^4}=\frac{k}{k^2+1}$

$\Rightarrow$ khong ton tai $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$

Cách 2. Áp dụng định lý sau về giới hạn của hàm 1 biến

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to +\infty} f(x_n)=L\ \ \forall$ day $x_n\to a$

Ví dụ 5: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Chọn dãy điểm $M_n\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\xrightarrow{n\to+\infty}(0,0)\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=0$

Chọn dãy điểm $N_n\left(\frac{1}{n},0\right)\xrightarrow{n\to+\infty}(0,0)\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-0}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ khong ton tai $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

2. CHƯƠNG 1. HÀM NHIỀU BIẾN

c) Quy tắc tính đạo hàm riêng của hàm z=f(x, y)

$$f'_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

1. Tìm f'_x: coi y là hằng số, tìm đạo hàm của f theo x.

$$f'_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

2. Tìm f'_y: coi x là hằng số, tìm đạo hàm của f theo y.

Chú ý: Các quy tắc và phép toán tính đạo hàm tương tự như hàm 1 biến

Ví dụ 1. Cho $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, tìm $f'_x(2,1)$ và $f'_y(2,1)$

$f'_x(x, y) = (x^3)' + (x^2)'y^3 - 2(y^2)' = 3x^2 + 2xy^3 \Rightarrow f'_x(2, 1) = 3.2^2 + 2.2.1^3 = 16$

$f'_y(x, y) = (x^3)' + x^2(y^3)' - (2y^2)' = 3x^2y^2 - 4y \Rightarrow f'_y(2, 1) = 3.2^2.1 - 2.2.1 = 8$

Ví dụ 2. Tính f'_x, f'_y biết: $f(x,y)=\sin\left(\frac{x}{1+y}\right)$

$(\sin u)' = u'\cos u$

$\left(\frac{1}{V}\right)' = -\frac{V'}{V^2}$

$$f'_x(x,y)=\left(\frac{x}{1+y}\right)'_x\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)=\frac{1}{1+y}(x)'\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)=\frac{1}{1+y}\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

$$f'_y(x,y)=\left(\frac{x}{1+y}\right)'_y\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)=x\left(\frac{1}{1+y}\right)'_y\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)=-\frac{x}{(1+y)^2}\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

Ví dụ 3. Tính f'_x, f'_y biết: $f(x,y)=x^y+y^x$

$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$

$(a^x)'=a^x\ln a$

$$f'_x(x,y)=\left(x^y\right)'_x+\left(y^x\right)'_x = yx^{y-1}+y^x\ln y$$

$$f'_y(x,y)=\left(x^y\right)'_y+\left(y^x\right)'_y = x^y\ln x+xy^{x-1}$$

d) Đạo hàm riêng của hàm nhiều hơn hai biến

Nếu hàm nhiều hơn 2 biến, khi lấy đạo hàm riêng theo 1 biến xác định, ta coi các biến còn lại là hằng số

$(e^u)'=u'e^u$

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

Ví dụ 4. Tìm f'_x, f'_y và f'_z nếu $f(x, y, z) = e^{xy}\ln z$.

$$f'_x=\left(e^{xy}\right)'_x\ln z=(xy)'_x e^{xy}\ln z = ye^{xy}\ln z$$

$$f'_y=\left(e^{xy}\right)'_y\ln z=(xy)'_y e^{xy}\ln z = xe^{xy}\ln z$$

$$f'_z=e^{xy}(\ln z)'=\frac{e^{xy}}{z}$$

Ví dụ 5. Tìm f'_x, f'_y và f'_z nếu $f(x, y, z) = (x+yz)\ln(xy)$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$$f'_x=(x+yz)'_x\ln xy+(x+yz)(\ln xy)'_x=\ln xy+(x+yz)\frac{(xy)'_x}{xy}$$

$$=\ln xy+(x+yz)\frac{y}{xy}=\ln xy+(x+yz)\frac{1}{x}$$

$$f'_y=(x+yz)'_y\ln xy+(x+yz)(\ln xy)'_y=z\ln xy+(x+yz)\frac{(xy)'_y}{xy}$$

$$=z\ln xy+(x+yz)\frac{x}{xy}=z\ln xy+(x+yz)\frac{1}{y}$$

$$f'_z=(x+yz)'_z\ln xy=y\ln xy$$

Chương 1. ĐẠO HÀM RIÊNG

2. CHƯƠNG 1. HÀM NHIỀU BIẾN

Chương 1. ĐẠO HÀM RIÊNG

1.5. Đạo hàm của hàm hợp

✓ Nhớ lại quy tắc đạo hàm của hàm hợp đối với hàm 1 biến: nếu y=y(x) và x=g(t) thì:

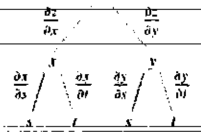
$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

✓ Đối với hàm nhiều biến ta xét các trường hợp sau:

TH1: Hàm z = f(x, y) với x = x(s,t) và y = y(s,t)

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$



Ví dụ 1. Cho $z = e^x\sin y$, với $x = st^2$ và $y = s^2t$. Tìm $\partial z/\partial s$ và $\partial z/\partial t$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(e^x\right)'_x\sin y=e^x\sin y \qquad \frac{\partial x}{\partial s}=(s)'t^2=t^2 \qquad \frac{\partial x}{\partial t}=s\left(t^2\right)'=2st$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^x\left(\sin y\right)'_y=e^x\cos y \qquad \frac{\partial y}{\partial s}=\left(s^2\right)'t=2st \qquad \frac{\partial y}{\partial t}=s^2\left(t\right)'=s^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=(e^x\sin y)(t^2)+(e^x\cos y)(2st)=t^2e^{st^2}\sin(s^2t)+2ste^{st^2}\cos(s^2t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=(e^x\sin y)(2st)+(e^x\cos y)(s^2)=2ste^{st^2}\sin(s^2t)+s^2e^{st^2}\cos(s^2t$$

+ TH2: Hàm z = f(x, y) với x = x(t) và y = y(t)

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Ví dụ 2. Cho $z=f(x,y) = x^2y + 3xy^4$ với $x = \sin 2t$ và $y = \cos t$. Tìm dz/dt khi t=0

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(x^2)'y+3x'y^4=2xy+3y^4 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2y'+3x\left(y^4\right)'=x^2+12xy^3$$

$$\frac{dx}{dt}=(2t)'\cos 2t=2\cos 2t \qquad \frac{dy}{dt}=-\sin t$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt}=\left(2xy+3y^4\right).2\cos 2t-(x^2+12xy^3)\sin t$$

Khi t=0 ⇒x=sin0=0 và y=cos0=1 nên ta có: $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0}=6$

TH3. z=f(x) với x=x(s,t)

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{dz}{dx}\frac{\partial x}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{dz}{dx}\frac{\partial x}{\partial t}$$

Ví dụ 3. Cho hàm $z=\ln(1+x^2)$, với $x= s+\ln t$. Tính $\frac{\partial z}{\partial s},\frac{\partial z}{\partial t}$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{dz}{dx}\frac{\partial x}{\partial s}=\frac{2x}{1+x^2}.1=\frac{2(s+\ln t)}{1+(s+\ln t)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{dz}{dx}\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{2x}{1+x^2}.\frac{1}{t}=\frac{2(s+\ln t)}{t\left[1+(s+\ln t)^2\right]}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{2x}{1+x^2} \qquad \frac{\partial x}{\partial s}=1 \qquad \frac{\partial x}{\partial t}=\frac{1}{t}$$

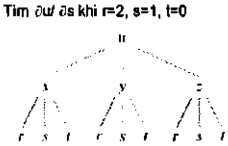
<u>Trường hợp tổng quát</u>: giả sử u là hàm khả vi của n biến $x_1,\dots,x_n$ và mỗi x_j là hàm khả vi của m biến $t_1,\dots,t_m$ khi đó:

$$\frac{\partial u}{\partial t_i}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_i}+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial t_i} \quad (i=1,\dots,m)$$

<u>Ví dụ 4.</u> Cho $u=x^4y+y^2z^3$, với $x=rse^t$, $y=rs^2e^{-t}$, $z=r^2s\sin t$. Tìm $\partial u/\partial s$ khi r=2, s=1, t=0

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$=(4x^3y)(re^t)+(x^4+2yz^3)(2rse^{-t})+(3y^2z^2)(r^2\sin t)$$



Khi r = 2, s = 1 và t = 0 ta có x = 2, y = 2 và z = 0.

Vì vậy $\partial u/\partial s = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0) = 192$.

2. CHƯƠNG 1. HÀM NHIỀU BIẾN

Định lý:

Nếu z=f(x,y) khả vi thì f có đạo hàm theo mọi hướng của véc tơ đơn vị $\vec{\ell}=(a,b)$ và

$$\frac{\partial z}{\vec{\ell}}(x,y)=af_x'(x,y)+bf_y'(x,y)$$

- **Véc tơ gradient:** $\overrightarrow{grad\ z(M_0)}=\left(f_x'(M_0),f_y'(M_0)\right)$

Chú ý: 1) $\frac{\partial z}{\vec{\ell}}(M_0)=\overrightarrow{grad\ z(M_0)}.\vec{\ell}$

2) Nếu $\vec{v}\neq 0$ thì véc tơ đơn vị cùng hướng với $\vec{v}$ là $\vec{\ell}=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

Ví dụ 1: Tìm đạo hàm theo hướng của hàm $z=f(x,y)=x^2y^3-4y$ tại điểm (2, -1) theo hướng của véc tơ $\vec{v}=2\vec{i}+5\vec{j}$

$$\frac{\partial z}{\vec{\ell}}(2,-1)=af_x'(2,-1)+bf_y'(2,-1)$$

+) $f'_x=2xy^3 \Rightarrow f'_x(2,-1)=-4$

+) $f'_y=3x^2y^2-4 \Rightarrow f'_y(2,-1)=8$

+) $\vec{\ell}=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=\frac{1}{\sqrt{29}}(2,5)=\left(\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{5}{\sqrt{29}}\right)$

$\Rightarrow \frac{\partial z}{\vec{\ell}}(2,-1)=\frac{2}{\sqrt{29}}(-4)+\frac{5}{\sqrt{29}}.8=\frac{32}{\sqrt{29}}$

Ví dụ 2. Cho điểm $M_0(1,2,1)$ và hàm

$$u=f(x,y,z)=\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}y^3+\frac{2}{3}z^3-2xyz$$

1. Tính $\overrightarrow{grad\ u(M_0)}$
2. Tính $\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{M_0M_1}}(M_1)$ tại $M_1(1,0,1)$
3. Tìm M sao cho $\overrightarrow{grad\ u(M)}=\vec{0}$
4. Tìm $\vec{\ell}$ sao cho $\frac{\partial u}{\vec{\ell}}(M_0)$ max, tìm giá trị max đó
5. Tìm hướng của $\vec{\ell}$ sao cho $\frac{\partial u}{\vec{\ell}}(M_0)=0$

1. Tính $\overrightarrow{gradu(M_0)}$ $\quad u=f(x,y,z)=\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}y^3+\frac{2}{3}z^3-2xyz$ $\quad M_0(1,2,1)$

$f_x'=2x^2-2yz\Rightarrow f_x'(M_0)=-2$

$f_y'=2y^2-2xz\Rightarrow f_y'(M_0)=6$

$f_z'=2z^2-2xy\Rightarrow f_z'(M_0)=-2$

$\Rightarrow \overrightarrow{grad\ u(M_0)}=(-2,6,-2)$

2. Tính $\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{M_0M_1}}(M_1)$ tại $M_1(1,0,1)$ với $M_0(1,2,1)$

$$\frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{M_0M_1}}(M_1)=af_x'(M_1)+bf_y'(M_1)+cf_z'(M_1)$$

$\overrightarrow{M_0M_1}=(0,-2,0)\Rightarrow \vec{\ell}=\frac{\overrightarrow{M_0M_1}}{\|\overrightarrow{M_0M_1}\|}=\frac{1}{2}(0,-2,0)=(0,-1,0)$

$f_x'=2x^2-2yz\Rightarrow f_x'(M_1)=2$

$f_y'=2y^2-2xz\Rightarrow f_y'(M_1)=-2$

$f_z'=2z^2-2xy\Rightarrow f_z'(M_1)=2$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial\overrightarrow{M_0M_1}}(M_1)=0.2+(-1)(-2)+0.2=2$

3. Tìm M sao cho $\overrightarrow{gradu(M)}=\vec{0}$

Giả sử M(x,y,z), $\overrightarrow{gradu(M)}=(2x^2-2yz,2y^2-2xz,2z^2-2xy)$

$\overrightarrow{gradu(M)}=\vec{0}\Leftrightarrow(2x^2-2yz,2y^2-2xz,2z^2-2xy)=(0,0,0)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-2yz=0\\2y^2-2xz=0\\2z^2-2xy=0\end{cases}$

Cộng vế theo vế 3 phương trình trên ta được:

$(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2=0$

$\Leftrightarrow x=y=z$

Vậy M(a,a,a) với $a\in R$

2. CHƯƠNG 1. HÀM NHIỀU BIẾN

Định lý Clairaut: $f(x,y)$ xác định trên miền D và $(a,b) \in D$. Nếu f''_{xy} và f''_{yx} liên tục trên D thì $f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b)$.

Chú ý. Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp hai được gọi là các đạo hàm riêng cấp ba, vv...

Ví dụ 1. Tính $f^{(4)}_{xxyz}$ với $f(x,y,z) = \sin(3x + yz)$

$$(\sin u)' = u'\cos u \qquad (\cos u)' = -u'\sin u$$

$$f'_x = (3x+yz)'_x\cos(3x+yz) = 3\cos(3x+yz)$$

$$f''_{xx} = -3(3x+yz)'_x\sin(3x+yz) = -9\sin(3x+yz)$$

$$f'''_{xxy} = -9(3x+yz)'_y\cos(3x+yz) = -9z\cos(3x+yz)$$

$$f^{(4)}_{xxyz} = -9z'\cos(3x+yz) + 9z(3x+yz)'_z\sin(3x+yz) = -9\cos(3x+yz) + 9zy\sin(3x+yz)$$

Ví dụ 2: CMR hàm số $z = x\sin\frac{y}{x}$ thỏa mãn phương trình $x^2z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2z''_{yy} = 0$

$$z'_x = \sin\frac{y}{x} + x\left(\frac{y}{x}\right)'_x\cos\frac{y}{x} = \sin\frac{y}{x} - x\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} = \sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}$$

$$z'_y = x\left(\frac{y}{x}\right)'_y\cos\frac{y}{x} = x\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} = \cos\frac{y}{x}$$

$$z''_{xx} = \left(\sin\frac{y}{x} - \underbrace{\frac{y}{x}}_{u}\underbrace{\cos\frac{y}{x}}_{v}\right)'_x = \left(\frac{y}{x}\right)'_x\cos\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)'_x\cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}\right)'_x\sin\frac{y}{x}$$

$$= -\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}$$

$$z''_{xy} = \left(\sin\frac{y}{x} - \underbrace{\frac{y}{x}}_{u}\underbrace{\cos\frac{y}{x}}_{v}\right)'_y = \left(\frac{y}{x}\right)'_y\cos\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)'_y\cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}\right)'_y\sin\frac{y}{x}$$

$$= \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x} = \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}$$

$$z''_{yy} = \left(\cos\frac{y}{x}\right)'_y = -\left(\frac{y}{x}\right)'_y\sin\frac{y}{x} = -\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}$$

$$VT = x^2z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2z''_{yy} = x^2\left(-\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}\right) + 2xy\frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x} + y^2\left(-\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}\right)$$

$$= -\frac{y^2}{x}\sin\frac{y}{x} + 2\frac{y^2}{x}\sin\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x}\sin\frac{y}{x} = 0\ (dpcm)$$

b) Vi phân cấp cao

$d(dz) = d(f'_x dx + f'_y dy)$

$= (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy$

$= f''_{xx}dx^2 + f''_{yx}dydx + f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$

- Hàm 2 biến z= f(x,y)

Vi phân cấp 1: $dz = f'_x dx + f'_y dy$

Vi phân cấp 2: $d^2z = d(dz) = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2$ (g/s f''_{xy}, f''_{yx} liên tục)

Vi phân cấp n: $d^nz = d(d^{n-1}z)$

- Hàm 3 biến u= f(x, y, z)

Vi phân cấp 1: $du = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$

Vi phân cấp 2: $d^2u = d(du) = f''_{xx}dx^2 + f''_{yy}dy^2 + f''_{zz}dz^2 + 2f''_{xy}dxdy + 2f''_{yz}dydz + 2f''_{zx}dzdx$

Vi phân cấp n: $d^nu = d(d^{n-1}u)$

Ví dụ 1. Cho $z = f(x,y) = x^2 + 3xy - 3y^2$. Tìm df, $d^2f(2,3)$

$+)\ f'_x = 2x + 3y \quad \Rightarrow df = f'_x dx + f'_y dy = (2x+3y)dx + (3x-6y)dy$

$+)\ f'_y = 3x - 6y$

$+)\ f''_{xx} = 2$

$+)\ f''_{xy} = 3 \quad \Rightarrow d^2f = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2 = 2dx^2 + 6dxdy - 6dy^2$

$+)\ f''_{yy} = -6 \quad \Rightarrow d^2f(2,3) = 2dx^2 + 6dxdy - 6dy^2$

2. CHƯƠNG 1. HÀM NHIỀU BIẾN

Ví dụ 1. Tìm cực trị của hàm $z = f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 5$

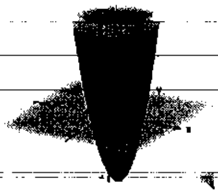
+ Giải hệ pt:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_0(1,0)$$

$$z''_{xx} = 2$$

$$z''_{xy} = 0 \quad \Rightarrow \delta = 0^2 - 2.2 = -4 < 0$$

$$z''_{yy} = 2$$



Vậy hàm đạt cực tiểu tại M_0 và z_{CT}= 1+0-2-5= -6

Ví dụ 2. Tìm cực trị của hàm z=y²- x²

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_0(0,0)$$

$$z''_{xx} = -2$$

$$z''_{xy} = 0 \quad \Rightarrow \delta = 0 - (-2).2 = 4 > 0$$

$$z''_{yy} = 2$$

Vậy hàm số không đạt cực trị tại M_0

Ví dụ 3. Tìm cực trị của hàm $z = f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

+ Giải hệ pt:

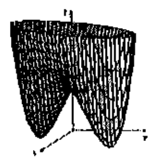
$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x^9 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(0,0) \\ M_2(1,1) \\ M_3(-1,-1) \end{array}\right.$$

$$z''_{xx} = 12x^2$$

$$z''_{xy} = -4 \qquad \Rightarrow \delta = 16 - 144x^2y^2$$

$$z''_{yy} = 12y^2$$

	$\delta = 16 - 144x^2y^2$	$z''_{xx} = 12x^2$	Kết luận
$M_1(0,0)$	16>0		Hàm không đạt cực trị tại điểm M_1
$M_2(1,1)$	-128<0	12>0	Hàm đạt cực tiểu tại điểm $M_2 \Rightarrow Z_{CT} = -1$
$M_3(-1,-1)$	-128<0	12>0	Hàm đạt cực tiểu tại điểm $M_3 \Rightarrow Z_{CT} = -1$



Ví dụ 4. Tìm cực trị của hàm: $z = xy(1-x-y)$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1-x-y) - xy = 0 \\ x(1-x-y) - xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1-x-y) - xy = 0 \\ (y-x)(1-x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(1-x-y) - xy = 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = 1-x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y(1-x-y) - xy = 0 \\ y = x \end{cases} \\ \begin{cases} y(1-x-y) - xy = 0 \\ y = 1-x \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y(1-y-y) - y.y = 0 \\ y = x \end{cases} \\ \begin{cases} y(1-1+y-y) - (1-y)y = 0 \\ x = 1-y \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3y^2 + y = 0 \\ y = x \end{cases} \\ \begin{cases} (1-y)y = 0 \\ x = 1-y \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \frac{1}{3} \end{array}\right. \\ y = x \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \end{array}\right. \\ x = 1-y \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(0,0) \\ M_2\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ M_3(1,0) \\ M_4(0,1) \end{array}\right.$$

2. CHƯƠNG 1. HÀM NHIỀU BIẾN

+ Mặt khác vì M(1/2+ Δx, 1/2+ Δy) thuộc lân cận của điểm M_0 nên:

$$g(M)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}+\Delta x+\frac{1}{2}+\Delta y=1$$

$$\Leftrightarrow \Delta x=-\Delta y$$ thay vào biểu thức (*) ta có:

$$\Delta z(M_0)=\frac{1}{2}(\Delta x+\Delta y)+\Delta x.\Delta y=-\Delta y^2<0$$

Do đó hàm đạt cực đại tại M_0 và $Z_{CĐ}=1/4$

2. Phương pháp nhân tử Lagrang

$$\frac{f'_x}{g'_x}=\frac{f'_y}{g'_y}=-\lambda$$

Bước 1:

➢ Hàm 2 biến:

+ Lập hàm: F(x,y)= f(x,y)+ λg(x,y)

+ Giải hệ: $\begin{cases}F'_x=0\\F'_y=0\\g(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}M_0(x_0,y_0)\\\lambda_0\end{cases}$

➢ Hàm ba biến

+ Lập hàm: F(x,y,z)= f(x, y, z)+ λg(x, y, z)

+ Giải hệ: $\begin{cases}F'_x=0\\F'_y=0\\F'_z=0\\g(x,y,z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}M_0(x_0,y_0,z_0)\\\lambda_0\end{cases}$

Bước 2: Tính $d^2F(M_0,\lambda_0)$

+ Nếu $d^2F(M_0,\lambda_0)>0$ thì hàm đạt cực tiểu tại M_0

+ Nếu $d^2F(M_0,\lambda_0)<0$ thì hàm đạt cực đại tại M_0

+ Nếu $d^2F(M_0,\lambda_0)$ không xác định dấu thì hàm không đạt cực trị tại M_0

+ Nếu $d^2F(M_0,\lambda_0)=0$ thì chưa có kết luận. Khi đó tại M_0 cần xét dấu $\Delta f(M_0)$

Ví dụ 2: Tìm cực trị của hàm z=f(x,y)= xy đk x+ y= 1

Phương pháp nhân tử Lagrang

+ Lập hàm: F(x,y) = xy +λ(x+ y- 1)

+ Giải hệ: $\begin{cases}F'_x=0\\F'_y=0\\g(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+\lambda=0\\x+\lambda=0\\x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\lambda\\x=-\lambda\\-2\lambda=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{1}{2}\\x=\frac{1}{2}\\\lambda=-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}M_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\\\lambda_0=-\frac{1}{2}\end{cases}$

$$+\ d^2F(x,y)=F''_{xx}dx^2+2F''_{xy}dxdy+F''_{yy}dy^2=2dxdy$$

$\Rightarrow d^2F(M_0,\lambda_0)=2dxdy$

+ Từ x + y= 1 ⇒ d(x+y)=0

⇔ $(x+y)'_x dx+(x+y)'_y dy=0$ ⇒ dx+ dy= 0

⇒ dx = -dy

$\Rightarrow d^2F(M_0,\lambda_0)=2dxdy=-2dy^2<0$

Do đó hàm đạt cực đại tại M_0 và $Z_{CĐ}=1/4$

Ví dụ 3: Tìm cực trị của z = x² + y với điều kiện x² + y² =1

Phương pháp nhân tử Lagrang

+ Lập hàm: F(x,y) = x^2 + y +λ(x^2 + y^2 -1)

+ Giải hệ:

$$\begin{cases}F'_x=0\\F'_y=0\\g(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2\lambda x=0\\1+2\lambda y=0\\x^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0\\\lambda=-1\end{array}\right.\\1+2\lambda y=0\\x^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\1+2\lambda y=0\\x^2+y^2=1\end{cases}\\\begin{cases}\lambda=-1\\1+2\lambda y=0\\x^2+y^2=1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\1+2\lambda y=0\\x^2+y^2=1\end{cases}\\\begin{cases}\lambda=-1\\1+2\lambda y=0\\x^2+y^2=1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\1+2\lambda y=0\\\left[\begin{array}{l}y=1\\y=-1\end{array}\right.\end{cases}\\\begin{cases}\lambda=-1\\y=\frac{1}{2}\\\left[\begin{array}{l}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\\x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}M_1(0,1)\\\lambda_1=-\frac{1}{2}\end{cases}\\\begin{cases}M_2(0,-1)\\\lambda_2=\frac{1}{2}\end{cases}\\\begin{cases}M_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)\\\lambda_3=-1\end{cases}\\\begin{cases}M_4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)\\\lambda_4=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

2. CHƯƠNG 1. HÀM NHIỀU BIẾN

Chương 1. ĐẠO HÀM RIÊNG

1.1. Hàm nhiều biến
1.2. Giới hạn và sự liên tục của hàm nhiều biến
1.3. Đạo hàm riêng
1.4. Vi phân
1.5. Đạo hàm của hàm hợp
1.6. Đạo hàm của hàm ẩn
1.7. Đạo hàm theo hướng
1.8. Đạo hàm và vi phân cấp cao
1.9. Bài toán cực trị không điều kiện
1.10. Bài toán cực trị có điều kiện
1.11. Bài toán tìm GTLN, GTNN

1.10. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

- (a,b) là điểm biên của D nếu mỗi hình tròn tâm (a,b) chứa cả những điểm thuộc D và những điểm không thuộc D.
- **Tập đóng** trong $\mathbb{R}^2$ là tập chứa tất cả các điểm biên của nó.
- **Tập bị chặn** trong $\mathbb{R}^2$ là tập có kích thước hữu hạn.

Bài toán: tìm GTLN (Max) và GTNN (Min) của hàm liên tục z = f(x,y) trên tập đóng, bị chặn D

- Bước 1: Giải hệ $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(x_0, y_0) \in D \Rightarrow f(M_0)$
- Bước 2: Tìm các giá trị cực trị của f trên biên của D: giả sử là $f(M_1), f(M_2), \ldots, f(M_n)$
- Bước 3: KL

Maxf= $\operatorname{Max}\{f(M_0), f(M_1), f(M_2), \ldots, f(M_n)\}$

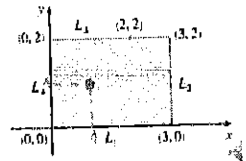
Minf = $\operatorname{Min}\{f(M_0), f(M_1), f(M_2), \ldots, f(M_n)\}$.

Ví dụ 1: Tìm GTLN và GTNN của hàm $z = f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ trên hình chữ nhật $D = \{(x,y) | 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$.

+ Giải hệ:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(1,1) \in D \Rightarrow f(M_0) = 1$$

+ Biên L_1 có phương trình y=0 thay vào hàm f được: $f_1(x) = x^2,\ x \in [0,3]$



$f_1'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [0,3]$

$f_1(0) = 0$

$f_1(3) = 9$

+ Biên L_2 có phương trình x=3 thay vào hàm f được:
$f_2(y) = 9 - 4y,\ y \in [0,2]$

$f_2'(y) = -4 < 0$

$\Rightarrow$ Hàm f_2 luôn nghịch biến trên [0, 2]

$f_2(0) = 9$

$f_2(2) = 1$

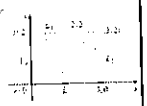
+ Biên L_3 có phương trình y=2 thay vào hàm f được:
$f_3(x) = x^2 - 4x + 4,\ x \in [0,3]$

$f_3'(x) = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in [0,3]$

$f_3(0) = 4$

$f_3(2) = 0$

$f_3(3) = 1$

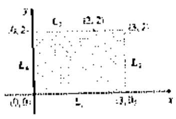


+ Biên L_4 có phương trình x=0 thay vào hàm f được:
$f_4(y) = 2y,\ y \in [0,2]$

$f_4'(y) = 2 > 0 \Rightarrow$ Hàm f_4 luôn đồng biến trên [0, 2]

$f_4(0) = 0$

$f_4(2) = 4$



Vậy Maxf= 9 tại (3, 0)
Minf= 0 tại (0,0) và (2,2)

3. CHƯƠNG 2. TÍCH PHÂN BỘI

Chương 2. TÍCH PHÂN BỘI

2.1. TÍCH PHÂN LẶP

f là hàm 2 biến khả tích trên hình chữ nhật R = [a,b] x [c,d]

Ký hiệu $A(x) = \int_c^d f(x,y)dy$

Tích phân hàm A theo x từ x = a tới x = b được

$$\int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx$$

(Tích phân lặp)

Tương tự $\int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$

Ví dụ: Tính

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2y\,dy\,dx = \int_0^3 \frac{x^2y^2}{2}\Big|_{y=1}^{2} dx = \int_0^3 \left(2x^2 - \frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{3}{2}\int_0^3 x^2dx$$

$$= \frac{x^3}{2}\Big|_0^3 = \frac{27}{2}$$

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2y\,dx\,dy = \int_1^2 \frac{x^3}{3}y\Big|_0^3 dy = \int_1^2 9y\,dy = \frac{9}{2}y^2\Big|_1^2 = 18 - \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$$

(Guido Fubini (1879 – 1943)
nhà toán học người Ý)

Định lý Fubini: Nếu hàm f liên tục trên miền chữ nhật R = [a,b] x [c,d], thì

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy$$

Chú ý: Nếu $f(x,y) = f_1(x).f_2(y)$ thì

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx = \int_a^b f_1(x)dx \,.\int_c^d f_2(y)dy$$

Ví dụ: Tính

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2y\,dy\,dx = \int_0^3 x^2dx \,.\int_1^2 y\,dy = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 .\frac{y^2}{2}\Big|_1^2 = 9\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{27}{2}$$

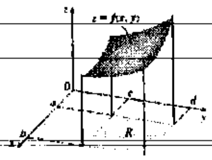
2.2. TÍCH PHÂN KÉP

2.2.1. KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN KÉP

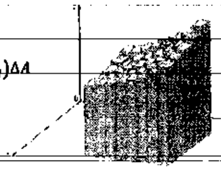
3. CHƯƠNG 2. TÍCH PHÂN BỘI

Nếu f(x, y) ≥ 0 thì thể tích vật thể nằm trên hình chữ nhật R và dưới mặt cong z = f(x, y) là

$$V = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

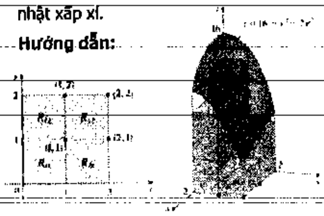


$$V \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$



Ví dụ: Ước lượng thể tích của vật thể nằm trên hình vuông R=[0,2]x[0,2] và dưới paraboloid elliptic $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Chia R thành 4 hình vuông bằng nhau và chọn điểm đại diện là góc trên bên phải của mỗi hình chữ nhật R_{ij}. Phác họa vật thể và các khối hộp chữ nhật xấp xỉ.

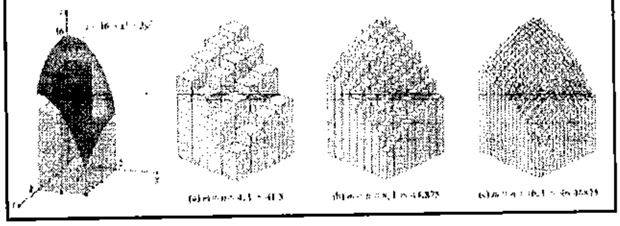
Hướng dẫn:



Diện tích mỗi hình vuông: $\Delta A = 1$

Xấp xỉ thể tích bởi tổng Riemann với m = n = 2 ta có

$$V \approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j)\Delta A = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j) = f(1,1) + f(1,2) + f(2,1) + f(2,2)$$
$$= 13 + 7 + 10 + 4 = 34$$



2.2.2. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN KÉP TRONG TỌA ĐỘ ĐỀ CÁC

Tích phân kép trên miền hình chữ nhật

Định lý Fubini: Nếu hàm f liên tục trên miền chữ nhật R = [a,b] x [c,d], thì

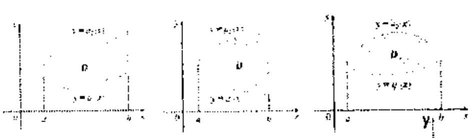
$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

Ví dụ: Tính $I = \iint_R (x - 3y^2)\,dx\,dy$ với R = {(x, y) | 0 ≤ x ≤ 2, 1 ≤ y ≤ 2}

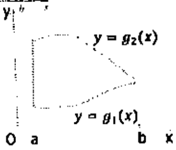
$$I = \int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} - 3y^2x\right)\Big|_{x=0}^{2} dy = \int_1^2 (2 - 6y^2)\,dy$$
$$= (2y - 2y^3)\Big|_1^2 = 4 - 16 - 2 + 2 = -12$$

Tích phân kép trên miền tổng quát

- **TH1:** D là miền loại 1 D = {(x, y) | a ≤ x ≤ b, $g_1(x)$ ≤ y ≤ $g_2(x)$}



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$



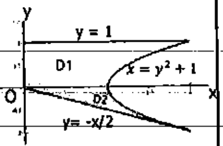
3. CHƯƠNG 2. TÍCH PHÂN BỘI

Chia D thành 2 miền D_1 và D_2 như hình vẽ.

Từ y = -x/2 suy ra x = -2y.

PT tung độ giao điểm: $y^2 + 1 = -2y$

$\Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y+1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -1$



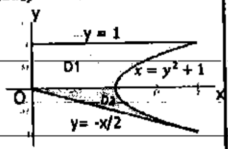
$$I_1 = \iint_{D_1} xydxdy = \int_0^1 \int_0^{y^2+1} xydx\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{yx^2}{2}\Big|_0^{y^2+1} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y(y^2+1)^2 dy$$

$$D_1: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le y^2 + 1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (y^5 + 2y^3 + y)dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^6}{6} + \frac{y^4}{2} + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{12}$$

$$I_2 = \iint_{D_2} xydxdy = \int_{-1}^0 \int_{-2}^{y^2+1} xydx\,dy = \int_{-1}^0 \frac{yx^2}{2}\Big|_{x=-2y}^{y^2+1} dy$$



$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^0 (y(y^2+1)^2 - y(-2y)^2)dy$$

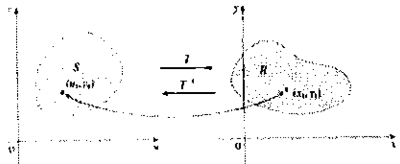
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^0 (y^5 - 2y^3 + y)dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y^6}{6} - \frac{y^4}{2} + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{12}$$

$$D_2: \begin{cases} -1 \le y \le 0 \\ -2y \le x \le y^2 + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = \frac{7}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

2.2.3. ĐỔI BIẾN TRONG TÍCH PHÂN KÉP



Xét phép biến đổi T từ mp (u,v) sang mp (x,y): T(u,v) = (x,y)

Công thức đổi biến: $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = G(x,y) \\ v = H(x,y) \end{cases}$,

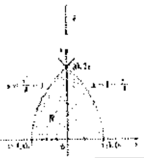
(x(u,v) và y(u,v) có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục)

Ví dụ 1: Tìm ảnh của hình vuông $S = \{(u,v) \mid 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1\}$ qua phép đổi biến được xác định bởi phương trình

$$x = u^2 - v^2 \qquad y = 2uv$$

$S_1: v = 0; 0 \le u \le 1 \Rightarrow x = u^2; y = 0 \quad (0 \le x \le 1)$

$S_2: u = 1; 0 \le v \le 1 \Rightarrow x = 1 - v^2;\ y = 2v \Rightarrow x = 1 - \frac{y^2}{2}$ $(0 \le y \le 2)$



$S_3: v = 1;\ 0 \le u \le 1 \Rightarrow x = u^2 - 1;\ y = 2u \Rightarrow x = \frac{y^2}{4} - 1$ $(0 \le y \le 2)$

$S_4: u = 0;\ 0 \le v \le 1 \Rightarrow x = -v^2;\ y = 0 \ (-1 \le x \le 0)$

Dùng phép đổi biến để tính tích phân kép

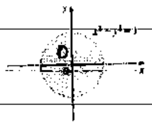
ĐN: Định thức Jacobi của phép đổi biến T: x = g(u,v), y = h(u,v) là

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

37

3. CHƯƠNG 2. TÍCH PHÂN BỘI

Ví dụ: Tính $I = \iint_D (1 - x^2 - y^2)dxdy$ trong đó miền D được xác định bởi: $x^2 + y^2 \le 1$



Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

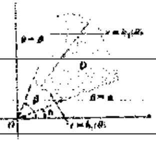
Do $x^2 + y^2 \le 1$ nên $r^2 \le 1$

$\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - r^2)r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \, . \int_0^1 (r - r^3)dr$$

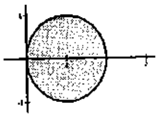
$$= 2\pi.\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

- **TH2:** f liên tục $D = \{(r,\varphi) \mid \alpha \le \varphi \le \beta, h_1(\varphi) \le r \le h_2(\varphi)\}$



$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\varphi)}^{h_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi$$

Ví dụ: Tính $I = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy$ trong đó miền D được xác định bởi $x^2 + y^2 \le 2x$



Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

Do $x^2 + y^2 \le 2x$ nên $r^2 \le 2r\cos\varphi \Rightarrow r \le 2\cos\varphi$

$0 \le r \le 2\cos\varphi$

$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos} r^2.r\,dr\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4}\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\varphi\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi$$

$$= \left(\frac{3\varphi}{2} + \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2}$$

2.2.5. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN KÉP

1. Tính diện tích hình phẳng

Diện tích miền D: $S_D = \iint_D dxdy$

3. CHƯƠNG 2. TÍCH PHÂN BỘI

1. Mật độ và khối lượng

Xét một bản phẳng choán miền D trong mặt phẳng xOy với hàm mật độ $\rho(x,y)$ liên tục trên D

- Mật độ (khối lượng riêng) là lượng vật chất trên mỗi đơn vị đo (khối lượng trên mỗi đơn vị diện tích)

m: khối lượng bản phẳng.

A: diện tích bản phẳng.

- Khối lượng của bản phẳng là: $m = \iint_D \rho(x,y)dxdy$

Ví dụ: Cho một tấm kim loại hình tam giác chiếm miền D trong hình bên, mật độ khối lượng tại (x,y) là $\sigma(x,y) = xy$, đơn vị kg/m^2. Tìm khối lượng của tấm kim loại.

Miền $D = \{(x,y)|0 \le x \le 1; 1 - x \le y \le 1\}$

Khối lượng tấm kim loại là: $m = \iint_D xy\,dxdy = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy\,dy\,dx$

$$= \int_0^1 x\frac{y^2}{2}\Big|_{y=1-x}^{y=1} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x - x(1-x)^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (2x^2 - x^3)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{24}$$

2. Mô men và trọng tâm

- Mômen lực (mômen thứ nhất) thể hiện tác động gây ra sự quay quanh một điểm hoặc một trục của vật thể.

$M = \delta m$ m: khối lượng của vật

δ: khoảng cách từ tâm quay tới vật

Cho bản phẳng choán miền D có hàm mật độ ρ(x, y).

+ Mô men của bản phẳng với trục x: $M_x = \iint_D y\rho(x,y)dxdy$

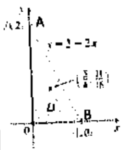
+ Mô men với trục y: $M_y = \iint_D x\rho(x,y)dxdy$

+ Tọa độ trọng tâm $(\bar{x},\bar{y})$ của bản phẳng:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)dxdy$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)dxdy$$

Ví dụ: Tìm khối lượng và trọng tâm của bản phẳng tam giác với các đỉnh (0,0), (1,0) và (0,2) biết hàm mật độ là $\rho(x,y) = 1 + 3x + y$.



PT đường thẳng AB: $\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-2}{0-2} \Leftrightarrow y = 2 - 2x$

Khối lượng bản phẳng là: $m = \iint_D \rho(x,y)dxdy$

$$= \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y)dy\,dx = \int_0^1 \left(y + 3xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=2-2x} dx$$

$$= 4\int_0^1 (1 - x^2)dx = 4\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{8}{3}$$

Hoành độ trọng tâm là: $\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)dxdy$ $\quad \rho(x,y) = 1 + 3x + y$

$$= \frac{3}{8}\int_0^1 \int_0^{2-2x} (x + 3x^2 + xy)dy\,dx = \frac{3}{8}\int_0^1 \left(xy + 3x^2y + x\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=2-2} dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1 (x - x^3)dx = \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{8}$$

Tung độ trọng tâm là: $\bar{y} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)dxdy$

$$= \frac{3}{8}\int_0^1 \int_0^{2-2x} (y + 3xy + y^2)dy\,dx = \frac{3}{8}\int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + 3x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=2-2} dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 (7 - 9x - 3x^2 + 5x^3)dx = \frac{1}{4}\left(7x - \frac{9}{2}x^2 - x^3 + \frac{5}{4}x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{11}{16}$$

3. Mô men quán tính

Mô men quán tính (mô men thứ hai), của chất điểm khối lượng m đối với một trục là $I = mr^2$

r: khoảng cách từ chất điểm tới trục m: khối lượng chất điểm

Xét bản phẳng có hàm mật độ ρ(x, y) và choán miền D trong mp(xOy)

+ Mô men quán tính của bản phẳng với trục x: $I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)dxdy$

+ Mô men quán tính của bản phẳng đối với trục y: $I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)dxdy$

+ Mô men quán tính của bản phẳng đối với gốc tọa độ:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x,y)dxdy$$

Chú ý: $I_0 = I_x + I_y$

3. CHƯƠNG 2. TÍCH PHÂN BỘI

Ví dụ 1. Tính $I=\iiint\limits_V (xy+z)dxdydz, V=[0,1]\times[1,2]\times[0,2]$

$$I=\int_0^1 dx\int_1^2 dy\int_0^2 (xy+z)\,dz \quad =\int_0^1 dx\int_1^2\left(xyz+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 dy \quad =\int_0^1 dx\int_1^2 (2xy+2)\,dy$$

$$=2\int_0^1\left(x\frac{y^2}{2}+y\right)\Bigg|_1^2 dx \quad =2\int_0^1\left(\frac{3}{2}x+1\right)dx \quad =2\left(\frac{3}{2}\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^1 \quad =\frac{7}{2}$$

Ví dụ 2. Tính $I=\iiint\limits_V xyz^2dxdydz, V=[0,1]\times[-1,2]\times[0,3]$

Cách 1. Ta thấy f(x,y,z)= x.y.z² ($f_1(x)=x$, $f_2(y)=y$, $f_3(z)=z^2$) nên:

$$I=\int_0^1 xdx.\int_{-1}^2 ydy.\int_0^3 z^2dz=\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1.\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-1}^2.\frac{z^3}{3}\Bigg|_0^3=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.9=\frac{27}{4}$$

Cách 2

$$I=\int_0^1 dx\int_{-1}^2 dy\int_0^3 xyz^2dz \quad =\int_0^1 dx\int_{-1}^2 xy\frac{z^3}{3}\Bigg|_0^3 dy \quad =\int_0^1 dx\int_{-1}^2 9xydy \quad =9\int_0^1 x\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-1}^2 dx$$

$$=9\int_0^1 x\frac{3}{2}dx=\frac{27}{2}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1=\frac{27}{4}$$

Chương 2. TÍCH PHÂN BỘI

b) Nếu $V:\begin{cases}(x,y)\in D\equiv chV_{xOy}\\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\end{cases} \Rightarrow I=\iint\limits_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

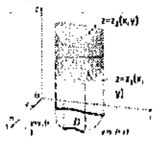
Chú ý

+ Có thể hoán đổi vai trò của các biến x, y và z, ta sẽ nhận được các công thức tính tương ứng, phù hợp với cách mô tả miền V.

$$V:\begin{cases}(y,z)\in D\equiv chV_{yOz}\\ x_1(y,z)\le x\le x_2(y,z)\end{cases} \Rightarrow I=\iint\limits_D dydz\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)dx$$

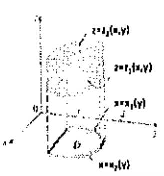
Chú ý: Khi tính tp $I=\iint\limits_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ mà tích phân kép trên miền D tính trong tọa độ đề các thì ta có thể xác định luôn cận của x và y rồi tích tp như sau:

- $V:\begin{cases}a\le x\le b\\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\end{cases} \Rightarrow I=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$



- $V:\begin{cases}c\le y\le d\\ x_1(y)\le x\le x_2(y)\\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$



Ví dụ 3. Tính $I=\iiint\limits_V zdxdydz, V: x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$

+) $D\equiv ChV_{xOy}:\begin{cases}x\ge 0, y\ge 0\\ x+y\le 1\end{cases}$

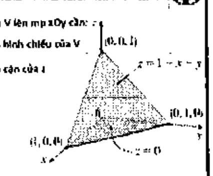
+) $V:\begin{cases}(x,y)\in D\equiv ChV_{xOy}\\ 0\le z\le 1-x-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1-x\\ 0\le z\le 1-x-y\end{cases}$

+) $I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} zdz \quad =\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{1-x-y} dy$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2dy \quad =-\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2d(1-x-y)$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1-x-y)^3}{3}\Bigg|_0^{1-x}dx \quad =\frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^3dx \quad =-\frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^3d(1-x) \quad =-\frac{1}{6}\frac{(1-x)^4}{4}\Bigg|_0^1=\frac{1}{24}$$

Nếu chiếu V lên mp xOy cần:
+ Xác định hình chiếu của V
+ Xác định cận của z



3. CHƯƠNG 2. TÍCH PHÂN BỘI

2.3.3. Đổi biến số tổng quát trong tích phân bội ba

Xét phép đổi biến: $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \quad (*) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$

Khi đó: $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J|\,dudvdw$

Trong đó J được tính bằng

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \quad \text{hoac} \quad \frac{1}{J} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix}$$

Phép đổi biến trên phải thoả mãn:

1) Các hàm x, y, z liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng trong miền đóng V' của không gian O'uvw.

2) Các công thức (*) xác định một song ánh từ miền V' sang miền V

3) Định thức $J \neq 0 \, \forall (u,v,w) \in V'$

Ví dụ 1: $I = \iiint\limits_V (x+z)dxdydz$ Trong đó V là hình hộp giới hạn bởi các mp sau: $\begin{cases} 3y+z = \pm 1 \\ x-z = 3 \\ x-z = 2 \\ 3x-z = \pm 4 \end{cases}$

+) Đặt $\begin{cases} u = 3y+z \\ v = x-z \\ w = 3x-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3y+z \\ v = x-z \\ x = \dfrac{w-v}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2u-w+3v}{6} \\ z = \dfrac{w-3v}{2} \\ x = \dfrac{w-v}{2} \end{cases}$

$\iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J|\,dudvdw$

+) $\dfrac{1}{J} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6 \Rightarrow J = -\dfrac{1}{6}$

+) $V \to V': \begin{cases} -1 \le u \le 1 \\ 2 \le v \le 3 \\ -4 \le w \le 4 \end{cases}$

$I = \iiint\limits_V (x+z)dxdydz$

$\begin{cases} y = \dfrac{2u-w+3v}{6} \\ z = \dfrac{w-3v}{2} \\ x = \dfrac{w-v}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \iiint\limits_{V'} \left(\frac{w-v}{2} + \frac{w-3v}{2} \right) \frac{1}{6} dudvdw$$

$$= \int_{-1}^{1} du \int_{2}^{3} dv \int_{-4}^{4} \left(\frac{w-v}{2} + \frac{w-3v}{2} \right) \frac{1}{6} dw$$

$$= \frac{1}{6} \int_{-1}^{1} du \int_{2}^{3} dv \int_{-4}^{4} (w-2v)dw \quad = \frac{1}{6} u\Big|_{-1}^{1} \cdot \int_{2}^{3} \left(\frac{w^2}{2} - 2vw \right)\Big|_{-4}^{4} dv$$

$$= -\frac{1}{6}.2.\int_{2}^{3} 16v dv \quad = -\frac{16}{3} \frac{v^2}{2}\Big|_{2}^{3} = -\frac{40}{3}$$

Ví dụ 2: $I = \iiint\limits_V (2x+3y+z)^2 dxdydz$ Trong đó V là hình hộp giới hạn bởi các mp sau: $\begin{cases} 2x+3y+z = \pm 3 \\ x-2y-3z = \pm 2 \\ 3x+y-z = \pm 5 \end{cases}$

+) Đặt: $\begin{cases} u = 2x+3y+z \\ v = x-2y-3z \\ w = 3x+y-z \end{cases}$

+) $\dfrac{1}{J} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -7 \Rightarrow J = -\dfrac{1}{7}$

+) $V \to V': \begin{cases} -3 \le u \le 3 \\ -2 \le v \le 2 \\ -5 \le w \le 5 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \iiint\limits_{V'} u^2 . \frac{1}{7} dudvdw$$

$$= \int_{-3}^{3} du \int_{-2}^{2} dv \int_{-5}^{5} u^2 \frac{1}{7} dw$$

$$= \frac{1}{7} \int_{-3}^{3} u^2 du . \int_{-2}^{2} dv \int_{-5}^{5} dw$$

$$= \frac{1}{7} \frac{u^3}{3}\Big|_{-3}^{3} . v\Big|_{-2}^{2} . w\Big|_{-5}^{5} = \frac{720}{7}$$

Chương 3. TÍCH PHÂN BỘI

3. CHƯƠNG 2. TÍCH PHÂN BỘI

Ví dụ 2. Tính $I = \iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ V là vật thể nằm trong hình trụ $x^2+y^2=1$, nằm phía trên mặt $z=1-x^2-y^2$ và phía dưới mặt $z = 4$

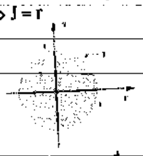
+) $D \equiv \underset{xOy}{ChV}: x^2+y^2 \le 1$

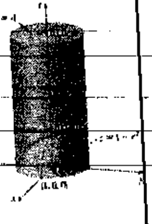
$1-x^2-y^2 \le z \le 4$

$1-(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi) \le z \le 4$

$1-r^2 \le z \le 4$

+) Đổi biến sang tọa độ trụ $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow J = r$





+) $D \to D'$: $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ 1-r^2 \le z \le 4 \end{cases}$

+) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{1-r^2}^4 r.rdz = 2\pi \int_0^1 (3+r^2)r^2 dr = 2\pi \left(r^3 + \frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{12\pi}{5}$

Ví dụ 3. Tính $I = \iiint_V (z^2+y^2)dxdydz$, $V: x = \sqrt{y^2+z^2}, x = 2$

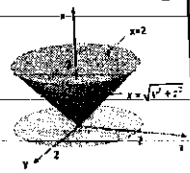
+ Để tìm giao tuyến của mặt nón và mp x=2 ta giải hpt:

$\begin{cases} x = \sqrt{y^2+z^2} \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \sqrt{y^2+z^2} \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+z^2 = 4 \\ x = 2 \end{cases}$

Vậy giao tuyến của 2 mặt là đường tròn $y^2+z^2=4$ nằm trên mp $x=2$

+) $D \equiv \underset{yOz}{ChV}: y^2+z^2 \le 4$

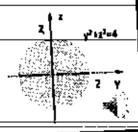
+) Đổi biến sang tọa độ trụ $\begin{cases} y = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \\ x = x \end{cases} \Rightarrow J = r$



$\sqrt{y^2+z^2} \le x \le 2$

$\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} \le x \le 2$

$r \le x \le 2$



+) $D \to D'$: $\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \\ r \le x \le 2 \end{cases}$

+) $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^2 r^2.rdx = 2\pi \int_0^1 (2-r)r^3 dr = 2\pi \left(\frac{r^4}{2} - \frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \frac{16\pi}{5}$

Chương 3. TÍCH PHÂN BỘI

2.3.5. Tính tích phân bội ba trong toạ độ cầu

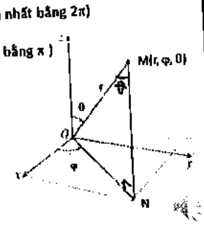
Toạ độ cầu

- Xét điểm M(x, y, z)
- N là hình chiếu của M lên Oxy.
- Toạ độ cầu của điểm M(x, y, z) là bộ ba (r, φ, θ) trong đó:

$\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{ON})$ (như góc φ trong hệ tọa độ cực, giá trị lớn nhất bằng 2π)

$\theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM})$ (góc hình học giữa 2 vec tơ, giá trị lớn nhất bằng π)

$r = |\overrightarrow{OM}|$



Chú ý:

$ON = r\sin\theta$

$x = ON.\cos\varphi = r\cos\varphi\sin\theta$

$y = ON.\sin\varphi = r\sin\varphi\sin\theta$

- *Công thức đổi biến sang tọa độ cầu là:*

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow |J| = r^2\sin\theta$$

Khi đó:

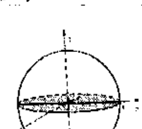
$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V'} f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\, dr d\varphi d\theta$$

Để tính tích phân trên miền V' ta cần xác định cận của r, φ, θ.

Chú ý: $x^2+y^2+z^2 = r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta$
$= (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\, r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta$
$= r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2$

Ví dụ 1. Tính $I = \iiint_V e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dxdydz$ V được giới hạn bởi mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$

+) *Đổi biến sang tọa độ cầu:* $\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow |J| = r^2\sin\theta$

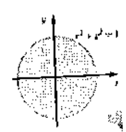


+) Giải hpt sau tìm tuyến của mặt cầu và mặt phẳng xOy:

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

⇒ Giao tuyến của mặt cầu và mặt phẳng xOy là đường tròn $x^2+y^2=1$ nằm trên mp z=0 (mp xOy)

⇒ $D \equiv \underset{xOy}{ChV}: x^2+y^2 \le 1$



- Phương trình mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$ trong hệ tọa độ cầu là:

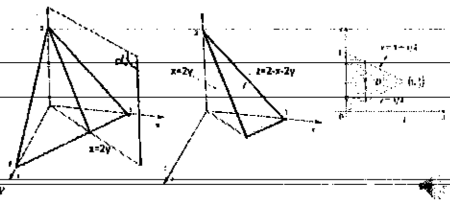
$r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow r^2 = 1 \Leftrightarrow r = 1$ (vì $r > 0$)

3. CHƯƠNG 2. TÍCH PHÂN BỘI

2.3.6. Ứng dụng của tích phân bội ba

a) Tính thể tích của vật thể V: $V = \iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

Ví dụ 13. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt sau: x+ 2y + z= 2, x= 2y, x = 0, z=0



+) $V = \iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

+) $V\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \frac{x}{2} \le y \le 1-\frac{x}{2} \\ 0 \le z \le 2-x-2y \end{cases}$

+) $V=\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} dy \int_0^{2-x-2y} dz \quad =\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} (2-x-2y)dy \quad =\int_0^1 (2y-xy-y^2)\Big|_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} dx$

$$=\int_0^1\left(2\left(1-2\frac{x}{2}\right)-x\left(1-2\frac{x}{2}\right)-\left(1-\frac{x}{2}\right)^2+\frac{x^2}{4}\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(1-2x+x^2\right)dx \quad =-\int_0^1(1-x)^2d(1-x)=-\frac{(1-x)^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}\ \text{(dvtt)}$$

b) Tính khối lượng, tọa độ trọng tâm của vật thể:

Cho vật thể V có khối lượng riêng là ρ(x,y,z).

$$m = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$x_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$y_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

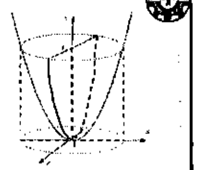
$$z_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Nếu vật thể đồng chất thì ρ(x,y,z)=k

Ví dụ 2. Tìm khối lượng và tọa độ trọng tâm y_G của vật thể V={ $z \ge x^2+y^2$, $z \le 1$, $y \ge 0$} biết ρ(x,y,z)=z

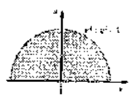
+) $m = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

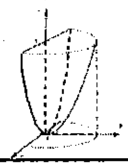
Đổi biến sang tọa độ trụ $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow |J| = r$



$\cdot D = Ch_{xOy}V : \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$

$\cdot V \to V' : \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \\ r^2 \le z \le 1 \end{cases}$





$m = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^1 z.rdz \quad = \pi\int_0^1 r\frac{z^2}{2}\Big|_{r^2}^1 dr = \frac{\pi}{2}\int_0^1 r(1-r^4)dr = \frac{\pi}{2}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$ (dvk)

+) $y_G = \frac{1}{m}\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{6}{\pi}\iiint\limits_V yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

Đổi biến sang tọa độ trụ $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \Rightarrow |J| = r$

$V \to V' : \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 1 \\ r^2 \le z \le 1 \end{cases}$

$$y_G = \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^1 r\sin\varphi.z.rdz$$

$$= \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi.\int_0^1 dr \int_{r^2}^1 z.r^2dz$$

$$= -\frac{6}{\pi}\cos\varphi\Big|_0^{\pi}\int_0^1 r^2\frac{z^2}{2}\Big|_{r^2}^1 dr$$

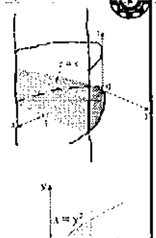
$$= \frac{12}{\pi}\int_0^1 r^2(1-r^4)dr$$

$$= \frac{12}{\pi}\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^7}{7}\right)\Big|_0^1 = \frac{16}{7\pi}$$

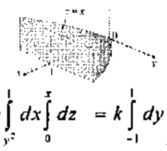
Ví dụ 3. Tìm khối lượng và tọa độ trọng tâm của vật đồng chất giới hạn bởi các mặt : x= y^2, x=z, z=0, x=1

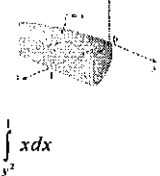
+ Vì vật thể đồng chất nên ρ(x,y,z)=k

+) $m = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \ = \iiint\limits_V k\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$



+) $V\begin{cases} -1 \le y \le 1 \\ y^2 \le x \le 1 \\ 0 \le z \le x \end{cases}$





+) $m = k\int_{-1}^1 dy\int_{y^2}^1 dx\int_0^x dz \ = k\int_{-1}^1 dy\int_{y^2}^1 xdx$

4. CHƯƠNG 3. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

Chương 3

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

★ **3.1. Tích phân đường loại một**

3.1.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên cung phẳng C

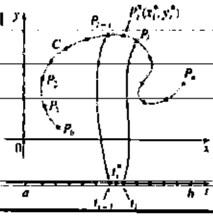
$$x = x(t), y = y(t), a \le t \le b$$

Chia $[a, b]$ thành n đoạn bởi các điểm chia $a = t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_n = b$.

Đặt $x_i = x(t_i), y_i = y(t_i), P_i(x_i, y_i)$ chia C thành n cung nhỏ với các độ dài $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$

Chọn điểm $P_i^*(x^*_i, y_i^*)$ trên cung thứ i (ứng với điểm t_i^* trên $[t_{i-1}, t_i]$).

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$$



$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$$

Nếu giới hạn tồn tại (không phụ thuộc vào cách chia $[a, b]$ và cách chọn P_i^* thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường của f dọc theo C

$$\int_C f(x,y)ds$$

– C là miền lấy tích phân, ds là vi phân cung

– $f(x,y)$ là hàm dưới dấu tích phân, $f(x,y)$ ds là biểu thức dưới dấu tích phân.

Nếu f(x, y) liên tục trên cung trơn thì nó khả tích (tồn tại) trên đó.

Tích phân đường loại một có các tính chất tương tự tích phân xác định

3.1.2. Cách tính

a) Phương trình tham số

$C = \{(x, y): a \le t \le b, x = x(t), y = y(t)\}$.

Trong học phần Toán 2, chúng ta đã biết rằng độ dài của C là

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Nếu f là liên tục thì

$$\boxed{\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt}$$

b) Tọa độ Đề Các

Trong trường hợp đặc biệt khi C là đoạn thẳng nối (a, 0) tới (b, 0) thì có thể viết phương trình tham số của C là x = x, y = 0, a ≤ x ≤ b.

- $C = \{(x, y): a \le x \le b, y = y(x)\}$.

$$I = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx$$

- $C = \{(x, y): c \le y \le d, x = x(y)\}$.

$$I = \int_c^d f(x(y), y)\sqrt{1 + x'^2(y)}dy$$

c) Tọa độ cực

Giả sử $C = \{(r, \varphi): \alpha \le \varphi \le \beta, r = r(\varphi)\}$.

Dọc theo cung C ta có $x = r(\varphi)\cos\varphi = x(\varphi)$, $y = r(\varphi)\sin\varphi = y(\varphi)$.

Coi φ là tham số, vì $x'^2 + y'^2 = r^2 + r'^2$ nên

$$I = \int_\alpha^\beta f\left(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi\right)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi$$

4. CHƯƠNG 3. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

3.1.4. Ứng dụng của tích phân đường loại 1:

a) Độ dài cung $L = \int_C ds$ $\qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$

b) Trọng tâm của dây mảnh chiếm cung đường cong:

+ Giả sử $\rho(x, y)$ thể hiện mật độ tại điểm (x, y) của một dây mỏng có hình dạng như đường cong C.

Khối lượng và trọng tâm của dây được tính theo công thức

$$m = \int_C \rho(x,y)ds \qquad \bar{x} = \frac{1}{m}\int_C x\rho(x,y)ds$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x,y)ds$$

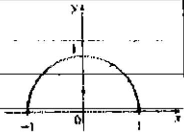
Ví dụ 4: Một sợi dây chiếm nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ và phần hai đầu dây dày hơn phần giữa của dây. Tìm trọng tâm của dây nếu mật độ tại mọi điểm tỷ lệ thuận với khoảng cách đến đường thẳng y=1

Lời giải Hàm mật độ là $\rho(x, y) = k(1 - y)$

với k là hằng số.

Ta sử dụng sự tham số hóa

$x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi$.



$$m = \int_C k(1-y)ds = \int_0^\pi k(1-\sin t)\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt$$

$$= k[t + \cos t]_0^\pi = k(\pi - 2)$$

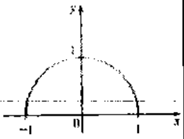
Ví dụ 4: Một sợi dây chiếm nửa đường tròn $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ và phần hai đầu dây dày hơn phần giữa của dây. Tìm trọng tâm của dây nếu mật độ tại mọi điểm tỷ lệ thuận với khoảng cách đến đường thẳng y=1

Lời giải Hàm mật độ là $\rho(x, y) = k(1 - y)$

với k là hằng số.

Ta sử dụng sự tham số hóa

$x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi$.



$$m = \int_C k(1-y)ds = \int_0^\pi k(1-\sin t)\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt$$

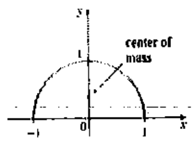
$$= k[t + \cos t]_0^\pi = k(\pi - 2)$$

Do tính đối xứng, $\rho(x, y) = k(1 - y)$ nên $\bar{x} = 0$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x,y)ds = \frac{1}{k(\pi-2)}\int_C yk(1-y)ds$$

$$= \frac{1}{\pi - 2}\int_0^\pi (\sin t - \sin^2 t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi-2}\left[-\cos t - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^\pi = \frac{4-\pi}{2(\pi-2)}$$



Vậy trọng tâm của sợi dây là

$$\left(0, \frac{4-\pi}{2(\pi-2)}\right) \approx (0, 0.38)$$

Chương 3

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

★ 3.2. Tích phân đường loại hai

3.2. Tích phân đường loại hai

3.2.1. Định nghĩa

+Cho hàm số P(x, y), Q(x, y) xác định trên cung phẳng $\overset{\frown}{AB}$

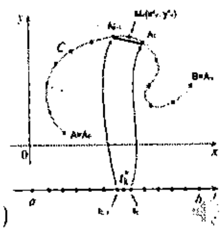
+Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ không dẫm lên nhau

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A_0A_1} \cup \overset{\frown}{A_1A_2} \cup \ldots \cup \overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$$

+Gọi $\Delta x_k, \Delta y_k$ lần lượt là các thành phần của $\overline{A_{k-1}A_k}$

+Lấy tuỳ ý điểm $M_k \in \overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$

+ Lập tổng $I_n = \sum_{k=1}^{n}\left(P(M_k).\Delta x_k + Q(M_k).\Delta y_k\right)$



4. CHƯƠNG 3. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

$I = \int_{t_A}^{t_B} [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt$

$\overrightarrow{AB} = (1,4,5), x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct$

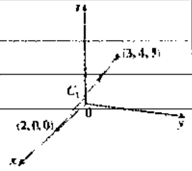
Ví dụ 3: Tính $I = \int_C ydx + zdy + xdz$, trong đó C là đoạn thẳng từ (2, 0, 0) tới (3, 4, 5)

Lời giải PT tham số của C

$x = 2 + t, y = 4t, z = 5t; 0 \le t \le 1$

$I = \int_0^1 (4t)dt + (5t)4dt + (2+t)5dt$

$= \int_0^1 (10 + 29t)dt = \left[10t + \frac{29}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{49}{2}$

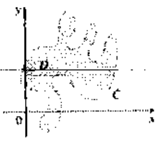


George Green (14 July 1793 – 31 May 1841)

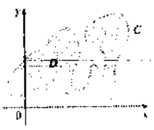
" An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism (Một tiểu luận về việc áp dụng các phân tích toán học cho lý thuyết về điện và từ tính)"

3.2.4. Công thức Green - Green's Theorem

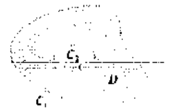
Nếu đường lấy tích phân C kín, quy ước **chiều dương** của một đường cong đơn kín C là hướng mà một người đi dọc theo C sẽ thấy phần miền gần nhất được giới hạn bởi C nằm về bên tay trái.



Hướng dương



Hướng âm



$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

Định lý Green

Giả sử C là đường cong đơn kín, định hướng dương, trơn từng khúc trong mặt phẳng và giả sử D là miền được giới hạn bởi C. Nếu các đạo hàm riêng cấp một của P(x, y), Q(x, y) liên tục trong D thì

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Hệ quả: Diện tích S của miền bị chặn D với biên kín L được tính theo công thức

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx = \oint_L xdy = \oint_L -ydx$$

Ví dụ 2. Tính $\int_C x^4dx + xydy$, trong đó C là đường tam giác gồm các đoạn thẳng (0, 0) tới (1, 0), từ (1, 0) tới (0, 1) và từ (0, 1) tới (0, 0).

$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

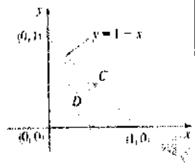
Lời giải: D là miền kín giới hạn bởi C. Áp dụng công thức Green

Đặt P(x, y) = x^4 và Q(x, y) = xy thì $Q'_x = y, P'_y = 0$

$\int_C x^4dx + xydy = \iint_D (Q'_x - P'_y)dA$

$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0)dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x} dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2dx \quad = -\frac{1}{6}(1-x)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$



Ví dụ 2. Tính $\int_C x^4dx + xydy$, trong đó C là đường tam giác gồm các đoạn thẳng (0, 0) tới (1, 0), từ (1, 0) tới (0, 1) và từ (0, 1) tới (0, 0).

$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

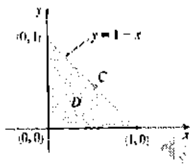
Lời giải: D là miền kín giới hạn bởi C. Áp dụng công thức Green

Đặt P(x, y) = x^4 và Q(x, y) = xy thì $Q'_x = y, P'_y = 0$

$\int_C x^4dx + xydy = \iint_D (Q'_x - P'_y)dA$

$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0)dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x} dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2dx \quad = -\frac{1}{6}(1-x)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$



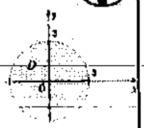
4. CHƯƠNG 3. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

Ví dụ 5: Tính $I = \int_C (3y - e^{\sin x})dx + \left(7x + \sqrt{y^4+1}\right)dy$,

C là đường tròn $x^2 + y^2 = 9$.

Lời giải $P(x,y) = 3y - e^{\sin x}, Q(x,y) = 7x + \sqrt{y^4+1}$

$$P'_y(x,y) = 3, Q'_x(x,y) = 7$$



Miền D được giới hạn bởi C là đĩa $x^2 + y^2 \le 9$

Áp dụng công thức Green:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$I = \iint_D (7-3)dxdy = 4\iint_D dA$$

Ta có thể tính

Chuyển sang tọa độ cực

$$I = 4\int_0^{2\pi}\int_0^3 r dr d\varphi = 4\int_0^{2\pi} d\varphi . \int_0^3 r dr = 36\pi$$

Chương 3

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

★ **3.2. Tích phân đường loại hai**

3.2.5. Điều kiện để tích phân đường loại 2 không phụ thuộc vào đường lấy tích phân

Nếu hai hàm P(x, y) và Q(x, y) liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong miền đơn liên D thì bốn mệnh đề sau tương đương

1. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

2. $\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ với mọi đường cong kín L nằm trong D

3. $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ chỉ phụ thuộc vào hai đầu mút A, B ; không phụ thuộc vào $\overset{\frown}{AB} \subset D$

4. Biểu thức P(x,y)dx + Q(x,y)dy là vi phân toàn phần của một hàm u(x, y) nào đó trong miền D

Hệ quả 1: Nếu Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của một hàm u(x, y) thì với mọi

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = u(B) - u(A) \quad \overset{\frown}{AB} \subset D$$

Hệ quả 2: Nếu D = R² thì Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của hàm u(x, y) cho bởi

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C \quad \text{hoặc}$$

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C$$

$M(x_0,y_0)$ là một điểm mà tại đó các hàm P, Q liên tục

Ví dụ 1 Tính $I = \oint_L \dfrac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2}$

với L là đường $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

Bài giải: Đặt

$$P(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2} \qquad Q(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$P'_y(x,y) = \frac{-x^2 - 2xy + y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad Q'_x(x,y) = \frac{-x^2 - 2xy + y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Vì $Q'_x(x,y) = P'_y(x,y)$, theo Định lý 4 mệnh đề tương đương thì

$$I = \oint_L \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2} = 0$$

4. CHƯƠNG 3. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

3.3.2. Cách tính

+ S = {(x, y, z): (x, y) ∈ D, z = z(x, y)}.

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$

+ S = {(x, y, z): (z, x) ∈ D, y = y(z, x)}.

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,dzdx$$

+ S = {(x, y, z): (y, z) ∈ D, x = x(y, z)}.

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}\,dydz$$

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$

Ví dụ 1: Tính $I_1 = \iint_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right)dS$

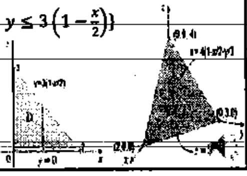
S là phần mặt phẳng $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ nằm trong phần $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

Bài giải: S = {(x, y, z): (x, y) ∈ D, $z = 4(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3})$ }

D là miền tam giác $\{(x,y): 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3\left(1-\frac{x}{2}\right)\}$

$$z_x' = -2, z_y' = \frac{4}{3}$$

$$dS = \sqrt{1+(-2)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}\,dxdy = \frac{\sqrt{61}}{3}dxdy$$

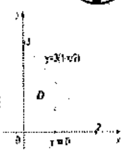


$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$

$$I_1 = \iint_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right)dS$$

$z = 4(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3})$ }

D là miền tam giác $\{(x,y): 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3\left(1-\frac{x}{2}\right)\}$



$$I_1 = \iint_D \left(4(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}) + 2x + \frac{4}{3}y\right)\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy$$

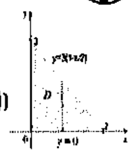
$$= \iint_D \frac{4\sqrt{61}}{3}dxdy = \frac{4\sqrt{61}}{3}\iint_D dxdy = \frac{4\sqrt{61}}{3}\frac{1}{2}3.2 = 4\sqrt{61}$$

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$

$$I_1 = \iint_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right)dS$$

$z = 4(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3})$ }

D là miền tam giác $\{(x,y): 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3\left(1-\frac{x}{2}\right)\}$



$$I_1 = \iint_D \left(4(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}) + 2x + \frac{4}{3}y\right)\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy$$

$$= \iint_D \frac{4\sqrt{61}}{3}dxdy = \frac{4\sqrt{61}}{3}\iint_D dxdy = \frac{4\sqrt{61}}{3}\frac{1}{2}3.2 = 4\sqrt{61}$$

Chương 3

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

☆ **3.3. Tích phân mặt loại một**

3.3.3. Ứng dụng của tích phân mặt loại 1:

• **Diện tích mặt S** $\iint_S dS$ $\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\Delta S_k = I(hh)$

• **Khối lượng và trọng tâm của tấm mỏng**

+ Nếu tấm mỏng S có khối lượng riêng tại M(x, y, z) là ρ(x, y, z) thì khối lượng của tấm mỏng S là

$$m = \iint_S \rho(x,y,z)dS$$

+ Toạ độ trọng tâm G được tính

$$x_G = \frac{1}{m}\iint_S x\rho(M)dS \quad y_G = \frac{1}{m}\iint_S y\rho(M)dS \quad z_G = \frac{1}{m}\iint_S z\rho(M)dS$$

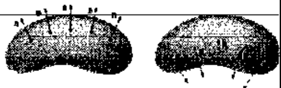
4. CHƯƠNG 3. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

Chương 3

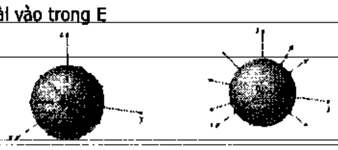
TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

★ **3.4. Tích phân mặt loại hai**

Có hai khả năng định hướng cho bất kỳ mặt cong nào định hướng được



Với mặt kín thì quy ước hướng dương là hướng mà các véc tơ pháp tuyến trỏ từ trong E ra ngoài, và hướng âm là hướng các véc tơ pháp tuyến trỏ từ ngoài vào trong E



Hướng âm　　Hướng dương

3.4.1. Định nghĩa tích phân mặt loại hai

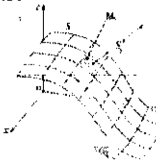
Giả sử mặt cong S đã định hướng

- Cho hàm P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) xác định trên S
- Chia S thành n mảnh nhỏ tuỳ ý không dẫm lên nhau

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$$

- Gọi ΔS_i là diện tích của mảnh S_i
- Lấy tuỳ ý $M_i(x_i, y_i, z_i) \in S_i$
- Gọi vectơ pháp tuyến đơn vị của S tại M_i là

$$\vec{n}(M_i) = (\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i)$$



3.4.2. Định nghĩa tích phân mặt loại hai

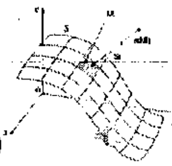
Giả sử mặt cong S đã định hướng

- Cho hàm P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) xác định trên S
- Chia S thành n mảnh nhỏ tuỳ ý không dẫm lên nhau

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$$

- Gọi ΔS_i là diện tích của mảnh S_i
- Lấy tuỳ ý $M_i(x_i, y_i, z_i) \in S_i$
- Gọi vectơ pháp tuyến đơn vị của S tại M_i là

$$\vec{n}(M_i) = (\cos\alpha_i, \cos\beta_i, \cos\gamma_i)$$



$$I_n = \sum_{i=1}^{n} (P(M_i)\cos\alpha_i + Q(M_i)\cos\beta_i + R(M_i)\cos\gamma_i)\Delta S_i$$

Nếu tồn tại $I = \lim_{n\to\infty} I_n \quad (hh)$

không phụ thuộc cách chia mặt S, cách chọn điểm M_i thì I được gọi là tích phân mặt loại hai của các hàm P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) trên mặt S.

Kí hiệu

$$\iint_S (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)dS$$

hoặc

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

Chú ý: $M \in V \subset R^3$, $\vec{F}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$

xác định một trường véc tơ, gốc tại M với các toạ độ P(M), Q(M), R(M) là những hàm số của M.

Cho mặt định hướng S, thông lượng của trường véc tơ qua mặt S là:

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

+ Nếu đổi hướng lấy tích phân trên mặt S thì tích phân đổi dấu

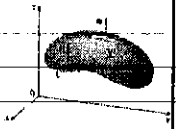
+ Tích phân mặt loại hai có các tính chất tương tự tích phân kép

4. CHƯƠNG 3. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

3.4.4. Công thức Stokes: Giả sử S là mặt định hướng trơn từng mảnh có biên là đường kín L trơn từng khúc.

Nếu các hàm P(x, y, z), Q(x, y, z) và R(x, y, z) liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trên S thì ta có:

$$\oint_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$



chiều lấy tích phân trên L là chiều sao cho nếu đi dọc theo chiều ấy, véctơ pháp tuyến hướng từ chân lên đầu thì nhìn thấy phần mặt S kề ở bên trái.

$$\oint_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Ví dụ 2: Tính $I = \oint_L -y^2dx + xdy + z^2dz$

với L là giao của mặt phẳng y + z = 2 với mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ (hướng L là ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ trên).

Lời giải: Đường cong L là một ellipse (xem hình vẽ)

Chọn S là phần của mặt phẳng y + z = 2 giới hạn bởi L

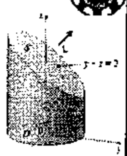
$P = -y^2, Q = x, R = z^2, \quad R'_y = Q'_z = P'_z = R'_x = 0,$

$Q'_x = 1, P'_y = -2y \qquad I = \iint_S (1+2y)\,dxdy$

$I = \iint_S (1+2y)\,dxdy \quad D = Ch_{xOy}S : x^2 + y^2 \le 1$

$y + z = 2 \Rightarrow z = 2 - y \qquad (\vec{n}, Oz)$ là góc nhọn

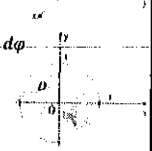
$I = \iint_D (1+2y)\,dxdy$



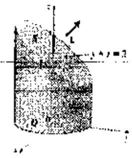
Chuyển sang tọa độ cực, D': $0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 1$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + 2r\sin\varphi)rdrd\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{2r^3}{3}\sin\varphi\right)\Big|_0^1 d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin\varphi\right)d\varphi = \left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{2}{3}\cos\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \pi$$



$$\oint_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$



$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

3.4.5. Điều kiện để tích phân đường trong không gian không phụ thuộc đường lấy tích phân

Giả sử mọi đường cong kín L trơn từng khúc trong miền đơn liên $D \subset R^3$ đều là biên của một mặt trơn từng mảnh nằm hoàn toàn trong D. Điều kiện cần và đủ $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ không phụ thuộc vào đường nối A, B nằm hoàn toàn trong D là:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

3.4.6. Công thức Ostrogradsky:

Giả sử V là miền giới nội trong R^3 với biên là mặt kín S, định hướng dương. P(x,y,z), Q(x,y,z) và R(x,y,z) là ba hàm số liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong V. Khi đó ta có :

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

5. CHƯƠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Chương 4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

4.1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

4.1.1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

Dạng tổng quát: F(x, y, y') = 0 (1)

Hoặc y' = f(x, y) (2)

Ví dụ: $y' = 0$ $\quad y' = \frac{y}{x}$ $\quad y' = \frac{x+y}{x-y}$

Định lý: f(x, y) liên tục trong miền $D \subset (xOy), (x_0, y_0) \in D$

Khi đó trong một lân cận của $x = x_0$, tồn tại ít nhất một nghiệm y = y(x) của (2) sao cho $y(x_0) = y_0$.

Nếu $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ cũng liên tục trên D thì nghiệm là duy nhất

+ $y(x_0) = y_0$: **điều kiện đầu** ($y|_{x=x_0} = y_0$)

+ **Bài toán Cauchy:** tìm nghiệm của (2) thỏa mãn điều kiện ban đầu

Các loại nghiệm của phương trình y' = f(x, y) (2)

- **Nghiệm tổng quát** của (2): y = φ(x, C), C - const
  + φ(x, C) thoả mãn (2) với mọi C.
  + Mọi (x_0, y_0) thỏa mãn điều kiện định lí, tìm được C_0 để $y = \varphi(x, C_0)$ thoả mãn điều kiện đầu.
- **Tích phân tổng quát:** Φ(x, y, C) = 0 (nghiệm tổng quát dạng ẩn).
- **Nghiệm riêng:** $y = \varphi(x, C_0)$ (cho $C = C_0$)
- **Tích phân riêng:** $\Phi(x, y, C_0) = 0$

Ví dụ: tìm nghiệm của phương trình vi phân y' = x thỏa mãn điều kiện y(1) = 0

Hướng dẫn:

$$y' = x \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{2} + C \quad (*) \quad \text{(Nghiệm tổng quát)}$$

Do y(1) = 0 nên thay vào (*) được

$$0 = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Nghiệm riêng của phương trình đã cho thỏa mãn điều kiện ban đầu là

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

4.1.2. PHƯƠNG TRÌNH VỚI BIẾN SỐ PHÂN LY

a) Dạng 1: **f(x)dx = g(y)dy (1)**

Tích phân 2 vế được $\int f(x)dx = \int g(y)dy \Leftrightarrow$ **F(x) = G(y) + C**

(F(x), G(y) tương ứng là nguyên hàm của f(x), g(y))

$$y = y(x) \Rightarrow dy = y'(x)dx \Rightarrow y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

5. CHƯƠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

*** Chú ý:** cho PTVP $y' = f(x,y)$

Cách nhận biết PT thuần nhất

- Kiểm tra đẳng thức $f(tx,ty) = f(x,y)$ (mọi t)
- Cho $t = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

Ví dụ: xét phương trình $y' = \frac{x+y}{x-y}$

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y} \qquad f(tx,ty) = \frac{tx+ty}{tx-ty} = \frac{t(x+y)}{t(x-y)} = \frac{x+y}{x-y} = f(x,y)$$

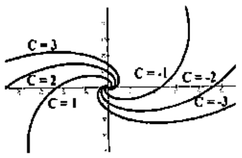
Ví dụ: Giải phương trình $y' = \frac{x+y}{x-y}$ (1)

$(1) \Leftrightarrow y' = \dfrac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$ (2) Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = u.x \Rightarrow y' = u'.x + u$

Thay vào (2): $u'x + u = \frac{1+u}{1-u} \Leftrightarrow u'x = \frac{1+u}{1-u} - u \Leftrightarrow \frac{du}{dx}.x = \frac{1+u^2}{1-u}$

$$\Leftrightarrow \frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{1-u}{1+u^2}du = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{du}{1+u^2} - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+u^2)}{1+u^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow \arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|x| + C \Leftrightarrow \arctan\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = \ln|x| + C$$



4.1.4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP 1

Dạng tổng quát: $y' + p(x)y = q(x)$ **(1)**

($p(x)$, $q(x)$ liên tục)

Phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng: $y' + p(x)y = 0$ **(2)**

*** Cách giải PT (1)** (pp biến thiên hằng số)

+ Bước 1: giải PT (2)

$y \neq 0$ thì (2) $\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C| \Leftrightarrow \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int p(x)dx \Leftrightarrow \left|\frac{y}{C}\right| = e^{-\int p(x)dx}$$

$$\Leftrightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

y = 0 là 1 nghiệm riêng của (2) (ứng với C = 0)

+ Bước 2: xem C là hàm số.

Tìm nghiệm của (1) dưới dạng $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ (*)

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)(-p(x))e^{-\int p(x)dx}$$

Thay y và y' vào PT (1) được

$$C'(x)e^{\int p(x)dx} + C(x)(-p(x))e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

$$\Rightarrow C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + K$$

Thay vào (*) ta có nghiệm tổng quát của (1) là:

$$y = \left(K + \int q(x)e^{\int p(x)dx}\right)e^{-\int p(x)dx} = Ke^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$y' + p(x)y = q(x)$ (1)

5. CHƯƠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

4.2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2

4.2.1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 2

Dạng tổng quát: **F(x,y,y',y") = 0** **(1)**

Hoặc **y" = f(x,y,y')** **(2)**

Định lý: Nếu hàm f(x,y,y') trong phương trình (2) liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một theo y và y' trong một miền $D \subset \mathbb{R}^3$ thì với mọi điểm $(x_0, y_0, z_0) \in D$, tồn tại một lân cận nào đó để trong đó phương trình (2) tồn tại duy nhất nghiệm y = y(x) thỏa mãn $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y_1$

*** Bài toán Cauchy:** Tìm nghiệm của PTVP F(x,y,y',y") = 0 thỏa mãn điều kiện **$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$**

Các loại nghiệm của phương trình vi phân cấp hai

+ Nghiệm tổng quát: **$y = y(x, C_1, C_2)$**

+ Nghiệm riêng: **$y = y(x, C_1^0, C_2^0)$**

+ Tích phân tổng quát: $\phi(x, y, C_1, C_2) = 0$

+ Tích phân riêng: $\phi(x, y, C_1^0, C_2^0) = 0$

Ví dụ: tìm nghiệm của phương trình vi phân y" = x thỏa mãn y(1) = 0, y'(1) = 1

$$y'' = x \Leftrightarrow y' = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1 \Leftrightarrow y = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) dx = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

(Nghiệm tổng quát)

Do y(1) = 0 nên $0 = \frac{1}{6} + C_1 + C_2$ (1)

Do y'(1) = 1 nên $1 = \frac{1}{2} + C_1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$

Nghiệm của pt đã cho thỏa mãn điều kiện đầu là $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$

4.2.2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI TUYẾN TÍNH CÓ HỆ SỐ KHÔNG ĐỔI

PT không thuần nhất **y" + py' + qy = f(x)** (1)

(p, q là hằng số)

PT thuần nhất tương ứng **y" + py' + qy = 0** (2)

Định lý: Nghiệm tổng quát của (1) có thể viết dưới dạng

$$y(x) = y_{R(1)}(x) + y_{TQ(2)}(x)$$

$y_{R(1)}$: nghiệm riêng của (1).

$y_{TQ(2)}$: nghiệm tổng quát của (2).

VP (5) = $8e^{-3x}$ ($\alpha = -3$ trùng với 1 nghiệm đơn của pt đặc trưng)

Nghiệm riêng của pt (5) có dạng $y_R = Axe^{-3}$

$y_R' = e^{-3x}(A - 3Ax)$ $\quad y_R'' = e^{-3x}(-6A + 9Ax)$

Thay y, y', y'' vào pt (5) được

$e^{-3x}(-6A + 9Ax - 2A + 6Ax - 15Ax) = 8e^{-3x}$

Suy ra $-8A = 8 \Leftrightarrow A = -1$ $\quad$ Vậy $y_R = -xe^{-3}$

Nghiệm tổng quát của (5) là $y = C_1e^{5x} + C_2e^{-3} - xe^{-3x}$

$\Rightarrow y' = 5C_1e^{5x} - 3C_2e^{-3x} - e^{-3}(1 - 3x)$

$\left[\begin{array}{l} k = 5 \\ k = -3 \end{array}\right.$

$y'' - 2y' - 15y = 8e^{-3x}$ (5)

Thay vào $z = \frac{1}{8}(y' - y - e^x)$

$= \frac{1}{8}(5C_1e^{5x} - 3C_2e^{-3} - e^{-3x} + 3xe^{-3x} - C_1e^{5x} - C_2e^{-3} + xe^{-3} - e^x)$

$= \frac{1}{8}(4C_1e^{5x} - 4C_2e^{-3x} - e^{-3x} + 4xe^{-3} - e^x)$

$y = C_1e^{5x} + C_2e^{-3x} - xe^{-3x}$

$y' = 5C_1e^{5x} - 3C_2e^{-3x} - e^{-3x}(1 - 3x)$

TỔNG KẾT ĐỀ TÀI

Đề tài đã xây dựng bài giảng lý thuyết của học phần Giải tích 2 trên phần mềm Powerpiont, sau đó tiến hành quay 44 video bài giảng làm tài liệu học trực quan, sinh động cho sinh viên trường đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] James Stewart (2010), Single variable calculus Early Transcendentals 7th edition, Cengage Learning.

[2] Ôn Ngũ Minh (2012), Bài giảng toán 1, Đại học KTCN Thái Nguyên.

[3] Ôn Ngũ Minh (2011), *Bài giảng học phần Toán 3*, Lưu hành nội bộ - Trường Đại học kỹ thuật công nghiệp - Đại học Thái Nguyên.

[4] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2004), Toán học cao cấp Tập 1- NXB Giáo dục 2004.

[5] Trần Bình- Bài tập giải tích 1- NXB Khoa học và kĩ thuật, 2009

[6] Nguyễn Đình Trí , Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh- Toán học cao cấp tập 3- NXB Giáo dục, 2004

IV. LỜI CẢM ƠN

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn Trường Đại Học Kỹ Thuật Công Nghiệp, ĐH Thái Nguyên đã tài trợ kinh phí cho chúng tôi hoàn thành đề tài này. Xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo bộ môn Toán, Khoa Khoa học cơ bản và ứng dụng; các thầy cô giáo bộ môn Khoa học tự nhiên, khoa Quốc Tế và bạn bè đồng nghiệp cũng như các em sinh viên trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên đã giúp đỡ chúng tôi trong quá trình hoàn thiện đề tài.

THUYẾT MINH ĐỀ TÀI
KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP TRƯỜNG NĂM 2022

1. TÊN ĐỀ TÀI: Xây dựng ngân hàng video bài giảng học phần Giải tích 2	**2. MÃ SỐ: T2022- VD19**
3. LĨNH VỰC NGHIÊN CỨU Khoa học Tự nhiên [x] Khoa học Kỹ thuật và Công nghệ [ ] Khoa học Y, dược [ ] Khoa học Nông nghiệp [ ] Khoa học Xã hội [ ] Khoa học Nhân văn [ ]	**4. LOẠI HÌNH NGHIÊN CỨU** Cơ bản [x] Ứng dụng [ ] Triển khai [ ]

5. THỜI GIAN THỰC HIỆN DỰ KIẾN: 12 tháng

Từ tháng 4 năm 2022 đến tháng 4 năm 2023

6. CHỦ NHIỆM ĐỀ TÀI

Họ và tên: Nguyễn Thị Huệ Học vị: Thạc sĩ

Chức danh khoa học: Năm sinh: 1986

Địa chỉ cơ quan: Đường 3/2, Phường Tích Lương, Thành Phố Thái Nguyên, Tỉnh Thái Nguyên

Điện thoại di động: 0976909891

Fax:

Điện thoại cơ quan:

E-mail: nguyenthihue@tnut.edu.vn

7. NHỮNG THÀNH VIÊN THAM GIA NGHIÊN CỨU ĐỀ TÀI

TT	Họ và tên	Đơn vị công tác và lĩnh vực chuyên môn	Nội dung nghiên cứu cụ thể được giao	Chữ ký
1	Nguyễn Thị Huệ	Khoa KHCB, Chuyên môn Toán	Xây dựng thuyết minh đề tài. Xây dựng nội dung bài giảng và quay video các tiết dạy trong chương 1. Viết báo cáo nghiệm thu đề tài.	
2	Ngô Thành Trung	Khoa KHCB, Chuyên môn Toán	Xây dựng nội dung bài giảng và quay video các tiết dạy trong chương 2	
3	Nguyễn Thị Phương	Khoa KHCB, Chuyên môn Toán	Xây dựng nội dung bài giảng và quay video các tiết dạy trong chương 3.	
4	Nguyễn Thị Minh Ngọc	Khoa KHCB, Chuyên môn Toán	Xây dựng nội dung bài giảng và quay video các	

			tiết dạy trong chương 4.	

8. ĐƠN VỊ PHỐI HỢP CHÍNH

Tên đơn vị trong và ngoài nước	Nội dung phối hợp nghiên cứu	Họ và tên người đại diện đơn vị

9. TỔNG QUAN TÌNH HÌNH NGHIÊN CỨU THUỘC LĨNH VỰC CỦA ĐỀ TÀI Ở TRONG VÀ NGOÀI NƯỚC

9.1. Trong nước *(phân tích, đánh giá tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực của đề tài ở Việt Nam, liệt kê danh mục các công trình nghiên cứu, tài liệu có liên quan đến đề tài được trích dẫn khi đánh giá tổng quan)*

Hiện nay với sự phát triểm của internet và mạng xã hội, các em sinh viên có thể dễ dàng tìm kiếm được những video bài giảng về học phần Giải tích 2 trên Youtube hoặc những kênh khác, tuy nhiên bên cạnh những kênh bài giảng chất lượng thì cũng có nhiều kênh chưa được kiểm chứng về độ uy tín và chính xác. Hơn nữa, các video bài giảng mà các em tìm kiếm được cũng có thể không trùng khớp với nội dung kiến thức và yêu cầu của môn học Giải tích 2 đang được giảng dạy tại trường Đại học Kĩ thuật Công Nghiệp.

9.2. Ngoài nước *(phân tích, đánh giá tình hình nghiên cứu thuộc lĩnh vực của đề tài trên thế giới, liệt kê danh mục các công trình nghiên cứu, tài liệu có liên quan đến đề tài được trích dẫn khi đánh giá tổng quan)*

9.3. Danh mục các công trình đã công bố thuộc lĩnh vực của đề tài của chủ nhiệm và những thành viên tham gia nghiên cứu (*họ và tên tác giả; bài báo; ấn phẩm; các yếu tố về xuất bản*)

a) Của chủ nhiệm đề tài

Nguyen Thi Hue - Applications of generalized quasi - equilibrium problem, số 162, ISSN 1859-2171, trang 155-158, Tạp chí Khoa học và Công nghệ, 2017.

Nguyen Thi Hue - Using method of Lagrange multipliers in the problem of finding absolute maximum and minimum of funtion of tow variables, số 172, ISSN 1859-2171, trang 21-24, Tạp chí Khoa học và Công nghệ, 2017

b) Của các thành viên tham gia nghiên cứu

(Những công trình được công bố trong 5 năm gần nhất)

10. TÍNH CẤP THIẾT CỦA ĐỀ TÀI

Học phần Giải tích 2 là học phần toán dành cho sinh viên năm thứ 2 của trường Đại học Kĩ thuật công nghiệp có thời lượng 3 tín chỉ với khối lượng kiến thức rất lớn. Nếu sinh viên không tự khắc phục được những nhược điểm của việc học online thì đa số các em sẽ rất khó nắm vững kiến thức của học phần này. Vì vậy yêu cầu thực tiễn của việc dạy học online môn Giải tích 2 trong tình hình dịch bệnh Covid- 19 là các em sinh viên cần có thêm những kênh tự học khác ngoài giờ tham gia lớp học để có thể nắm vững kiến thức của môn học. Chúng tôi nhận thấy rằng việc học qua video bài giảng là một kênh tự học mang tính trực quan, sinh động và thuận lợi cho người dạy cũng như người học về thời gian. Do đó chúng tôi đề xuất xây dựng ngân hàng video bài giảng cho môn học Giải tích 2 nhằm cung cấp cho sinh viên một kênh tự học bổ ích, đồng thời ngân hàng video bài giảng cũng sẽ góp phần tạo điều kiện cho cả thầy, cô và sinh viên có nhiều thời gian thảo luận, trao đổi hơn trong những giờ lên lớp.

1. **11. MỤC TIÊU ĐỀ TÀI:** Xây dựng các video bài giảng tương ứng 45 tiết lý thuyết của

môn học Giải tích 2.

12. ĐỐI TƯỢNG, PHẠM VI NGHIÊN CỨU

12.1. Đối tượng nghiên cứu: Nghiên cứu nội dung học phần Giải tích 2

12.2. Phạm vi nghiên cứu: Tiến hành quay video các tiết giảng dạy học phần Giải tích 2.

13. CÁCH TIẾP CẬN, PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

13.1. Cách tiếp cận: phương pháp tổng hợp tài liệu và quay video

13.2. Phương pháp nghiên cứu: Thiết kế nội dung từng tiết dạy học phần giải tích 2 và tiến hành quay video.

14. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU VÀ TIẾN ĐỘ THỰC HIỆN

14.1. Nội dung nghiên cứu (***Mô tả chi tiết những nội dung nghiên cứu của đề tài***)

- Thiết kế và xây dựng nội dung bài giảng cho 45 tiết giảng dạy lí thuyết của học phần Giải tích 2.
- Tiến hành quay các video tương ứng với 45 tiết giảng dạy lí thuyết của học phần Giải tích 2.

14.2. Tiến độ thực hiện

STT	Các nội dung, công việc thực hiện	Sản phẩm	Thời gian (bắt đầu-kết thúc)	Người thực hiện
1	Xây dựng thuyết minh đề tài Xây dựng nội dung bài giảng và quay video các tiết dạy trong chương 1.	Thuyết minh Các video về nội dung giảng dạy chương 1	4/2022- 4/2023 4/2022- 4/2023	ThS. Nguyễn Thị Huệ
2	Xây dựng nội dung bài giảng và quay video các tiết dạy trong chương 2.	Các video về nội dung giảng dạy chương 2	4/2022- 4/2023	ThS.Ngô Thành Trung
3	Xây dựng nội dung bài giảng và quay video các tiết dạy trong chương 3.	Các video về nội dung giảng dạy chương 3	4/2022- 4/2023	ThS. Nguyễn Thị Phương
4	Xây dựng nội dung bài giảng và quay video các tiết dạy trong chương 4.	Các video về nội dung giảng dạy chương 4	4/2022- 4/2023	ThS. Nguyễn Thị Minh Ngọc
5	Viết báo cáo nghiệm thu đề tài	Báo cáo nghệm thu.	4/2022- 4/2023	ThS.Nguyễn Thị Huệ

15. SẢN PHẨM

Stt	Tên sản phẩm	Số lượng	Yêu cầu chất lượng sản phẩm *(mô tả chi tiết chất lượng sản phẩm đạt được như nội dung, hình thức, các chỉ tiêu, thông số kỹ thuật,...)*
I	Sản phẩm khoa học (Các công trình khoa học sẽ được công bố: sách, bài báo khoa học, ..):		
1.1			

1.2			
...			
II	Sản phẩm đào tạo (cử nhân, thạc sĩ, tiến sĩ,...): 0		
2.1			
2.2			
...			
III	Sản phẩm ứng dụng:		
3.1	Các video bài giảng làm kênh tham khảo cho sinh viên trường ĐHKTCN Thái Nguyên.		
3.2			
...			

16. PHƯƠNG THỨC CHUYỂN GIAO KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU VÀ ĐỊA CHỈ ỨNG DỤNG

16.1. Phương thức chuyển giao: Trực tiếp

16.2. Địa chỉ ứng dụng: Trường Đại học Kĩ thuật Công nghiệp Thái Nguyên

17. TÁC ĐỘNG VÀ LỢI ÍCH MANG LẠI CỦA KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

17.1. Đối với lĩnh vực giáo dục và đào tạo: Nâng cao chất lượng dạy và học.

17.2. Đối với lĩnh vực khoa học và công nghệ có liên quan

17.3. Đối với phát triển kinh tế-xã hội

17.4. Đối với tổ chức chủ trì và các cơ sở ứng dụng kết quả nghiên cứu

18. KINH PHÍ THỰC HIỆN ĐỀ TÀI

Tổng kinh phí: 5.400.000

Bằng chữ: Năm triệu bốn trăm nghìn đồng chẵn.

Ngày 15 tháng 4 năm 2022

Chủ nhiệm đề tài

Nguyễn Thị Huế

PHÒNG KHCN &HTQT

HỘI ĐỒNG KHOA KHCB

Nguyễn Văn Trường

KT. HIỆU TRƯỞNG

PHÓ HIỆU TRƯỞNG

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

PGS. TS. Vũ Ngọc Pi

ĐVT: VNĐ

DỰ TOÁN KINH PHÍ ĐỀ TÀI KH&CN CẤP TRƯỜNG NĂM ...

Tên đề tài: Xây dựng ngân hàng video bài giảng học phần Giải tích 2

Chủ nhiệm đề tài: ThS. Nguyễn Thị Huệ

Thành viên chính: ThS. Ngô Thành Trung, ThS. Nguyễn Thị Phương, ThS. Nguyễn Thị Minh Ngọc

Thành viên:

ĐVT: VNĐ

STT	Nội dung	Dự toán			
1	*Mục chi tiền công lao động tham gia trực tiếp (1)*	Người thực hiện	Số ngày công	Hệ số tiền công theo ngày (2)*	Thành tiền
1,1	Xây dựng thuyết minh đề tài Xây dựng nội dung bài giảng và quay video các tiết dạy trong chương 1.	ThS.Nguyễn Thị Huệ	2	0,45	1.341.000
1.2	Xây dựng nội dung bài giảng và quay video các tiết dạy trong chương 2.	ThS. Ngô Thành Trung	2	0,3	894.000
1.3	Xây dựng nội dung bài giảng và quay video các tiết dạy trong chương 3.	ThS. Nguyễn Thị Phương	2	0,3	894.000
1.4	Xây dựng nội dung bài giảng và quay video các tiết dạy trong chương 4.	ThS. Nguyễn Thị Minh Ngọc	2	0,3	894.000
1,5	Viết báo cáo nghiệm thu đề tài.	ThS.Nguyễn Thị Huệ	2	0,45	1.341.000
	Tổng 1				**5.364.000**
2	*Chi khác*				
2,1	Văn phòng phẩm, in ấn				36.000
	Tổng 2				**36.000**
	Tổng 1+2				**5.400.000**

** 0,45 là hệ số của chủ nhiệm đề tài; 0,3 là hệ số của thành viên chính; 0,15 là hệ số của thành viên*

Cơ quan chủ trì
HIỆU TRƯỞNG
PHÓ HIỆU TRƯỞNG

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

PGS.TS. Vũ Ngọc Pi

TRƯỞNG PHÒNG KHCN&HTQT

CHỦ NHIỆM ĐỀ TÀI

Nguyễn Thị Huệ

TRƯỞNG PHÒNG KH-TC