TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

KHOA XÂY DỰNG VÀ MÔI TRƯỜNG

BỘ MÔN KIẾN TRÚC

BÀI GIẢNG HỌC PHẦN: CƠ HỌC KẾT CẤU 2

Theo chương trình đào tạo 150 TC

Số tín chỉ: 02

Thái Nguyên, năm 2023

MỤC LỤC

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN　　CỘNG HOÀ XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC　　**Độc lập-Tự do-Hạnh phúc**

KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP

CHƯƠNG TRÌNH GIÁO DỤC ĐẠI HỌC

NGÀNH ĐÀO TẠO: KỸ THUẬT XÂY DỰNG CÔNG TRÌNH

CHUYÊN NGÀNH: KỸ THUẬT XÂY DỰNG CÔNG TRÌNH

ĐỀ CƯƠNG CHI TIẾT HỌC PHẦN: CƠ HỌC KẾT CẤU 2

(HỌC PHẦN BẮT BUỘC)

1. Tên học phần: Cơ học kết cấu 2 (FIM416)

2. Số tín chỉ: 2

3. Trình độ cho sinh viên năm thứ: 4

4. Phân bổ thời gian:

- Lên lớp lý thuyết: 2 (tiết/tuần) x 12 (tuần) = 24 tiết.
- Thảo luận, bài tập: 1 (tiết/tuần) x 12 (tuần) = 12 tiết.
- Hướng dẫn bài tập lớn (dài): Không
- Tổng số tiết thực dạy: (2+1)x12 = 36 tiết thực hiện.
- Tổng số tiết chuẩn: 2x12+1x12/2 = 30 tiết chuẩn.

5. Các học phần học trước: Cơ học kết cấu I

6. Học phần thay thế, học phần tương đương:Tương đương với học phần Cơ học kết cấu 2 trong chương trình 180 tín chỉ.

7. Mục tiêu của học phần

Cơ học kết cấu 2 trang bị cho sinh viên kiến thức cần thiết để xác định chuyển vị trong hệ thanh phẳng, phương pháp lực và phương pháp chuyển vị để tính hệ siêu tĩnh để vận dụng vào các môn chuyên ngành như bê tông cốt thép, kết cấu thép….

8. Mô tả vắn tắt nội dung học phần

Môn học này nhằm trang bị cho sinh viên các kiến thức cơ bản và kỹ năng tính toán nội lực của các hệ thanh siêu tĩnh làm việc trong giai đoạn đàn hồi tuyến tính.

Nội dung chính của môn học bao gồm các vấn đề sau:

- Xác định chuyển vị trong hệ thanh phẳng đàn hồi tuyến tính
- Khái niệm về hệ siêu tĩnh - bậc siêu tĩnh.
- Phương pháp lực và cách tính hệ thanh phẳng siêu tĩnh
- Phương pháp chuyển vị tính hệ thanh phẳng siêu động

9. Nhiệm vụ của sinh viên: Đối với học phần lý thuyết

- Dự lớp ≥ 80 % tổng số thời lượng của học phần.

- Chuẩn bị thảo luận.

- Nghiên cứu thêm tài liệu trong thời gian tự học.

10. Tài liệu học tập và tham khảo

- Sách, giáo trình chính:

1. Hà Thanh Tú; Bài giảng Cơ học kết cấu 2.

2. Lều Thọ Trình; Bài tập Cơ học kết cấu - Tập II; Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật; 2003.

- Sách tham khảo:

3. Lều Thọ Trình; Cơ học kết cấu - Tập II; Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật; 2003.

4. Lều Thọ Trình; Cơ học kết cấu - Tập I; Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật; 2003.

5. Lều Thọ Trình; Bài tập Cơ học kết cấu - Tập I; Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật; 2003.

6. Lê Ngọc Hồng; Sức bền vật liệu; Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật; 2000.

11. Tiêu chuẩn đánh giá sinh viên và thang điểm

*** Tiêu chuẩn đánh giá**

- Chuyên cần
- Thảo luận, bài tập
- Kiểm tra giữa học phần
- Thi kết thúc học phần

*** Thang điểm**

- Chuyên cần: 10 %
- Thảo luận, bài tập: 10 %
- Kiểm tra giữa học phần: 20 %
- Thi kết thúc học phần: 60%.

12. Nội dung chi tiết học phần

- Số tuần dạy lý thuyết: 08 tuần.
- Số tuần thảo luận, bài tập: 04 tuần.
- Số tuần thực dạy: 12 tuần.
- Kiểm tra: 01 tuần.
- Số tiết/tuần: 03 tiết.

Tuần thứ	Nội dung	Tài liệu học tập và tham khảo	Hình thức học
1	Chương I. **CHUYỂN VỊ TRONG HỆ THANH** 1.1. Khái niệm về biến dạng và chuyển vị 1.2. Cách xác định chuyển vị theo thế năng 1.3. Công khả dĩ của ngoại lực và nội lực 1.4. Các định lý tương hỗ trong hệ đàn hồi tuyến tính	1,2,3,4,5,6	Giảng
2	1.5. Công thức chuyển vị trong hệ thanh đàn hồi tuyến tính 1.6. Cách vận dụng công thức chuyển vị 1.7. Cách tính chuyển vị theo cách "nhân biểu đồ"	1,2,3,4,5,6	Giảng
3	Thảo luận + Bài tập	1,2,3,4,5,6	Thảo luận
4	Chương II. **TÍNH HỆ SIÊU TĨNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰC** 2.1. Khái niệm hệ siêu tĩnh - Bậc siêu tĩnh 2.2. Nội dung của phương pháp lực 2.3. Xác định chuyển vị trong hệ siêu tĩnh	1,2,3,4,5,6	Giảng
5	2.4. Kiểm tra kết quả tính toán của phương pháp lực 2.5. Một số điều cần chú ý khi tính hệ siêu tĩnh bậc cao	1,2,3,4,5,6	Giảng
6	Thảo luận + Bài tập	1,2,3,4,5,6	Thảo luận
7	2.6. Cách vận dụng tính chất đối xứng của hệ đối xứng 2.7. Sử dụng các thanh tuyệt đối cứng để thay đổi vị trí và phương các ẩn số nhằm đơn giản hoá cấu trúc của hệ phương trình chính tắc	1,2,3,4,5,6	Giảng
8	Kiểm tra giữa kỳ		
9	Thảo luận + Bài tập	1,2,3,4,5,6	Thảo luận

10	2.8. Hệ dàn siêu tĩnh 2.9. Dầm liên tục	1,2,3,4,5,6	Giảng
11	Chương III. **PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ** 3.1. Các khái niệm 3.2. Nội dung của phương pháp chuyển vị	1,2,3,4,5,6	Giảng
12	3.3. Các ví dụ về phương pháp chuyển vị 3.4. Xác định chuyển vị trong hệ siêu động 3.5. Tính hệ có nút không chuyển vị thẳng chỉ chịu tải trọng là các lực tập trung tại nút	1,2,3,4,5,6	Giảng
13	Thảo luận + Bài tập	1,2,3,4,5,6	Thảo luận

I. CHƯƠNG 1
CHUYỂN VỊ TRONG HỆ THANH

I.1. Mục tiêu

Nghiên cứu cách xác định chuyển vị trong hệ thanh nhằm mục đích kiểm tra độ cứng của công trình và phục vụ cho việc tính toán hệ siêu tĩnh. Trong chương này giúp cho sinh viên hiểu rõ các vấn đề như sau:

+ Nắm vững khái niệm về biến dạng và chuyển vị.

+ Phân biệt rõ biến dạng và chuyển vị, mối quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị.

+ Các phương pháp dùng để xác định chuyển vị trong hệ thanh.

I.2. Quy định hình thức học cho mỗi nội dung nhỏ

Nội dung	Hình thức học
- Khái niệm về biến dạng và chuyển vị	Giảng
- Cách xác định chuyển vị theo thế năng	Giảng
- Công khả dĩ của ngoại lực và nội lực	Giảng
- Các định lý tương hỗ trong hệ đàn hồi tuyến tính	Giảng
- Cách vận dụng công thức chuyển vị	Giảng, thảo luận
- Cách tính các tích phân trong công thức chuyển vị theo cách "nhân biểu đồ"	Giảng, thảo luận
- Cách tính gần đúng các tích phân trong công thức chuyển vị	Sinh viên tự nghiên cứu
- Khái niệm về chuyển vị khái quát và lực khái quát	Sinh viên tự nghiên cứu

I.3. Các nội dung cụ thể

A. <u>Nội dung lý thuyết</u>

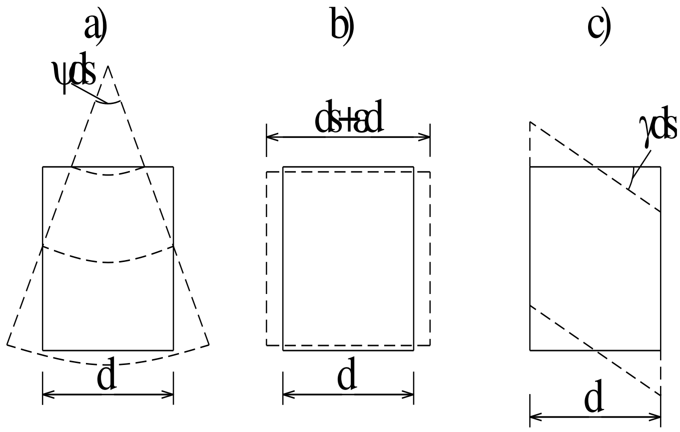
1.1. Khái niệm về biến dạng và chuyển vị

1.1.1. Biến dạng

Biến dạng: là sự thay đổi hình dạng của phân tố dưới tác dụng của các nguyên nhân như tải trọng, biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức các gối tựa…

Biến dạng của phân tố (*hình 1.1.1*) bao gồm:

1. Biến dạng xoay: Ψds, với Ψ- góc xoay tỉ đối (*hình 1.1.1a*).
2. Biến dạng dọc trục: εds, với ε- biến dạng dọc trục tỉ đối (*hình 1.1.1b*).
3. Biến dạng trượt: γds, với γ- góc trượt tỉ đối (*hình 1.1.1c*).



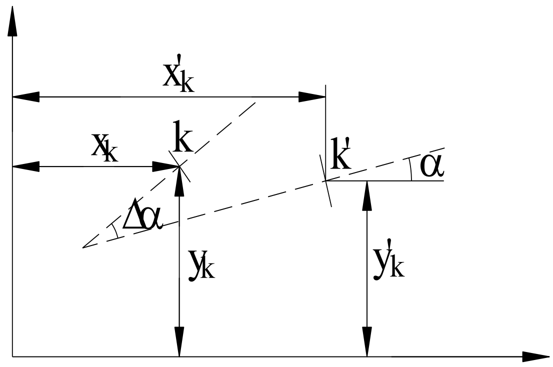
Hình 1.1.1

1.1.2. Chuyển vị

Chuyển vị: là sự thay đổi vị trí của tiết diện dưới tác dụng của các nguyên nhân như tải trọng, biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức gối tựa…

Khi hệ biến dạng hầu hết các tiết diện đều có vị trí mới. Như vậy có thể nói chuyển vị là hệ quả của biến dạng.

Chuyển vị tại tiết diện k:



Hình 1.1.2

♦ Chuyển vị thẳng :

- Theo phương x: $\Delta x = x_k' - x_k$
- Theo phương y: $\Delta y = y_k' - y_k$

♦ Chuyển vị góc: $\Delta\alpha = \alpha_k' - \alpha_k$

Kí hiệu chuyển vị:

Giả sử có chuyển vị Δ_{km}

Trong đó: k là chỉ số chỉ vị trí và phương của chuyển vị

m là chỉ số chỉ nguyên nhân gây ra chuyển vị

Như vậy :

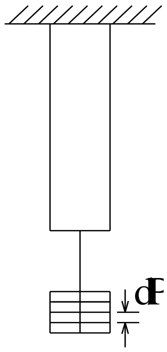
Δ_{km} - chuyển vị theo phương k do nguyên nhân m gây ra

δ_{km} - chuyển vị theo phương k do nguyên nhân m bằng đơn vị gây ra

1.2. Cách xác định chuyển vị theo thế năng

1.2.1. Nguyên lí bảo toàn năng lượng

Xét thanh chịu nén đúng tâm như hình vẽ:



Hình 1.2.1

Tăng dP → lực hạ thấp ↗ Thế năng ngoại lực U_p giảm
↘ Thế năng biến dạng U tăng

Vì tải trọng tác dụng tĩnh nên động năng không biến đổi. Ngoài ra bỏ qua phần năng lượng do từ, nhiệt, điện xảy ra kèm theo biến dạng tĩnh của vật thể đàn hồi: U_p=U.

Toàn bộ thế năng của ngoại lực U_p biến thành thế năng biến dạng U tích lũy trong hệ đàn hồi nếu biến dạng không phá vỡ sự cân bằng của hệ.

U_p đo bằng công T của ngoại lực, T > 0 vì ngoại lực và chuyển vị cùng chiều.

U đo bằng công A* của nội lực, A* < 0 vì nội lực ngăn cản biến dạng.

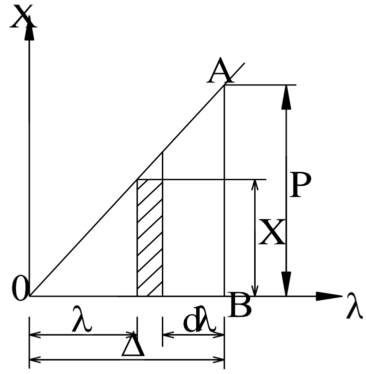
$$\boxed{U = T = -A^*}$$

Về trị số, thế năng biến dạng U tích luỹ trong hệ đàn hồi bằng công T của ngoại lực gây ra biến dạng hay bằng công A của nội lực sinh ra trên những biến dạng đàn hồi nhưng trái dấu.*

1.2.2. Công của ngoại lực

Ta đã biết: Công = [lực] x [chuyển vị tương ứng]

- Công thức trên chỉ đúng khi lực không đổi trong quá trình chuyển dời.
- Chúng ta đang xét trường hợp tải trọng P tác dụng tĩnh và vật liệu tuyệt đối đàn hồi nên trong quá trình chuyển vị của hệ tải trọng không giữ nguyên trị số mà biến thiên cùng với chuyển vị theo quan hệ bậc nhất.



Hình 1.2.2

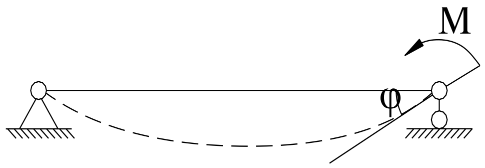
Gọi X là giá trị của lực biến thiên, λ là giá trị chuyển vị tương ứng (*hình 1.2.2*).

Khi chuyển vị thay đổi lượng vô cùng bé thì công của lực: $dT = X.d\lambda$

Công của lực X khi tăng từ 0 → P là:

$$T = \int_0^P dT = \int_0^P X.d\lambda \quad \text{Vì } d\lambda = k.dX \text{ nên: } T = \int_0^P k.X.dX = k.\frac{X^2}{2} = \frac{1}{2}P.\Delta$$

Khi hệ chịu mômen tập trung M (*hình 1.2.3*): $T = \frac{1}{2}M.\varphi$



Hình 1.2.3

Trường hợp hệ chịu:

- Lực tập trung P_i (i=1,2,3…,n), chuyển vị thẳng tương ứng là Δ_i.

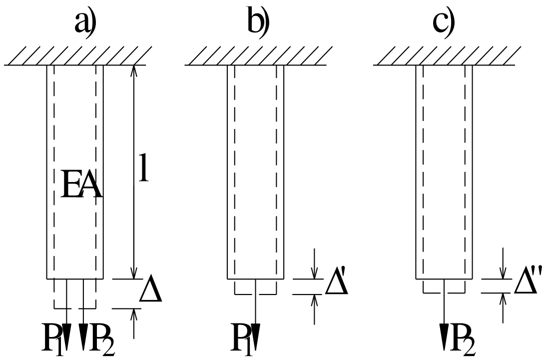
- Mômen tập trung M_j (j=1,2,3…,m), chuyển vị xoay tương ứng là φ_j.

$$\boxed{T = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i \Delta_i}{2} + \sum_{j=1}^{m} \frac{M_j \varphi_j}{2}}$$

Trong hệ đàn hồi tuyến tính, công của ngoại lực đồng thời tác dụng bằng nửa tổng đại số các tích số giữa giá trị cuối cùng của mỗi ngoại lực với giá trị cuối cùng của chuyển vị tổng cộng tương ứng.

Chú ý:

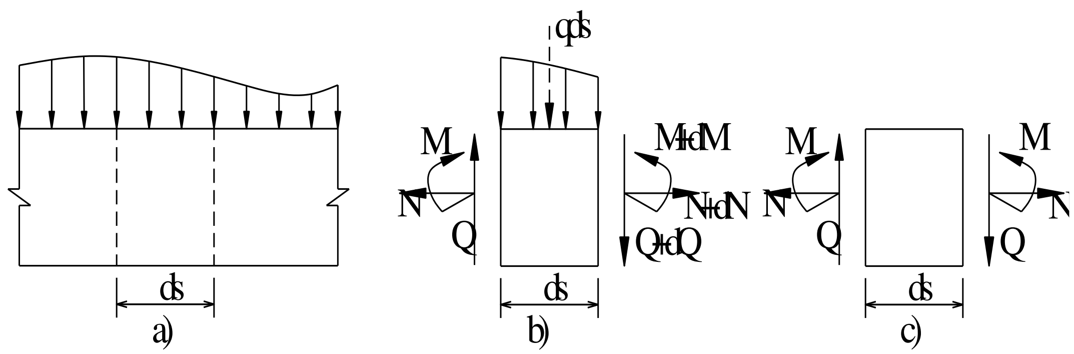
+ Công của ngoại lực không phụ thuộc vào thứ tự tác dụng của các ngoại lực, chỉ phụ thuộc vào trạng thái đầu và trạng thái cuối của hệ.



Hình 1.2.4

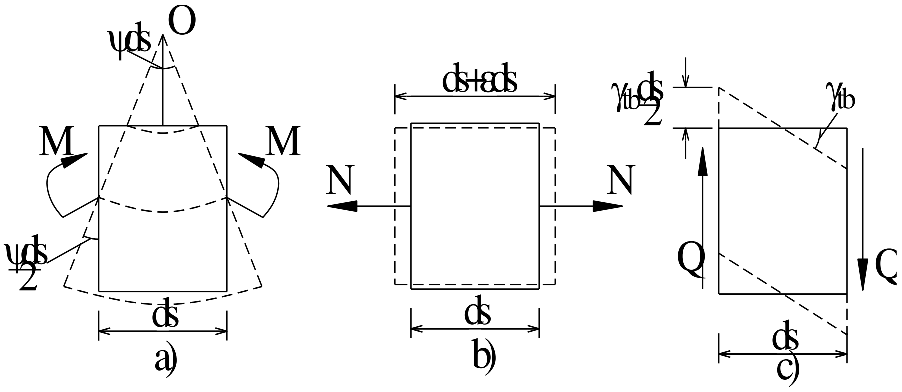
+ Công của ngoại lực trên những chuyển vị đàn hồi không tuân theo nguyên lý cộng tác dụng.

1.2.3. Công của nội lực – Thế năng của hệ thanh



Hình 1.2.5

Để tính công của nội lực trong toàn hệ trước tiên ta tính công của nội lực trong một phân tố thanh gọi là *công phân tố*.



Hình 1.2.6

Tách khỏi hệ một phân tố thanh dài ds và tính công phân tố dA của các nội lực trong phân tố thanh. Các ngoại lực tác dụng vào phân tố thanh như *hình 1.2.5.*

Theo công thức: dA*= -dT

Trước khi tính công dT ta có nhận xét:

- Chiều dài ds của phân tố thanh rất nhỏ nên độ biến thiên của các lực dM, dN, dQ và tải trọng q.ds cũng rất nhỏ nên có thể bỏ qua.

- Các lực M, N, Q sinh công trên những biến dạng tương ứng độc lập với nhau nên ta có thể tính riêng rồi cộng các kết quả:

$$dT = dT_M + dT_N + dT_Q$$

• Tính công dT_M của mômen uốn M (*hình 1.2.6a*):

$$dT_M = \frac{1}{2}(M\frac{\psi ds}{2} + M\frac{\psi ds}{2}) = \frac{1}{2}M.\psi ds$$

Nếu gọi ρ là bán kính cong của phân tố thanh bị uốn thì từ hình vẽ ta thấy:

$$\psi ds = \frac{1}{\rho}ds \text{ hay } \psi = \frac{1}{\rho}$$

Từ sức bền vật liệu: $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I} \rightarrow dT_M = \frac{M^2 ds}{2EI}$

• Tính công dT_N của lực dọc N (*hình 1.2.6b*):

$$dT_N = \frac{1}{2}(N\frac{\varepsilon ds}{2} + N\frac{\varepsilon ds}{2}) = \frac{1}{2}N.\varepsilon ds$$

Theo định luật Hooke khi kéo hoặc nén: $\varepsilon.ds = \frac{N}{EA}.ds$

Vậy: $$dT_N = \frac{N^2 ds}{2EA}$$

• Tính công dT_Q của lực cắt Q (*hình 1.2.6c*):

Dưới tác dụng của lực cắt các tiết diện trượt với nhau một góc γ_{tb}.

$$dT_Q = \frac{1}{2}(Q\frac{\gamma_{tb}ds}{2} + Q\frac{\gamma_{tb}ds}{2}) = \frac{1}{2}Q.\gamma_{tb}ds$$

Theo định luật Hooke khi biến dạng trượt: $\gamma_{tb} = \frac{\tau_{tb}}{G} = \frac{1}{G}\nu\frac{Q}{A}$

Vậy: $dT_Q = \nu\frac{Q^2ds}{2GA}$

→ Vậy công phân tố của nội lực: $dA^* = -dT = -\left(\frac{M^2ds}{2EI} + \frac{N^2ds}{2EA} + \nu\frac{Q^2ds}{2GA}\right)$

→ Công nội lực trong toàn hệ:

$$\boxed{A^* = \int dA^* = -\left[\sum\int\frac{M^2ds}{2EI} + \sum\int\frac{N^2ds}{2EA} + \sum\int\nu\frac{Q^2ds}{2GA}\right]}$$

Biểu thức thế năng biến dạng đàn hồi của toàn hệ thanh:

$$\boxed{U = \sum\int\frac{M^2ds}{2EI} + \sum\int\frac{N^2ds}{2EA} + \sum\int\nu\frac{Q^2ds}{2GA}}$$

Chú ý:

- U luôn luôn dương.
- Khi áp dụng lấy tích phân trong từng đoạn trong đó các hàm dưới dấu tích phân là liên tục sau đó cộng các kết quả theo số đoạn đã lấy tích phân.
- Biểu thức trên áp dụng cho hệ gồm các thanh thẳng, thanh cong có độ cong nhỏ: $\frac{h}{r} \le \frac{1}{5}$

1.2.4. Cách xác định chuyển vị theo thế năng

a. Áp dụng trực tiếp biểu thức thế năng

- *Điều kiện áp dụng:*

+ Hệ chỉ chịu một lực P.

+ Chuyển vị cần tìm là Δ tương ứng với P.

Vậy: $T = \frac{1}{2}P.\Delta = U \rightarrow \boxed{\Delta = \frac{2U}{P}}$

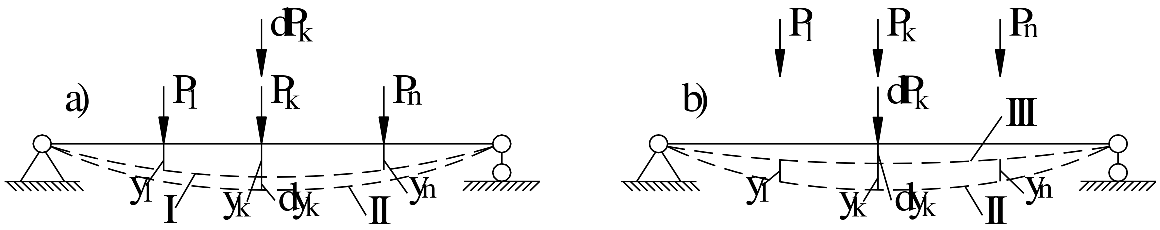
b. Định lý Castigliano

Nội dung:

Đạo hàm riêng của thế năng biến dạng U theo một ngoại lực P_k nào đó bằng chuyển vị có vị trí và phương tương ứng với lực P_k.

$$\boxed{\Delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}}$$

Chứng minh:



Hình 1.2.7

Xét hệ chịu các lực P_k (k=1, 2,…,n) biến dạng theo đường cong I (*hình 1.2.7*). Tìm chuyển vị y_k?

Giả sử thêm tải trọng dP_k vào để chuyển dầm từ vị trí I sang vị trí II, các lực P_k đều hạ thấp xuống và sinh công dT, thế năng biến dạng tăng lên dU: dT=dU (a)

dU: độ biến thiên của thế năng do riêng P_k biến đổi một lượng dP_k là:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial P_k}.dP_k \quad \text{(b)}$$

dT: độ biến thiên của công ngoại lực khi hệ chuyển từ I sang II: $dT = T_2 - T_1$

- Tìm T_1 (trạng thái I): $T_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P_i y_i$

- Tìm T_2 (trạng thái II):

+ Công của lực dP_k trên dy_k bằng: $\frac{1}{2} dP_k.dy_k$

+ Công của các lực P_i trên y_i bằng: $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P_i y_i$

+ Công của lực dP_k (không đổi) trên y_k bằng: $dP_k.y_k$

Vậy $T_2 = \frac{1}{2} dP_k.dy_k + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P_i y_i + dP_k.y_k$

Từ đó: $dT = T_2 - T_1 = \frac{1}{2} dP_k.dy_k + dP_k.y_k$

Bỏ qua vô cùng bé bậc cao ta được: $dT = dP_k.y_k$ (c)

Từ (a), (b), (c) ta có: $\frac{\partial U}{\partial P_k}.dP_k = dP_k.y_k$ hay $y_k = \frac{\partial U}{\partial P_k} \rightarrow$ ĐPCM

Vậy: $\Delta_k = \frac{\partial}{\partial P_k}\left[\sum\int \frac{M^2 ds}{2EI} + \sum\int \frac{N^2 ds}{2EA} + \sum\int \nu\frac{Q^2 ds}{2GA}\right]$

Ta thấy M, N, Q là hàm của lực P_k và toạ độ s, các tích phân lấy theo s còn đạo hàm riêng lấy theo P_k nên có thể đưa đạo hàm vào dấu tích phân.

Ngoài ra:

$$\frac{\partial(M^2)}{\partial P_k} = 2M\frac{\partial M}{\partial P_k}; \quad \frac{\partial(N^2)}{\partial P_k} = 2N\frac{\partial N}{\partial P_k}; \quad \frac{\partial(Q^2)}{\partial P_k} = 2Q\frac{\partial Q}{\partial P_k}$$

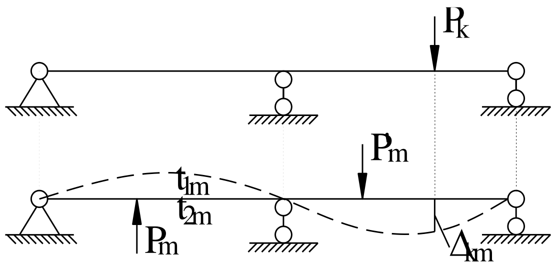
Vậy:

$$\boxed{\Delta_k = \sum\int \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P_k}ds + \sum\int \frac{N}{EA}\frac{\partial N}{\partial P_k}ds + \sum\int \nu\frac{Q}{GA}\frac{\partial Q}{\partial P_k}ds}$$

1.3. Công khả dĩ của ngoại lực và nội lực

1.3.1. Công khả dĩ – Chuyển vị khả dĩ

Công khả dĩ là công sinh ra bởi các lực trên những chuyển vị và biến dạng vô cùng bé do nguyên nhân bất kỳ (P, t, ...) gây ra.



Hình 1.3.1

Để thấy rõ đinh nghĩa về công khả dĩ ta xét hệ ở hai trạng thái:

- Trạng thái "k" chịu P_k (*hình 1.3.1*).

- Trạng thái "m" chịu nguyên nhân P_m, t_{1m}, t_{2m}, z_m (*hình 1.3.1*).

Khi đó:

Δ_{km} được gọi là chuyển vị khả dĩ của lực P_k do các nguyên nhân m.

$T_{km} = P_k.\ \Delta_{km}$ được gọi là công khả dĩ của các lực ở trạng thái "k" trên các chuyển vị ở trạng thái "m".

1.3.2. Nguyên lý công khả dĩ

- Trong cơ học cơ sở, nội dung nguyên lý công khả dĩ của Lagrange:

Nếu một hệ chất điểm nào đó của vật rắn cân bằng dưới tác dụng của các lực thì công khả dĩ của các lực trên những chuyển vị khả dĩ vô cùng bé (tức là những chuyển dời mà liên kết cho phép) phải bằng không. $T_{km} = 0$

- Trong hệ đàn hồi (theo S.D.Poisson):

Nếu một hệ đàn hồi cân bằng dưới tác dụng của các ngoại lực thì tổng công khả dĩ của các ngoại lực trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng vô cùng bé và công khả dĩ của các nội lực trên những biến dạng đàn hồi khả dĩ tương ứng phải bằng không.

$$T_{km} + A^*_{km} = 0$$

Hay: $\boxed{T_{km} = -A^*_{km}}$

T_{km} - Công khả dĩ của ngoại lực ở trạng thái "k" trên chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m".

A^*_{km} - Công khả dĩ của nội lực ở trạng thái "k" trên biến dạng khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m".

1.3.3. Công khả dĩ của ngoại lực

Công khả dĩ của ngoại lực ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m" bằng tổng các tích số giữa giá trị của các lực ở trạng thái "k" với những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m".

$$\boxed{T_{km} = \sum_{i=1}^{n} P_{ik}.\Delta_{km}}$$

1.3.4. Công khả dĩ của nội lực

Cần tìm dA_{km} của phân tố thanh từ đó suy ra A_{km} của toàn hệ

Tách phân tố ds tương ứng với hai trạng thái:

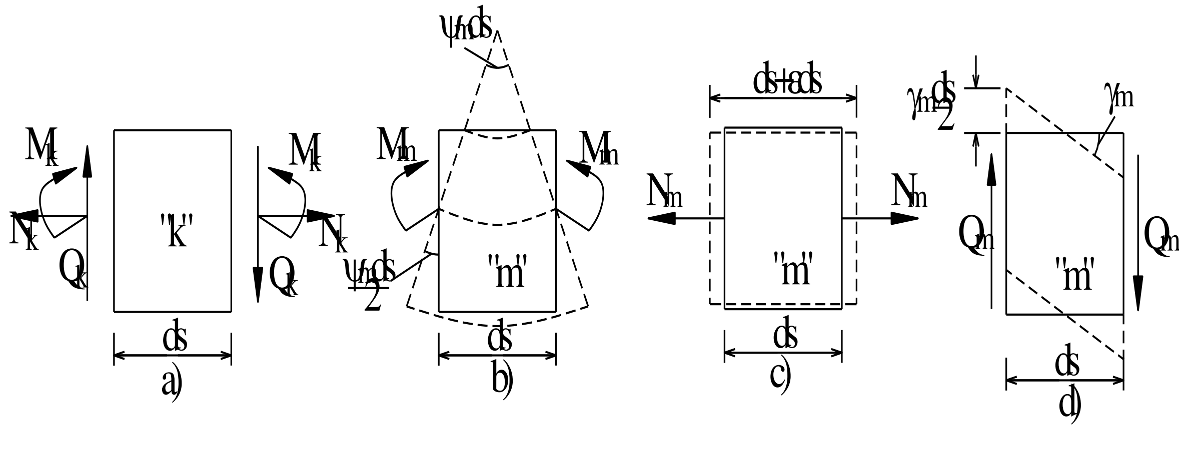
- Trạng thái "k": M_k, N_k, Q_k là ngoại lực so với phân tố đang xét, nội lực so với toàn hệ

- Trạng thái "m" có những biến dạng sau:

+ Biến dạng góc $\psi_m.ds$

+ Biến dạng dọc trục $\varepsilon_m.ds$

+ Biến dạng trượt $\gamma_m^{tb}.ds$

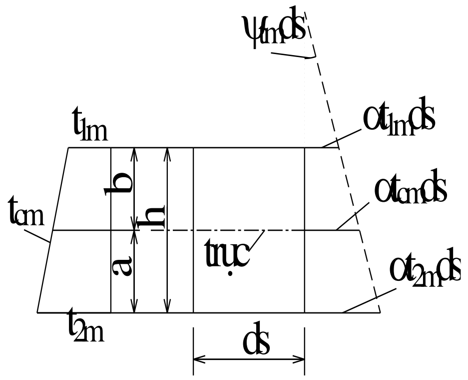


Hình 1.3.2

- Biến dạng do các nội lực M_m, N_m, Q_m (*hình 1.3.2*)

$$\psi_m = \frac{M_m}{EI}; \quad \varepsilon_m = \frac{N_m}{EA}; \quad \gamma_m^{tb} = \nu\frac{Q_m}{GA}$$

- Biến dạng do sự thay đổi nhiệt độ (*hình 1.3.3*)



Hình 1.3.3

Gọi t_{1m}, t_{2m}, t_{cm} - độ biến thiên nhiệt độ ở thớ trên, thớ dưới và trục thanh. Chấp nhận sự biến thiên của nhiệt độ theo chiều cao tiết diện là bậc nhất.

Ta có: $t_{cm} = \dfrac{a.t_{1m} + b.t_{2m}}{h}$

Nếu a = b = $\dfrac{h}{2}$ thì $t_{cm} = \dfrac{t_{1m} + t_{2m}}{2}$

+ Biến dạng dọc trục do t_{cm}: $\varepsilon_{tm}.ds = \alpha.t_{cm}.ds$

+ Biến dạng xoay: $\psi_{tm}.ds = \dfrac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m}).ds$

Công khả dĩ phân tố thanh của các lực ở trạng thái "k" trên những biến dạng khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m":

$$dT_{km} = M_k\psi_m ds + N_k\varepsilon_m ds + Q_k\gamma_m^{tb}ds + M_k\psi_{tm}ds + N_k\varepsilon_{tm}ds$$

Mà: $dT_{km} = -dA*_{km}$

Vậy: $dA*_{km} = -\left[M_k\psi_m ds + N_k\varepsilon_m ds + Q_k\gamma_m^{tb}ds + M_k\psi_{tm}ds + N_k\varepsilon_{tm}ds\right]$

Trong toàn hệ, công khả dĩ của nội lực ở trạng thái "k" trên những biến dạng khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m":

$$A*_{km} = \int dA*_{km} = -[\sum\int \frac{M_k.M_m}{EI}ds + \sum\int \frac{N_k.N_m}{EA}ds + \sum\int \nu\frac{Q_k.Q_m}{GA}ds + \sum\int M_k\frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})ds$$

$$+ \sum\int N_k\alpha t_{cm}ds\,]$$

1.3.5. Công thức công khả dĩ

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} P_{ik}.\Delta_{km} = \sum\int \frac{M_k.M_m}{EI}ds + \sum\int \frac{N_k.N_m}{EA}ds + \sum\int \nu\frac{Q_k.Q_m}{GA}ds + \sum\int M_k\frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})ds + \sum\int N_k\alpha t_{cm}ds}$$

Trong hệ đàn hồi cân bằng, tổng cộng khả dĩ của các ngoại lực tác dụng trên hệ ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m" bằng công khả dĩ của các nội lực ở trạng thái "k" trên những biến dạng khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m".

1.4. Các định lý tương hỗ trong hệ đàn hồi tuyến tính

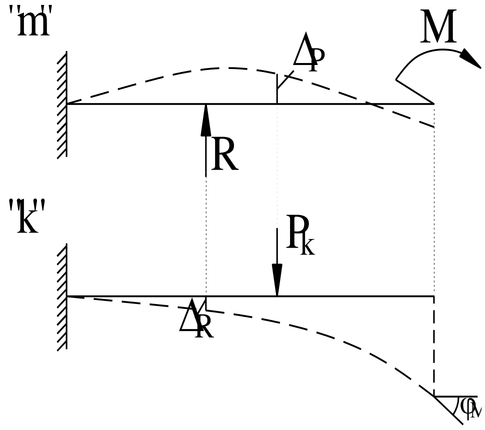
1.4.1. Định lý tương hỗ về công khả dĩ của ngoại lực

Định lý E. Betti

Xét hệ đàn hồi tuyến tính tương ứng với hai trạng thái (*hình 1.4.1*):

- Trạng thái "m" hệ chịu các ngoại lực P_{jm}

- Trạng thái "k" hệ chịu các ngoại lực P_{ik}



Hình 1.4.1

• Công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái "m" trên các chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "k":

$$\sum_j P_{jm}.\Delta_{mk} = \sum\int \frac{M_m.M_k}{EI}ds + \sum\int \frac{N_m.N_k}{EA}ds + \sum\int \nu\frac{Q_m.Q_k}{GA}ds \quad \text{(a)}$$

• Công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái "k" trên các chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m":

$$\sum_i P_{ik}.\Delta_{km} = \sum\int \frac{M_k.M_m}{EI}ds + \sum\int \frac{N_k.N_m}{EA}ds + \sum\int \nu\frac{Q_k.Q_m}{GA}ds \quad \text{(b)}$$

So sánh (a) và (b):

$$\boxed{\sum_j P_{jm}.\Delta_{mk} = \sum_i P_{ik}.\Delta_{km}}$$

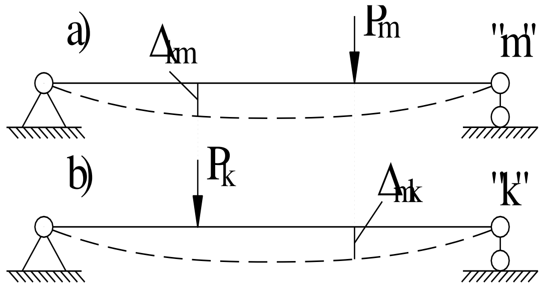
Trong hệ đàn hồi tuyến tính, công khả dĩ của các ngoại lực đặt vào hệ ở trạng thái "m" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "k" tương hỗ bằng công khả dĩ của các ngoại lực đặt vào hệ ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m".

1.4.2. Định lý tương hỗ về các chuyển vị đơn vị

Xét hệ đàn hồi tuyến tính ở hai trạng thái (*hình 1.4.2*):

- Trạng thái "m" có một lực P_m tác dụng.

- Trạng thái "k" có một lực P_k tác dụng.



Hình 1.4.2

Theo định lý E. Betti: $P_m\Delta_{mk} = P_k\Delta_{km}$ hay $\dfrac{\Delta_{mk}}{P_k} = \dfrac{\Delta_{km}}{P_m}$

Theo nguyên lý cộng tác dụng:

$\dfrac{\Delta_{mk}}{P_k} = \delta_{mk}$ là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_m do P_k gây ra.

$\dfrac{\Delta_{km}}{P_m} = \delta_{km}$ là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_k do P_m gây ra.

Vậy:

$$\boxed{\delta_{mk} = \delta_{km}}$$

Trong hệ đàn hồi tuyến tính, chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_m do lực P_k gây ra tương hỗ bằng chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_k do lực P_m gây ra.

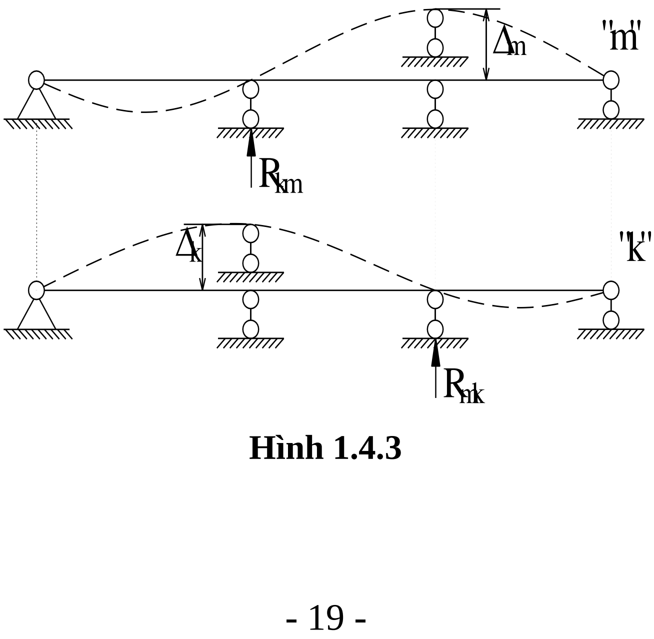
Thứ nguyên của chuyển vị đơn vị:

TN của δ_{mk} *=TN của* Δ_{mk} */ TN của* P_k

1.4.3. Định lý tương hỗ về các phản lực đơn vị

Xét hệ đàn hồi tuyến tính ở hai trạng thái (*hình 1.4.3*):

- Trạng thái "m" có một liên kết m của hệ chuyển vị cưỡng bức Δ_m.
- Trạng thái "k" có một liên kết k của hệ chuyển vị cưỡng bức Δ_k.



Hình 1.4.3

Gọi R_{mk} là phản lực liên m do chuyển vị cưỡng bức Δ_k gây ra.

Gọi R_{km} là phản lực liên k do chuyển vị cưỡng bức Δ_m gây ra.

Áp dụng định lý Betti: $R_{mk}.\Delta_m = R_{km}.\Delta_k$ hay $\frac{R_{mk}}{\Delta_k} = \frac{R_{km}}{\Delta_m}$

$\frac{R_{mk}}{\Delta_k} = r_{mk}$ là phản lực đơn vị tại liên kết m do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết k gây ra.

$\frac{R_{km}}{\Delta_m} = r_{km}$ là phản lực đơn vị tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết m gây ra.

Vậy:

$$\boxed{r_{mk} = r_{km}}$$

Trong hệ đàn hồi tuyến tính, phản lực đơn vị tại liên kết m do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết k gây ra tương hỗ bằng phản lực đơn vị tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết m gây ra.

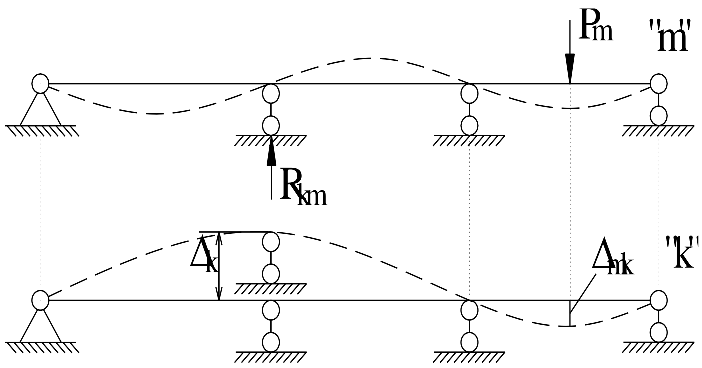
Thứ nguyên của phản lực đơn vị:

TN của r_{mk} =*TN của* R_{mk}/ *TN của* Δ_k

1.4.4. Định lý tương hỗ về các chuyển vị đơn vị và phản lực đơn vị

Xét hệ đàn hồi tuyến tính ở hai trạng thái (*hình 1.4.4*):

- Trạng thái "m" có một lực P_m tác dụng.
- Trạng thái "k" có một liên kết k của hệ chuyển vị cưỡng bức Δ_k.



Hình 1.4.4

Gọi R_{km} là phản lực liên k có chuyển vị cưỡng bức Δ_k, do lực P_m gây ra ở trạng thái m.

Δ_{mk} là chuyển vị có vị trí và phương tương ứng với lực P_m do chuyển vị cưỡng bức Δ_k tại liên kết k gây ra ở trạng thái "k".

Theo định lí Betti: $R_{km}.\Delta_k + P_m.\Delta_{mk} = 0$ hay $\dfrac{R_{km}}{P_m} = -\dfrac{\Delta_{mk}}{\Delta_k}$

$\dot{r}_{km} = \dfrac{R_{km}}{P_m}$ là phản lực đơn vị tại liên kết k do P_m gây ra.

TN của $\dot{r}_{km}$ *=TN của* R_{km} */ TN của* P_m

$\dot{\delta}_{mk} = \dfrac{\Delta_{mk}}{\Delta_k}$ là chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_m do chuyển vị cưỡng bức tại kiên kết k gây ra.

TN của $\dot{r}_{mk}$ *=TN của* Δ_{mk} */ TN của* Δ_m

Vậy:

$$\boxed{\dot{r}_{km} = -\dot{\delta}_{mk}}$$

Trong hệ đàn hồi tuyến tính phản lực đơn vị tại liên kết k do lực P_m gây ra tương hỗ bằng chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_m do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết k gây ra nhưng trái dấu.

1.5. Công thức chuyển vị trong hệ thanh đàn hồi tuyến tính

Xét hệ bất kỳ chịu (*hình 1.5.1*):

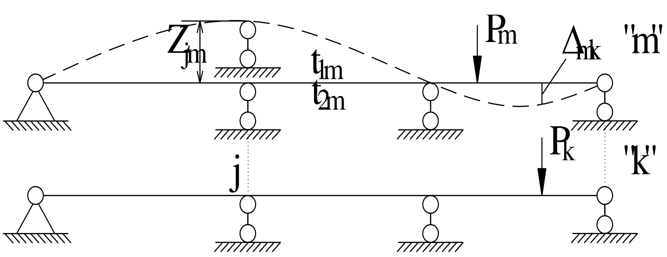
+ Tải trọng P_m

+ Chuyển vị cưỡng bức z_m

+ Thay đổi chuyển vị t_{2m}, t_{1m}

Gọi trạng thái này là trạng thái thực "m"

Yêu cầu xác định Δ_{km}



Hình 1.5.1

Cần tạo trạng thái khả dĩ "k" để lực P_k sinh công trên chuyển vị Δ_{km}

- Δ_{km} là chuyển vị thẳng, đặt lực tập trung P_k tại k theo phương chuyển vị cần tìm

- Δ_{km} là chuyển vị xoay, đặt mômen tập trung M_k tại k

Áp dụng công thức công khả dĩ:

$$P_k\Delta_{km}+\sum_j R_{jk}z_{jm}=\sum\int\frac{M_kM_m}{EI}ds+\sum\int\frac{N_kN_m}{EA}ds+\sum\int\nu\frac{Q_kQ_m}{GA}ds+\sum\int M_k\frac{\alpha}{h}(t_{2m}-t_{1m})ds$$
$$+\sum\int N_k\alpha t_{cm}ds$$

Kí hiệu: $\overline{M_k}=\frac{M_k}{P_k}$; $\overline{N_k}=\frac{N_k}{P_k}$; $\overline{Q_k}=\frac{Q_k}{P_k}$; $\overline{R_{jk}}=\frac{R_{jk}}{P_k}$

$$\boxed{\Delta_{km}=-\sum_j\overline{R_{jk}}z_{jm}+\sum\int\frac{\overline{M_k}M_m}{EI}ds+\sum\int\frac{\overline{N_k}N_m}{EA}ds+\sum\int\nu\frac{\overline{Q_k}Q_m}{GA}ds+\sum\int\overline{M_k}\frac{\alpha}{h}(t_{2m}-t_{1m})ds+\sum\int\overline{N_k}\alpha t_{cm}ds}$$

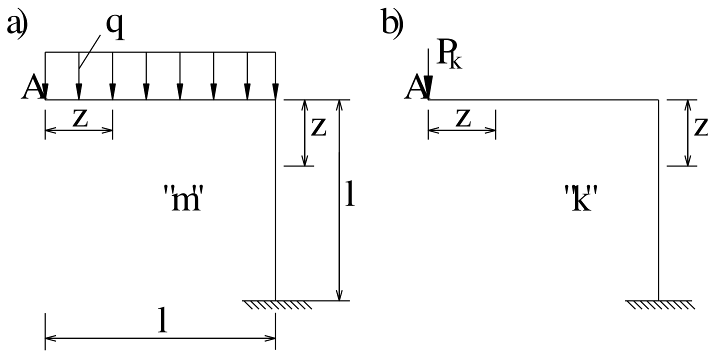
1.6. Cách vận dụng công thức chuyển vị

1.6.1. Hệ dầm khung chịu tải trọng

Ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt đến chuyển vị thường nhỏ hơn ảnh hưởng của mômen uốn do đó có thể bỏ qua.

$$\boxed{\Delta_{km}=\sum\int\frac{\overline{M_k}M_m}{EI}ds}$$

Ví dụ 1: Tìm y_A như trên *hình 1.6.1*. Tiết diện thanh ngang và đứng không đổi có dạng chữ nhật bxh.



Hình 1.6.1

- Tạo trạng thái "k"
- Xác định nội lực ở trạng thái "m" và "k":
- Nội lực trong hệ:

Thanh ngang: $M_m=-\frac{qz^2}{2}$; $N_m=0$; $Q_m=-qz$

$\overline{M}_k=-z$; $\overline{N}_k=0$; $\overline{Q}_k=-1$

Thanh đứng: $M_m=-\frac{ql^2}{2}$; $N_m=-ql$; $Q_m=0$

$\overline{M}_k=-l$; $\overline{N}_k=-1$; $\overline{Q}_k=0$

Ta có:

$$\Delta_{km} = \int_0^l \frac{(-z)(-qz^2)}{2EI}dz + \int_0^l \frac{(-l)(-ql^2)}{2EI}dz + \int_0^l \frac{(-1)(-ql)}{EA}dz + \int_0^l \nu\frac{(-1)(-qz)}{GA}dz$$

$$\Delta_{km} = \frac{ql^4}{8EI} + \frac{ql^4}{2EI} + \frac{ql^2}{EA} + \nu\frac{ql^2}{2GA} = \frac{5ql^4}{8EI}\left(1 + \frac{8I}{5l^2A} + \nu\frac{4EI}{5l^2GA}\right) = \frac{5ql^4}{8EI}(1+\eta)$$

Trong đó: $\eta = \frac{8I}{5l^2A} + \nu\frac{4EI}{5l^2GA}$ là hệ số kể đến ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt so với ảnh hưởng của mômen uốn.

Với tiết diện chữ nhật: $\nu = 1.2$; $\frac{I}{F} = \frac{bh^3}{12.bh} = \frac{h^2}{12}$

Ngoài ra $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ với μ là hệ số biến dạng ngang Poisson.

Vậy: $\eta = \frac{8}{5}\frac{h^2}{12l^2} + \frac{4}{5}.1,2.\frac{h^2}{12l^2}.2.(1+\mu) = \frac{2}{15}[1+1,2(1+\mu)]\frac{h^2}{l^2}$

η phụ thuộc vào tỷ số $\frac{h}{l}$. Khi $l >> h$ thì η≈0 tức là ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt không đáng kể.

1.6.2. Hệ dàn khớp chịu tải trọng

Trong dàn chỉ tồn tại lực dọc: $\Delta_{km} = \sum\int\frac{\overline{N_k}N_m}{EA}ds$

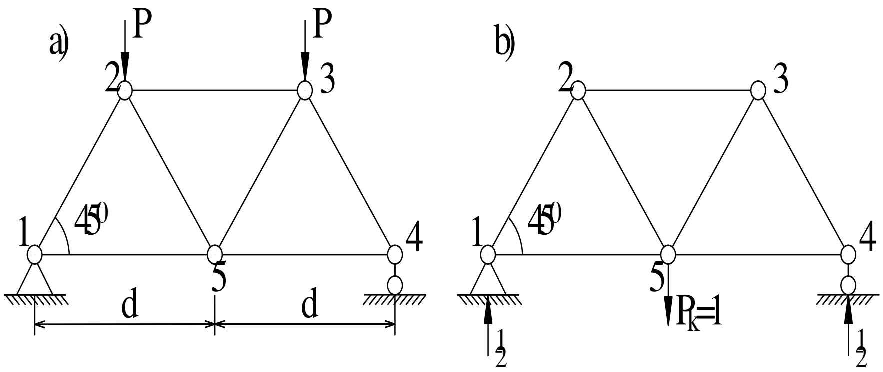
Khi EA, $\overline{N_k}$, N_m không đổi trong từng thanh $\Delta_{km} = \sum\frac{\overline{N_k}N_m}{EA}\int ds$

Suy ra:

$$\boxed{\Delta_{km} = \sum_i \frac{\overline{N}_{ik}N_{im}}{(EA)_i}l_i} \quad (*)$$

Ví dụ:

Xác định y_5 của hệ cho trên *hình 1.6.2*. Biết *EA=const*



Hình 1.6.2

Tạo trạng thái “k” như hình vẽ.

Áp dụng công thức (*) lập được bảng tính:

Thanh	l_i	$\frac{1}{(EA)_i}$	N_{im}	$\overline{N_{ik}}$	$\frac{\overline{N_{ik}}N_{im}l_i}{(EA)_i}$
1-2	$d\sqrt{2}/2$	1/EA	$-P\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$Pd\sqrt{2}/2EA$
2-3	d	1/EA	-P	-1	Pd /EA
3-4	$d\sqrt{2}/2$	1/EA	$-P\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	$Pd\sqrt{2}/2EA$
4-5	d	1/EA	P	½	Pd/2EA
5-1	d	1/EA	P	½	Pd/2EA
5-2	$d\sqrt{2}/2$	1/EA	0	$\sqrt{2}/2$	0
5-3	$d\sqrt{2}/2$	1/EA	0	$\sqrt{2}/2$	0

Vậy: $\Delta_{km} = \sum_i \frac{\overline{N}_{ik}N_{im}}{(EA)_i} = \frac{Pd}{EA}.(2+\sqrt{2})$ mắt 5 chuyển vị thẳng đứng theo phương P_k.

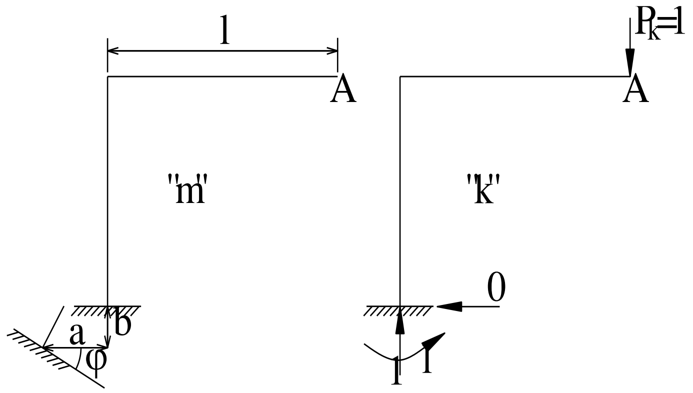
1.6.3. Hệ tĩnh định bất kỳ chịu chuyển vị cưỡng bức

Khi liên kết tựa chuyển vị cưỡng bức, trong hệ tĩnh định không phát sinh nội lực:

$$\boxed{\Delta_{kZ} = -\sum_j R_{jk} z_{jk}}$$

Ví dụ:

Tìm chuyển vị thẳng đứng y_A tại đầu tự do của khung khi ngàm chịu chuyển vị cưỡng bức theo phương ngang là *a*, phương đứng là *b* và xoay thuận chiều kim đồng hồ góc là φ như trên *hình 1.6.3*.



Hình 1.6.3

- Tạo trạng thái “k”
- Giá trị phản lực tại các liên kết như *hình 1.6.3*

Vậy: $y_A = -(0.a - 1.b - l.\varphi) = b + l\varphi$

1.6.4. Hệ tĩnh định bất kỳ chịu sự thay đổi của nhiệt độ

Sự thay đổi nhiệt độ trong hệ tĩnh định không phát sinh nội lực:

$$\Delta_{kt} = \sum\int \overline{M_k}\frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})ds + \sum\int \overline{N_k}\alpha t_{cm}ds$$

Nếu dọc theo chiều dài từng đoạn thanh:

+ Nhiệt độ thay đổi như nhau

+ Vật liệu như nhau (α = const)

+ Chiều cao h = const

$$\Delta_{kt} = \frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})\int \overline{M_k}ds + \sum \alpha t_{cm}\int \overline{N}_k ds$$

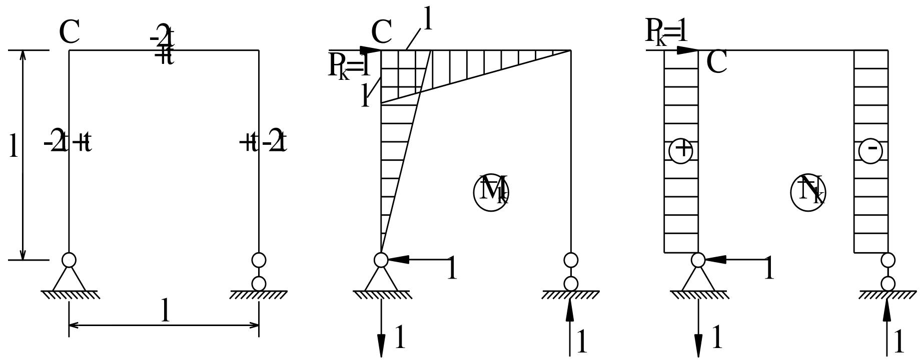
Gọi $\Omega(\overline{M_k})$ là diện tích biểu đồ $\overline{M_k}$ trong từng đoạn thanh ở trạng thái "k"

$\Omega(\overline{N_k})$ là diện tích biểu đồ $\overline{N_k}$ trong từng đoạn thanh ở trạng thái "k"

$$\boxed{\Delta_{kt} = \sum\frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})\Omega(\overline{M_k}) + \sum \alpha t_{cm}\Omega(\overline{N_k})}$$

Ví dụ:

Xác định chuyển vị ngang của C khi nhiệt độ trong khung biến đổi $+t$ còn ngoài khung biến đổi *-2t* như *hình 1.6.4*. Tiết diện hình chữ nhật có chiều cao *h=const*



Hình 1.6.4

- Xác định t_{cm} và *(t_{2m}- t_{1m})*

Đặt người quan sát ở trong khung thì giá trị này như nhau cho tất cả các thanh:

$$t_{cm} = \frac{1}{2}(t_1 + t_2) = (-2t + t) = -\frac{1}{2}t \;\;;\;\; t_{2m} - t_{1m} = +t - (-2t) = 3t$$

- Tạo trạng thái "k" và vẽ biểu đồ nội lực như hình vẽ

$$\text{Vậy: } \Delta_{kt} = \frac{\alpha}{h}3t\frac{l.l}{2} + \frac{\alpha}{h}3t\frac{l.l}{2} + \alpha\left(-\frac{t}{2}\right)(1.l) + \alpha\left(-\frac{t}{2}\right)(-1.l) = \frac{3\alpha t l^2}{h}$$

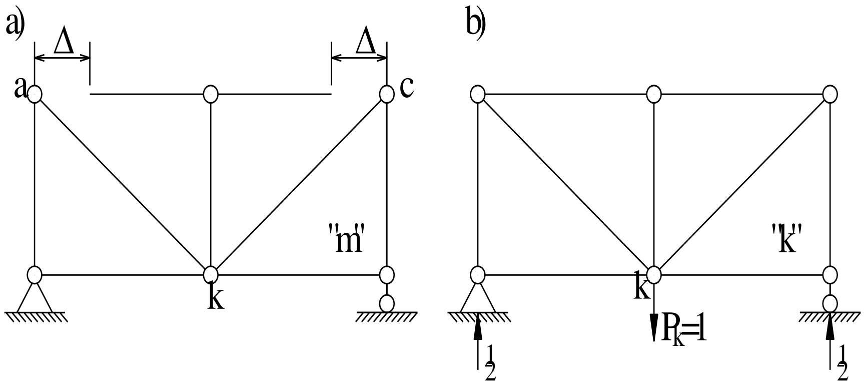
1.6.5. Dàn tĩnh định khi chiều dài các thanh chế tạo không chính xác

Gọi Δ_i là độ dôi của thanh thứ i thì ta có công thức:

$$\boxed{\Delta_{k\Delta} = \sum_i \overline{N_{ik}}\Delta_{im}}$$

Ví dụ:

Xác định độ võng tại k của dàn như *hình 1.6.5* nếu trong khi chế tạo chiều dài của thanh a-b và b-c bị hụt là Δ



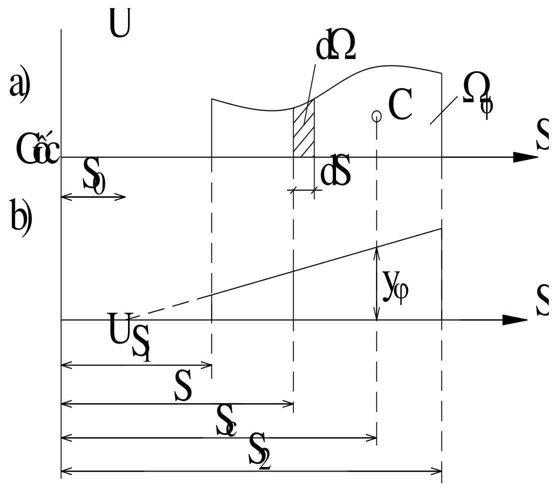
Hình 1.6.5

- Tạo trạng thái “k” như hình vẽ

Sau khi tính toán ta được $\overline{N}_{ab,k} = \overline{N}_{bc,k} = -\dfrac{1}{2}$

- Vậy: $\Delta_{k\Delta} = -\dfrac{1}{2}(-\Delta) - \dfrac{1}{2}(-\Delta) = \Delta$

1.7. Cách tính các tích phân trong công thức chuyển vị theo cách “nhân biểu đồ”



Hình 1.7.1

Áp dụng để tính chuyển vị trong hệ gồm các thanh thẳng.

Cách tính chuyển vị theo tích phân đều có thể đưa về dạng tích phân của hai hàm $\varphi(s)$ và $\Phi(s)$: $T = \int_{s_1}^{s_2} \varphi(s)\Phi(s)ds$

Chẳng hạn:

$$\int_{s_1}^{s_2} \overline{M}_k \frac{M_m}{EI} ds = \int_{s_1}^{s_2} \varphi(s)\Phi(s)ds \text{ trong đó } \varphi(s) = \overline{M}_k \text{ ; } \Phi(s) = \frac{M_m}{EI}$$

Nếu trong khoảng (s_1, s_2) hàm $\Phi(s)$ bất kỳ còn hàm $\varphi(s)$ có đồ thị là một đoạn thẳng liên tục thì có thể áp dụng cách "nhân biểu đồ" để tính T.

Kéo dài đồ thị $\varphi(s)$ cắt đường chuẩn tại O. Gọi là góc nghiêng giữa đồ thị $\varphi(s)$ với đường chuẩn. Từ hình vẽ ta có:

$$\varphi(s) = (s - s_0)tg\alpha \;;\quad \Phi(s)ds = d\Omega_\Phi$$

$$T = \int_{s_1}^{s_2} \varphi(s)\Phi(s)ds = \int_{s_1}^{s_2} (s - s_0)tg\alpha d\Omega_\Phi$$

Vì tgα không đổi trong (s_1, s_2) nên:

$$T = tg\alpha \int_{s_1}^{s_2} (s - s_0)d\Omega_\Phi$$

Tích phân trong vế phải của biểu thức trên chính là mômen tĩnh S_u của diện tích trong khoảng (s_1, s_2) lấy đối với trục U. Trục U đi qua điểm U và vuông góc với đường chuẩn. Mặt khác ta đã biết mômen tĩnh S_u bằng diện tích nhân với khoảng cách từ trọng tâm của diện tích đến trục U.

Do đó: $\int_{s_1}^{s_2} (s - s_0)d\Omega = S_U = (s_c - s_0)\Omega_\Phi$ nên $T = tg\alpha(s_c - s_0)\Omega_\Phi$

Từ hình vẽ thấy: $tg\alpha(s_c - s_0) = y_\varphi$

Vậy: $T = \int_{s_1}^{s_2} \varphi(s)\Phi(s)ds = \Omega_\Phi y_\varphi$

Khi hàm $\varphi(s)$ là hằng số hoặc bậc nhất còn hàm $\Phi(s)$ bất kỳ thì có thể tính tích phân T bằng cách lấy diện tích Ω_Φ của biểu đồ $\Phi(s)$ nhân với tung độ của biểu đồ $\varphi(s)$ lấy tại hoành độ tương ứng với trọng tâm của diện tích Ω_Φ

$$T = \int_{s_1}^{s_2} \varphi(s)\Phi(s)ds = (\varphi)(\Phi)$$

Công thức tính chuyển vị cho hệ chịu tải trọng như sau:

$$\boxed{\Delta_{km} = (\overline{M_k})(M_m) + (\overline{N_k})(N_m) + (\overline{Q_k})(Q_m)}$$

Lưu ý:

- Không viết 1/EI, 1/EA, 1/GA nhưng cần hiểu ngầm là vẫn tồn tại.

- Không viết Σ nhưng hiểu ngầm là phải nhân biểu đồ trong tất cả các thanh của hệ rồi cộng đại số các kết quả.

Các chú ý khi nhân biểu đồ

- Tung độ y_φ buộc phải lấy ở biểu đồ có dạng bậc nhất hoặc hằng số

- Nếu Ω_Φ và y_φ cùng dấu thì kết quả nhân biểu đồ sẽ dương và ngược lại

- Trong khoảng (s_1, s_2) biểu đồ lấy y_φ phải là đoạn thẳng liên tục không gãy.

- Khi là hình phức tạp thì chia thành nhiều hình đơn giản (dễ tìm diện tích, dễ tìm trọng tâm) để nhân biểu đồ cho từng hình rồi cộng kết quả lại

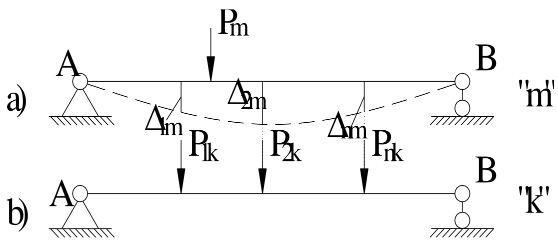
- Biểu đồ đối xứng nhân với biểu đồ phản xứng cho kết quả bằng không.

1.8. Cách tính gần đúng các tích phân trong công thức chuyển vị

Sinh viên tự nghiên cứu theo gợi ý sau:

- *Áp dụng trong trường hợp nào?*
- *Dựa trên những giả thiết nào?*
- *Nội dung như thế nào?*

1.9. Khái niệm về chuyển vị khái quát và lực khái quát



Hình 1.9.1

Xét hệ ở hai trạng thái "m" và "k" như *hình 1.9.1*.

Công khả dĩ của nhóm lực ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m": $T_{km} = \sum_{i=1}^{n} P_{ik}\Delta_{im}$

Biểu thị các lực ở trạng thái "k" theo một lực P_{jk}: $P_{ik} = \alpha_{ij}P_{jk}$

$$T_{km} = P_{jk}(\alpha_{1j}\Delta_{1m} + \alpha_{2j}\Delta_{2m} + ... + \alpha_{nj}\Delta_{nm}) = P_k^*\Delta_{km}^*$$

Trong đó $P_k^* = P_{jk}$ và $\Delta_k^* = (\alpha_{1j}\Delta_{1m} + \alpha_{2j}\Delta_{2m} + ... + \alpha_{nj}\Delta_{nm})$

Như vậy có thể biểu thị công khả dĩ của nhóm lực bằng tích của hai đại lượng vô hướng:

$$\boxed{T_{km} = \sum_{i=1}^{n} P_{ik}\Delta_{im} = P_k^*\Delta_{km}^*}$$

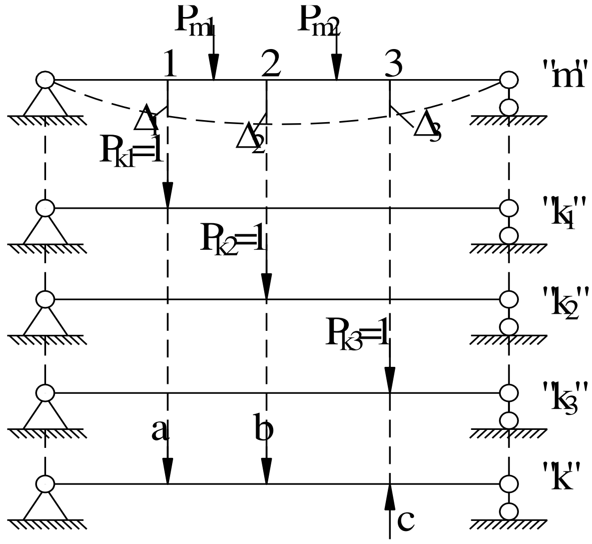
P_k^* gọi là *lực khái quát*. Đó là lực tưởng tượng thay thế cho các lực P_{ik}.

Δ_k^* gọi là *chuyển vị khái quát* tương ứng với các lực P_k^* do các nguyên nhân *m* gây.

Trong phạm vi bài toán xác định chuyển vị ta có thể vận dụng khái niệm chuyển vị khái quát và lực khái quát để tạo ra trạng thái "*k*" khi cần xác định các tập hợp chuyển vị.

Giả sử cần tìm tập hợp chuyển vị (*hình 1.9.2*):

$\Delta^* = a\Delta_1 + b\Delta_2 - c\Delta_3$ với a, b, c là các hằng số cho trước



Hình 1.9.2

- Khi không vận dụng khái niệm chuyển vị khái quát và lực khái quát ta cần thực hiện như sau:

+ Tạo trạng thái k_1, k_2, k_3 để tìm:

$\Delta_1 = (\overline{M}_{k_1})(M_m)$; $\Delta_2 = (\overline{M}_{k_2})(M_m)$; $\Delta_3 = (\overline{M}_{k_3})(M_m)$ (a)

+ Tổ hợp chuyển vị theo công thức:

$\Delta^* = a\Delta_1 + b\Delta_2 - c\Delta_3$ (b)

- Sử dụng khái niệm chuyển vị khái quát và lực khái quát:

Nếu thay (a) vào (b):

$$\Delta^* = a(\overline{M}_{k_1})(M_m) + b(\overline{M}_{k_2})(M_m) - c(\overline{M}_{k_3})(M_m)$$

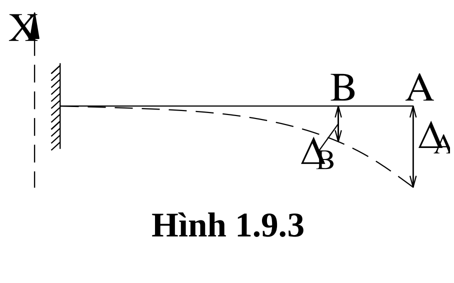
Đặt $\left(\overline{M}_k\right) = a\left(\overline{M}_{k_1}\right) + b\left(\overline{M}_{k_2}\right) - c\left(\overline{M}_{k_3}\right)$

Vậy: $\Delta^* = \left(\overline{M}_k\right)(M_m)$

Muốn tìm tập hợp chuyển vị $\Delta^*_{km} = \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta_i$, ở trạng thái "k" cần đặt lực khái quát P_k^* là một nhóm *n* lực trong đó lực thứ *i* có vị trí và phương tương ứng với chuyển vị còn giá trị bằng hệ số a_i.

1.9.1. Chuyển vị thẳng tương đối

Chuyển vị thẳng tương đối giữa hai điểm theo phương X là hiệu số hình chiếu của khoảng cách giữa hai điểm theo phương X ở lúc sau và lúc trước biến dạng.



Hình 1.9.3

Khoảng cách giữa A và B theo phương đứng (*hình 1.9.3*):

+ Trước biến dạng: 0

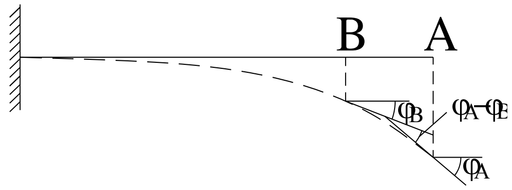
+ Sau biến dạng: $\Delta_A - \Delta_B$

Vậy: $\Delta_{AB} = \Delta_A - \Delta_B$

Muốn tìm chuyển vị thẳng tương đối giữa hai điểm theo phương nào đó thì ở trạng thái "k" cần đặt lực khái quát P_k^* là hai lực tập trung bằng đơn vị, ngược chiều nhau tai hai điểm đang xét và hướng theo phương yêu cầu.

1.9.2. Chuyển vị góc tương đối

Chuyển vị góc tương đối giữa hai tiết là hiệu của góc hợp thành giữa hai tiết diện đó ở sau và trước khi biến dạng.



Hình 1.9.4

Góc hợp thành giữa hai tiết diện A và B (*hình 1.9.4*):

+ Trước biến dạng: 0

+ Sau biến dạng: $\varphi_A - \varphi_B$

Vậy: $\varphi_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$

Muốn tìm chuyển vị góc tương đối giữa hai tiết diện thì ở trạng thái "k" cần đặt lực khái quát P_k^* dưới dạng hai mômen đơn vị ngược chiều nhau tại hai tiết diện đó.

B. <u>Nội dung thảo luận</u>

Câu 1:

Nêu các bước thiết lập công thức công của nội lực và công thức thế năng của hệ thanh đàn hồi tuyến tính. Giải thích ý nghĩa của các đại lượng trong công thức?

Câu 2:

Trình bày cách xác định chuyển vị khi áp dụng trực tiếp biểu thức thế năng. Nêu hạn chế của cách tính?

Câu 3:

Phân biệt chuyển vị thực và chuyển vị khả dĩ, công thực với công khả dĩ của ngoại lực?

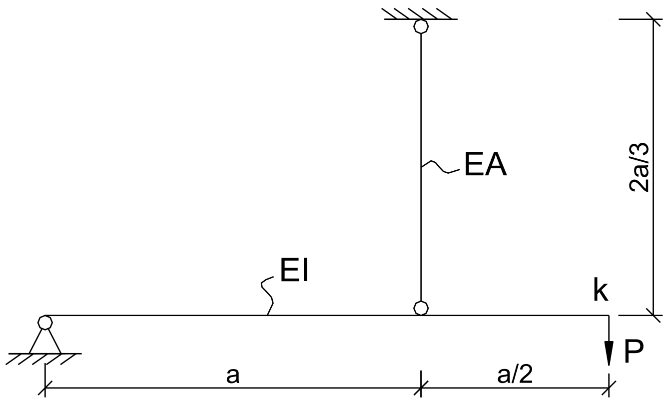
Câu 4:

Phát biểu và chứng minh phép nhân biểu đồ theo Vêrêxaghin. Nêu các chú ý khi nhân biểu đồ?

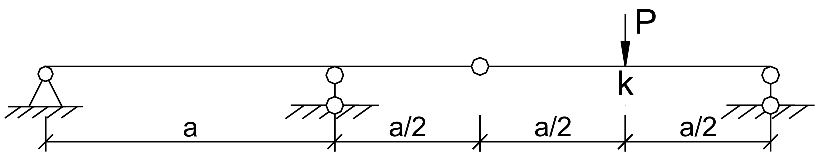
C. Bài tập

Bài 1:

Viết biểu thức thế năng biến dạng đàn hồi cho hệ trên *hình 1* và *hình 2*. Vận dụng biểu thức thế năng để xác định chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực P.



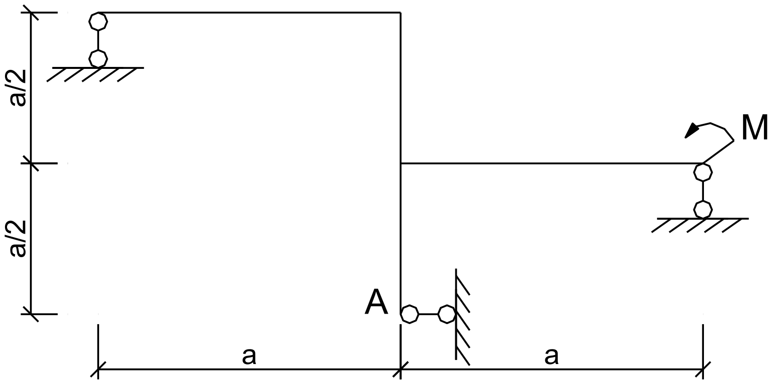
Hình 1



Hình 2

Bài 2:

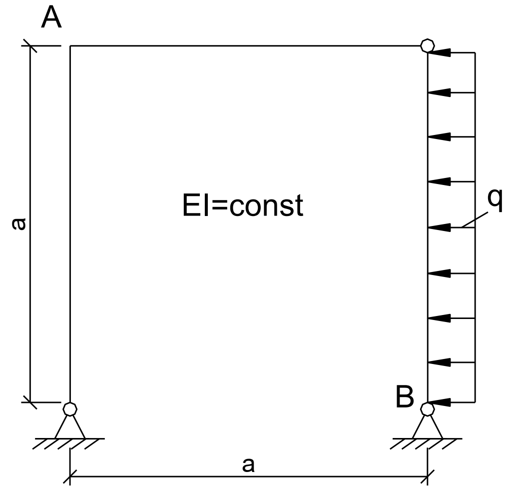
Xác định chuyển vị đứng tại A, cho biết EI=const *(hình 3)*.



Hình 3

Bài 3:

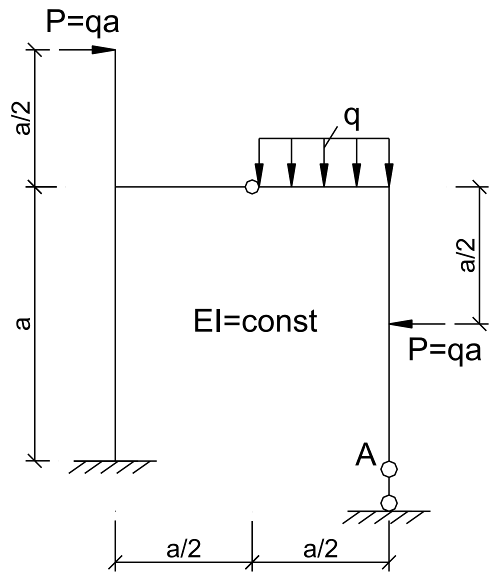
Xác định góc xoay tương đối giữa 2 tiết diện A và B như trên *hình 4*:



Hình 4

Bài 4:

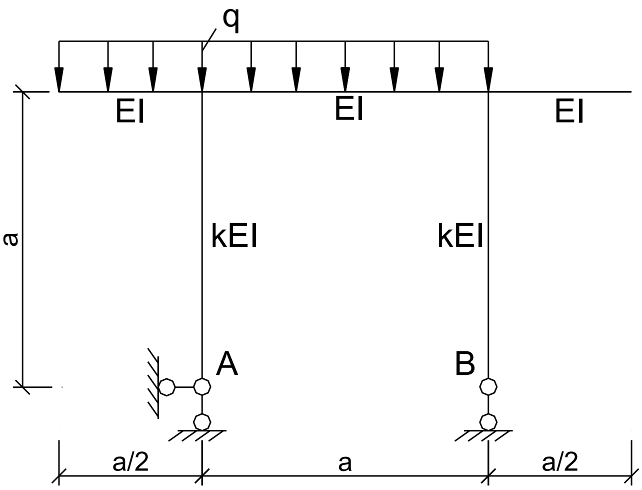
Xác định chuyển vị ngang tại A, cho biết EI=const *(hình 5)*.



Hình 5

Bài 5:

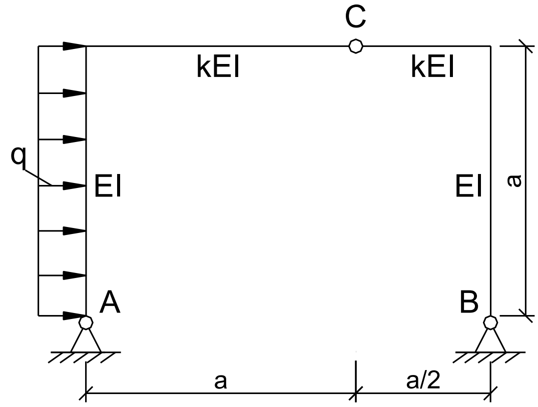
Xác định chuyển vị ngang tại B, cho biết EI=1,2.10^5 kN.m^2 *(hình 6)*



Hình 6

Bài 6:

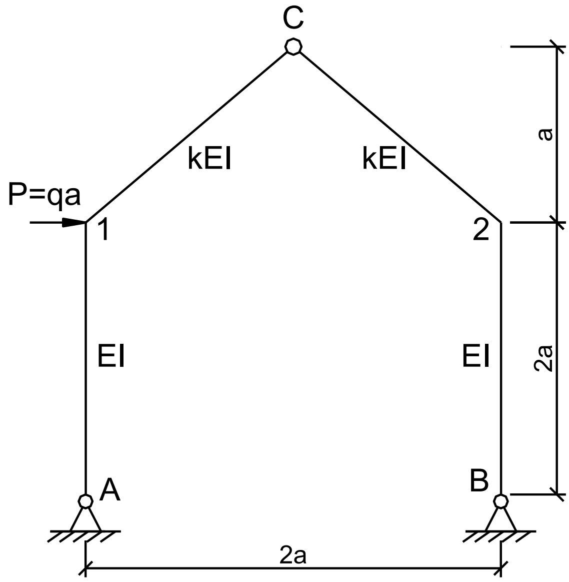
Xác định chuyển vị toàn phần tại C như trên *hình 7*:



Hình 7

Bài 7:

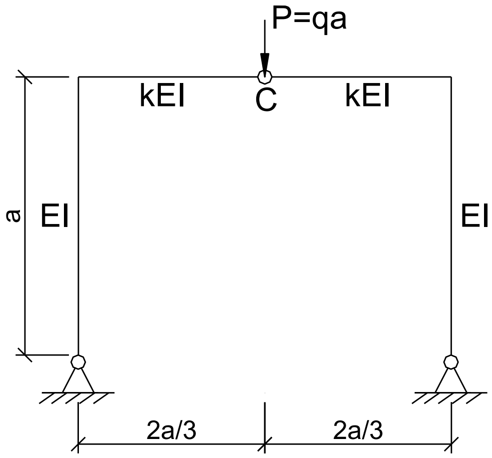
Xác định chuyển vị tương đối giữa 2 tiết diện 1 và 2 như trên *hình 8*:



Hình 8

Bài 8:

Xác định góc xoay và chuyển vị thẳng tại C như trên *hình 9*:

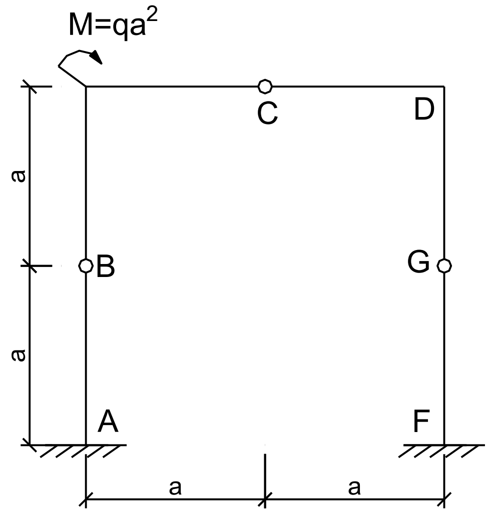


Hình 9

Bài 9:

Cho biết khung có EI=const và chịu mômen tập trung như trên *hình 10*. Xác định:

- Chuyển vị thẳng đứng tại C
- Chuyển vị thẳng tương đối giữa B và G
- Góc xoay tại D.

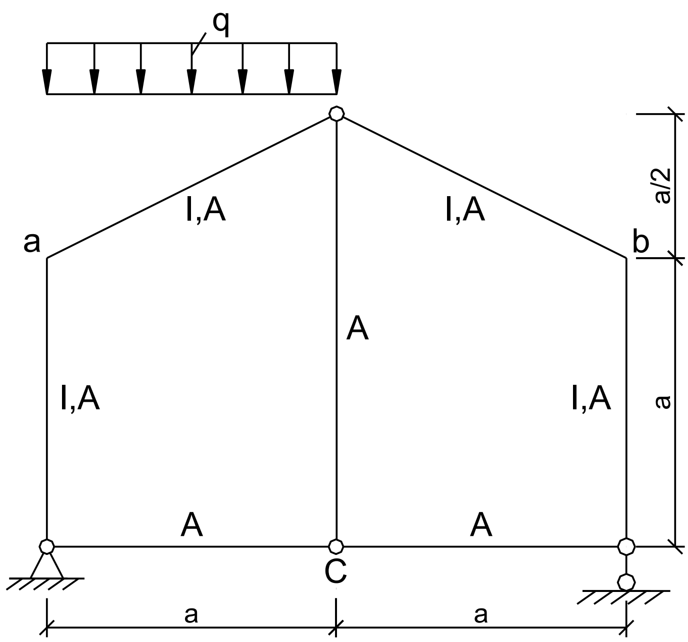


Hình 10

Bài 10:

Cho biết khung chịu tải trọng như trên *hình 11,* trong đó I=0,1.A. Xác định:

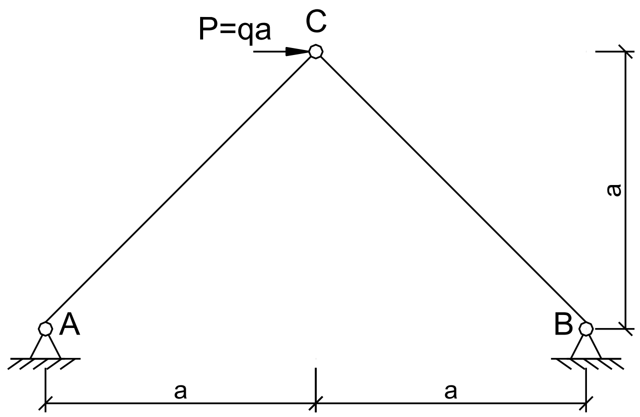
- Chuyển vị thẳng đứng tại C
- Chuyển vị thẳng tương đối giữa a và b.



Hình 11

Bài 11:

Xác định chuyển vị ngang và chuyển vị thẳng đứng tại C như trên *hình 12*:



Hình 12

II. CHƯƠNG 2
TÍNH HỆ SIÊU TĨNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰC

I.1. Mục tiêu

Hệ siêu tĩnh là hệ thường gặp trong kết cấu xây dựng, vì vậy việc tính toán hệ siêu tĩnh là rất quan trọng. Trong chương này giúp cho sinh viên hiểu rõ những vấn đề sau:

+ Khái niệm về hệ siêu tĩnh, cách xác định bậc siêu tĩnh

+ Nội dung của phương pháp lực dùng để tính hệ siêu tĩnh

+ Những vấn đề cần chú ý khi tính hệ siêu tĩnh.

I.2. Quy định hình thức học cho mỗi nội dung nhỏ

Nội dung	Hình thức học
- Khái niệm về hệ siêu tĩnh - Bậc siêu tĩnh	Giảng
- Nội dung của phương pháp lực	Giảng
- Xác định chuyển vị trong hệ siêu tĩnh	Giảng
- Kiểm tra kết quả tính toán của phương pháp lực	Giảng, thảo luận
- Một số điều cần chú ý khi tính hệ siêu tĩnh bậc cao	Sinh viên tự nghiên cứu
- Cách vận dụng tính chất đối xứng của hệ đối xứng	Giảng, thảo luận
- Sử dụng các thanh tuyệt đối cứng để thay đổi vị trí và phương các ẩn số nhằm đơn giản hoá cấu trúc của hệ phương trình chính tắc	Sinh viên tự nghiên cứu
- Hệ dàn siêu tĩnh	Giảng, thảo luận
- Dầm liên tục	Giảng, thảo luận

I.3. Các nội dung cụ thể

D. <u>Nội dung lý thuyết</u>

2.1. Khái niệm về hệ siêu tĩnh - Bậc siêu tĩnh

2.1.1. Hệ siêu tĩnh

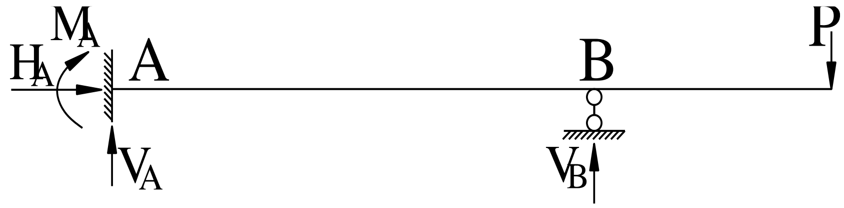
a. Định nghĩa

Hệ siêu tĩnh là những hệ mà chỉ với các phương trình cân bằng tĩnh học không thôi thì chưa đủ để xác định toàn bộ các phản lực và nội lực trong hệ. Nói cách khác, đó là hệ bất biến hình và có liên kết thừa.

b. Ví dụ

Xét hệ trên

hình (*Hình 2.1.1*):



Hình 2.1.1

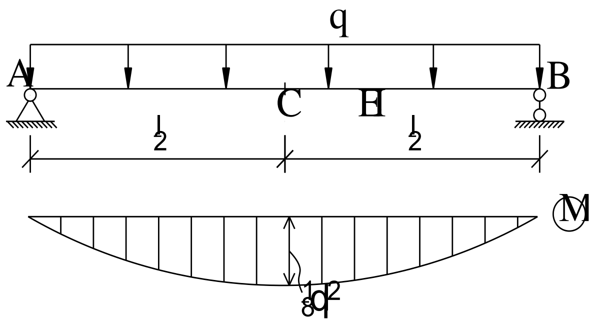
- Phần hệ AB chưa thể xác định được phản lực chỉ bằng các phương trình cân bằng tĩnh học (4 phản lực V_A, H_A, M_A, V_B nhưng chỉ có 3 phương trình) nên chưa thể xác định được nội lực $\rightarrow$ Vậy theo định nghĩa, hệ đã cho là hệ siêu tĩnh.

2.1.2. Tính chất của hệ siêu tĩnh

a. Tính chất 1

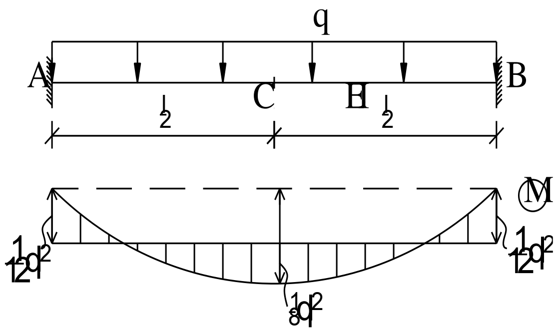
Nội lực, biến dạng và chuyển vị trong hệ siêu tĩnh nói chung là nhỏ hơn so với hệ có cùng kích thước và trọng tải tác dụng.

Hệ tĩnh định



$$M_{max} = \frac{ql^2}{8},\ y_{max} = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}$$

Hệ siêu tĩnh



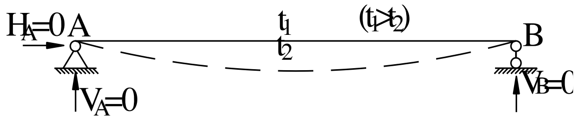
$$M_{max} = \frac{ql^2}{12},\ y_{max} = \frac{1}{384}\frac{ql^4}{EI}$$

b. Tính chất 2

Trong hệ siêu tĩnh có xuất hiện nội lực do các nguyên nhân: biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa và do chế tạo lắp ráp không chính xác gây ra.

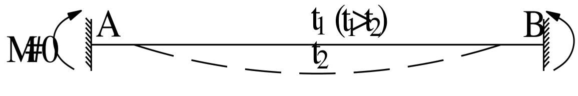
❖ *Nguyên nhân biến thiên nhiệt độ*

Hệ tĩnh định



Các liên kết không ngăn cản biến dạng của dầm nên không làm xuất hiện nội lực và phản lực.

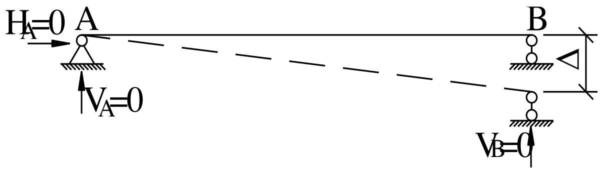
Hệ siêu tĩnh



Các liên kết tại A và B ngăn cản biến dạng của dầm nên làm xuất hiện nội lực và phản lực.

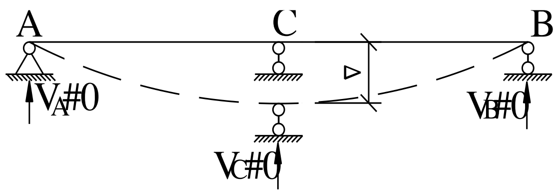
❖ *Nguyên nhân chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa*

Hệ tĩnh định



Các liên kết không ngăn cản chuyển vị tại B nên dầm chỉ bị nghiêng mà không biến dạng nên không làm xuất hiện nội lực và phản lực.

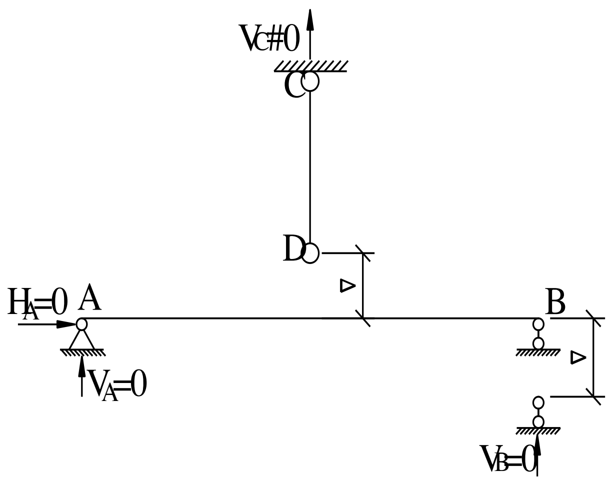
Hệ siêu tĩnh



Các liên kết tại A, B có xu hướng ngăn cản chuyển vị tại C làm cho dầm bị uốn cong do đó xuất hiện nội lực và phản lực.

❖ *Nguyên nhân chế tạo, lắp ráp không chính xác*

Dầm tĩnh định AB nếu được ráp thêm thanh CD vào sẽ trở thành hệ siêu tĩnh. Nếu thanh CD do chế tạo hụt 1 đoạn Δ thì khi ráp vào nó sẽ bị kéo dãn ra đồng thời dầm AB sẽ bị uốn cong nên sẽ làm phát sinh nội lực và phản lực trong hệ.



c. Tính chất 3

Nội lực trong hệ siêu tĩnh phụ thuộc vào độ cứng của các cấu kiện trong hệ (EI, EA, GA ....)

$\rightarrow$ Nhận xét: Hệ siêu tĩnh chịu lực tốt hơn hệ tĩnh định.

2.1.3. Bậc siêu tĩnh

a. Định nghĩa

Bậc siêu tĩnh là số các liên kết thừa tương đương với liên kết loại 1 ngoài số liên kết cần thiết để cho hệ bất biến hình. Ký hiệu n.

b. Cách xác định

Có thể sử dụng công thức liên hệ giữa số lượng các miếng cứng và các liên kết giữa chúng trong phần *phân tích cấu tạo hình học của hệ* để xác định:

$n = T + 2K + 3H + C - 3D$ (Cho hệ bất kỳ có nối đất)

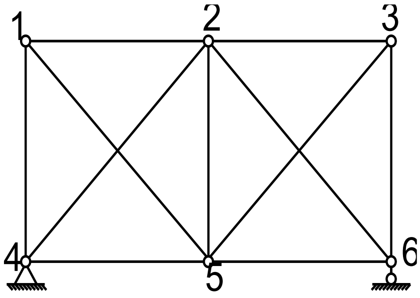
$n = T + 2K + 3H - 3(D - 1)$ (Cho hệ bất kỳ không nối đất)

$n = D - 2M + C$ (Cho hệ dàn có nối đất)

$n = D - 2M + 3$ (Cho hệ dàn không nối đất)

Ví dụ: Xác định bậc siêu tĩnh của hệ trên hình (*Hình 2.1.2* & *Hình 2.1.3*)

Hình 2.1.2

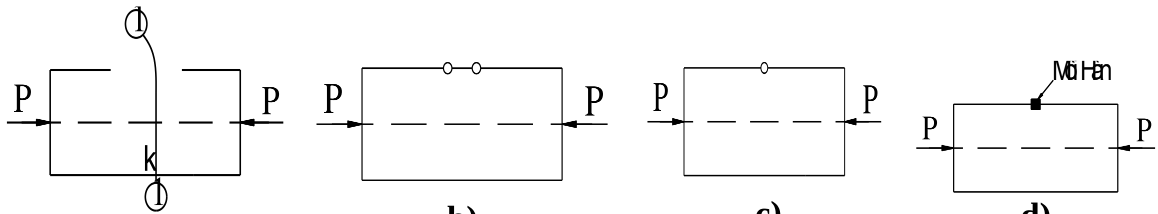


Hình 2.1.3

- Hệ trên *hình 2.1.2* có n = 0 + 2.0 +3.0 + 6 - 3.1 = 3
- Hệ trên *hình 2.1.3* có n = 11 - 2.6 + 3 = 2

Cách phân tích các chu vi kín của hệ:

Xét 1 chu vi hở trên hình (*Hình 2.1.4a*), đây là hệ tĩnh định.



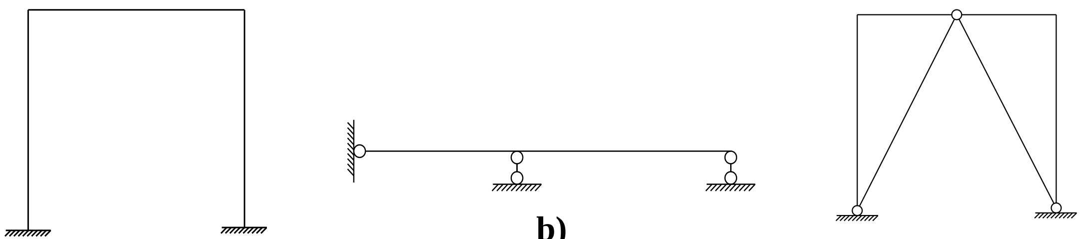
a) **b)** **c)** **d)**

Hình 2.1.4

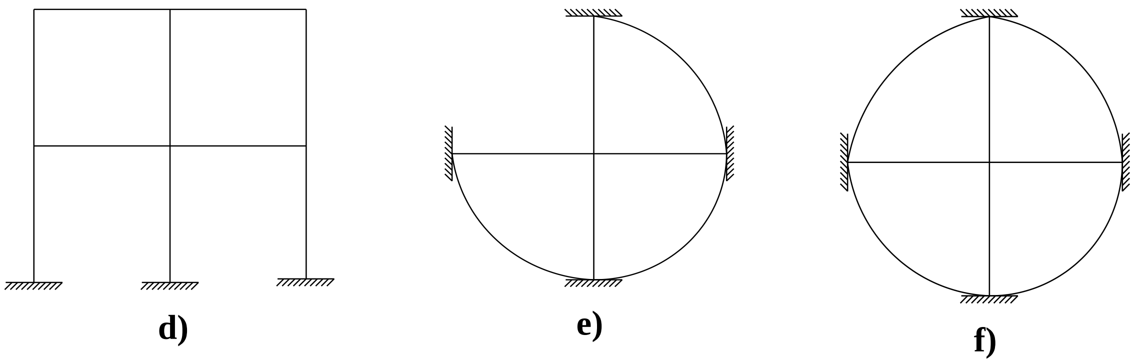
- Nếu nối chu vi đó bằng 1 liên kết thanh (*Hình 2.1.4b*) thì hệ thu được là hệ siêu tĩnh bậc 1 (n=1).
- Nếu nối chu vi bằng 1 liên kết khớp (*Hình 2.1.4c*) thì hệ thu được là hệ siêu tĩnh bậc 2 (n=2).
- Nếu nối chu vi đó bằng 1 liên kết hàn (*Hình 2.1.4d*) thì hệ thu được là hệ siêu tĩnh bậc 3 (n=3). Hệ lúc này được gọi là chu vi kín.

Phân tích ngược lại ta thấy 1 chu vi kín có bậc siêu tĩnh bằng 3, nếu thêm vào 1 khớp đơn giản thì bậc siêu tĩnh sẽ giảm đi 1. Vậy nếu gọi V là số chu vi kín, K là số liên kết khớp đơn giản của hệ thì bậc siêu tĩnh của hệ được tính bằng công thức:

$$\boxed{n = 3V - K}$$



a) **b)** **c)**



Hình 2.1.5

- Hệ trên *hình 2.1.5a* có n = 3.1 - 0 = 3
- Hệ trên *hình 2.1.5b* có n = 3.2 - 5 = 1
- Hệ trên *hình 2.1.5c* có n = 3.3 - 7 = 2
- Hệ trên *hình 2.1.5d* có n = 3.4 - 0 = 12

Chú ý: Cần quan niệm trái đất là 1 chu vi hở (miếng cứng tĩnh định). Nếu quan niệm hệ gồm 4 chu vi kín trên *hình 2.1.5f* thì bậc siêu tĩnh của hệ n =12. Đây là quan niệm sai vì trái đất tạo thành 1 chu vi kín. Quan niệm hệ gồm 3 chu vi kín như trên *hình 2.1.5e* là quan niệm đúng, lúc này n =3.3 - 0 = 9

2.2. Nội dung của phương pháp lực

2.2.1. Hệ cơ bản của phương pháp lực

Hệ cơ bản của phương pháp lực là hệ được suy ra từ hệ đã cho bằng cách loại bỏ một số hay tất cả các liên kết thừa.

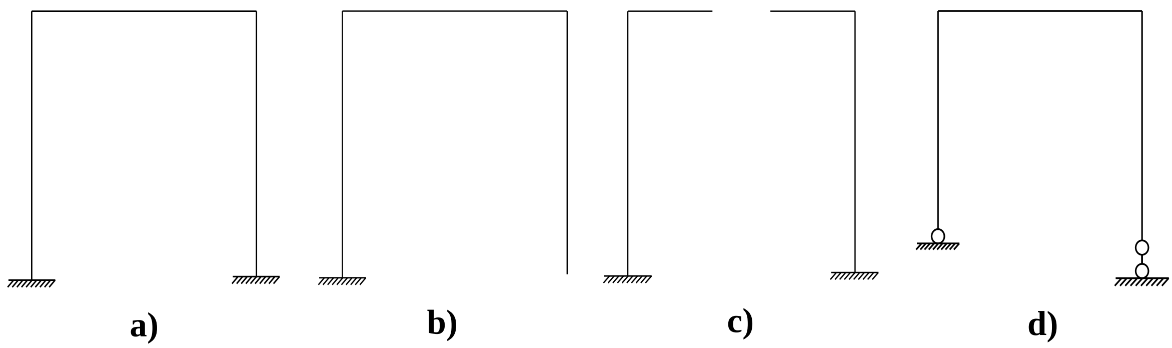
+ Nếu loại bỏ tất cả các liên kết thừa thì hệ cơ bản sẽ là hệ tĩnh định (thường sử dụng cách này).

+ Nếu loại bỏ một số các liên kết thừa thì hệ cơ bản sẽ là hệ siêu tĩnh bậc thấp hơn.

Yêu cầu: Hệ cơ bản phải là hệ bất biến hình và nên thuận tiện cho việc tính toán.

Ví dụ: Lập hệ cơ bản phương pháp lực của hệ siêu tĩnh trên *hình 2.2.1.a*

Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh n= 3. Với hệ cơ bản tĩnh định có thể được tạo như trên các *hình 2.2.1b, c, d.*



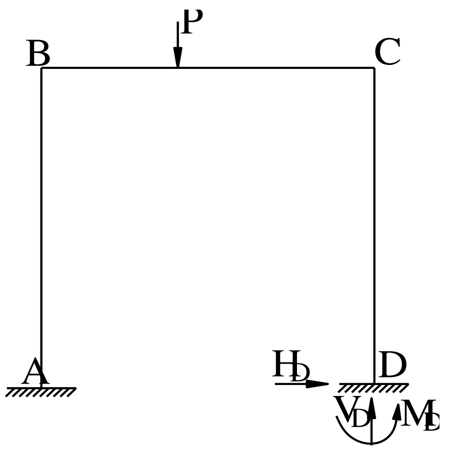
Hình 2.2.1

→ *Nhận xét:* Với một hệ siêu tĩnh đã cho có thể có vô số hệ cơ bản được tạo ra.

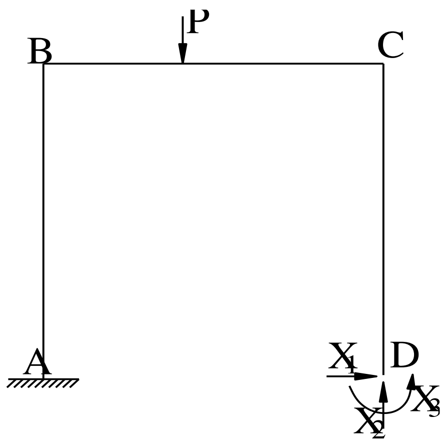
2.2.2. Hệ phương trình cơ bản của phương pháp lực

Khi tính hệ siêu tĩnh, ta không được tính trực tiếp trên hệ đó mà tính hệ cơ bản của nó. Tuy nhiên hệ cơ bản và hệ ban đầu là có sự khác nhau. Để hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh ban đầu của nó ta cần so sánh và bổ sung thêm các điều kiện.

Ta đi so sánh hệ siêu tĩnh *hình 2.2.2* và hệ cơ bản của nó *hình 2.2.3*



Hình 2.2.2



Hình 2.2.3

- Tại D tồn tại các phản lực V_D, V_D, M_D
- Tại D không tồn tại chuyển vị

- Tại D không tồn tại các phản lực
- Tại D tồn tại chuyển vị

→ *Vậy để cho hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh ban đầu thì trên hệ cơ bản cần*:

+ Đặt thêm vào D các lực (X_1,X_2.X_3) tương đương thay thế (H_D,V_D,M_D).

+ Thiết lập điều kiện chuyển vị tại D do (X_1,X_2 ,X_3,P) gây ra bằng không.

Tổng quát:

Cho hệ siêu tĩnh chịu các nguyên nhân: tải trọng (P), biến thiên nhiệt độ (t), chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa (Z) và chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ n liên kết thừa. Để hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh ban đầu trên hệ cơ bản cần:

+ Đặt thêm các lực (X_1,X_2,...,X_n) tương ứng vị trí và phương các liên kết bị loại bỏ, có chiều tuỳ ý. Những lực này chưa biết và giữ vai trò ẩn số.

+ Thiết lập điều kiện chuyển vị tương ứng vị trí và phương các liên kết bị loại bỏ do các nguyên nhân (X_1,X_2,...,X_n,P,t,Z)=0 (chính xác hơn là bằng như trên hệ siêu tĩnh ban đầu). Điều kiện này có thể viết dưới dạng:

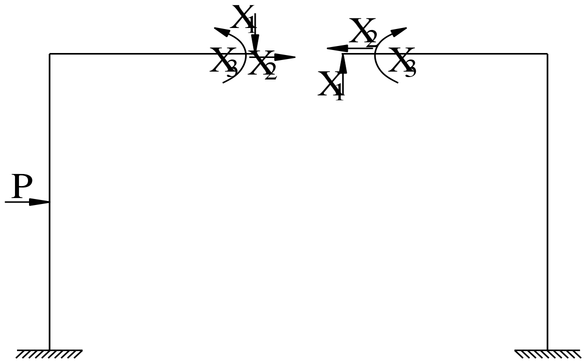
$$\boxed{\begin{cases} \Delta X_1(X_1, X_2, ..., X_n, P, t, Z) = 0 \\ \Delta X_2(X_1, X_2, ..., X_n, P, t, Z) = 0 \\ .... \\ \Delta X_n(X_1, X_2, ..., X_n, P, t, Z) = 0 \end{cases}}$$

Hệ trên được gọi là hệ phương trình cơ bản của phương pháp lực.

Chú ý:

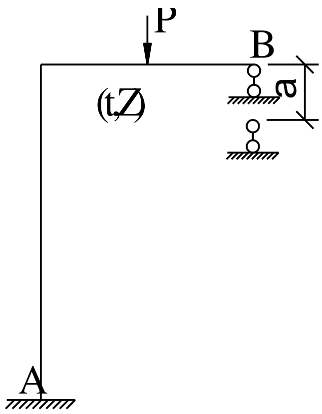
- Nếu tạo hệ cơ bản bằng cách loại bỏ liên kết giữa miếng cứng và miếng cứng thì trên hệ cơ bản phải đặt vào những cặp lực trực đối nhau tại các liên kết bị loại bỏ và điều kiện chuyển vị chính và chuyển vị tương đối giữa hai tiết diện 2 bên liên kết bị loại bỏ bằng không. Ví dụ hệ cơ bản *hình 2.2.5* của hệ trên *hình 2.2.4*:

Hình 2.2.4

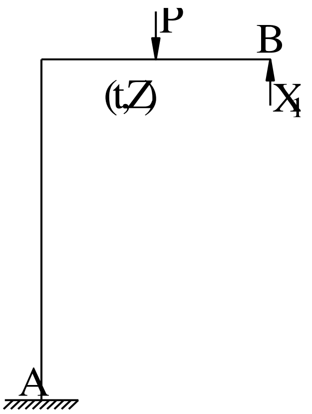


Hình 2.2.5

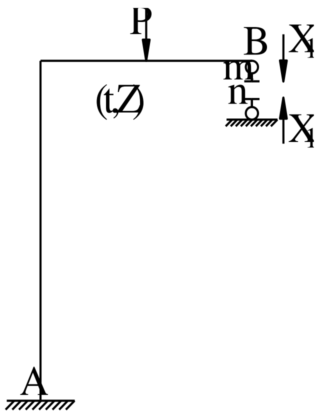
- Trường hợp liên kết trong hệ chịu chuyển vị cưỡng bức và khi tạo hệ cơ bản ta loại bỏ liên kết này. Ví dụ xét hệ siêu tĩnh trên *hình 2.2.6* và hệ cơ bản của nó trên *hình 2.2.7*:



Hình 2.2.6



Hình 2.2.7



Hình 2.2.8

Lúc này chuyển vị tại B theo phương X_1 sẽ bằng chuyển vị cưỡng bức. Hệ phương trình cơ bản sẽ là: $\Delta X_1(X_1,P,t,Z) = -a$.

Lấy dấu âm trước a khi X_1 ngược chiều chuyển vị cưỡng bức.

- Cũng trong trường hợp chuyển vị cưỡng bức nhưng nếu tạo hệ cơ bản bằng cách loại bỏ liên kết này, ví dụ hệ cơ bản tạo trên *hình 2.2.8*.

Có thể xem đây là trường hợp loại bỏ liên kết giữa miếng cứng và miếng cứng nên trên hệ cơ bản ta đặt thêm cặp X_1. Dù rằng tại tiết diện bị cắt, n có tồn tại chuyển vị do liên kết bị chuyển vị cưỡng bức nhưng chuyển vị của chúng theo phương X_1 vẫn bằng không nên hệ phương trình cơ bản: $\Delta X_1(X_1,P,t,Z)= 0$

2.2.3. Hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực

Xét phương trình thứ k của hệ phương trình cơ bản:

$$X_k(X_1, X_2,......, X_n,P\ t,Z) = 0$$

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, khai triển:

$$X_k(X_1) + \Delta X_k(X_2) + ...+\Delta X_k(X_n) + \Delta X_k(P) + \Delta X_k(t) + \Delta X_k(Z) = 0$$

Gọi δ_{km} là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương X_k do riêng P,t,Z gây ra trên hệ cơ bản, ta có:

$$\Delta X_k(P)= \Delta_{kP},\ \Delta X_k(t)= \Delta_{kt},\ \Delta X_k(Z)= \Delta_{kz}$$

Cho m = $\overline{1,n}$ và thay tất cả vào ta được:

$$\boxed{\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + ... + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} + \Delta_{1t} + \Delta_{1Z} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + ... + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} + \Delta_{2t} + \Delta_{2Z} = 0 \\ .... \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + ... + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} + \Delta_{nt} + \Delta_{nZ} = 0 \end{cases}}$$

Hệ phương trình trên được gọi là hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực với các ẩn số ($X_1, X_2,......, X_n$).

Trong đó:

δ_{kk}: gọi là hệ số chính, $\delta_{kk}>0$

$\delta_{km}(k\neq m)$: gọi là hệ số phụ, $\delta_{km} = \delta_{mk}$

Δ_{kP}, Δ_{kt}, Δ_{kz}: là các số hạng tự do.

2.2.4. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc

Như đã nói trong phần hệ phương trình chính tắc, ý nghĩa của các hệ số và các số hạng tự do là chuyển vị trên hệ cơ bản do các nguyên nhân tương ứng gây ra. Vậy việc xác định chúng là đi thực hiện bài toán tìm chuyển vị.

a. Hệ số chính và phụ (δ_{km})

+ Trạng thái "m": tính hệ cơ bản chịu nguyên nhân $X_m = 1$. Xác định nội lực $\overline{M}_m$, $\overline{N}_m$, $\overline{Q}_m$

+ Tạo trạng thái "k": đặt lực $P_k = 1$ tương ứng và vị trí của lực X_k trên hệ cơ bản. Xác định nội lực $\overline{M}_k$, $\overline{N}_k$, $\overline{Q}_k$.Áp dụng công thức Maxwell-Morh:

$$\boxed{\delta_{km} = \sum\int\frac{\overline{M}_k\overline{M}_m}{EI}ds + \sum\int\frac{\overline{N}_k\overline{N}_m}{EA}ds + \sum\int\nu\frac{\overline{Q}_k\overline{Q}_m}{GA}ds}$$

Nếu cho phép áp dụng phép "nhân biểu đồ" Vêrêxaghin:

$$\boxed{\delta_{km} = \left(\overline{M}_k\right)\left(\overline{M}_m\right) + \left(\overline{N}_k\right)\left(\overline{N}_m\right) + \left(\overline{Q}_k\right)\left(\overline{Q}_m\right)}$$

b. Số hạng tự do

❖ *Do tải trọng:(Δ_{kP})*

+ Trạng thái "m": tính hệ cơ bản chịu tải trọng. Xác định nội lực M_p^o , N_p^o , Q_p^o

+ Tạo trạng thái "k": tương tự lúc xác định δ_{km}.

Áp dụng công thức Maxwell-Morh:

$$\boxed{\Delta_{kP} = \sum\int \overline{M}_k . \frac{M_p^o}{EJ}\,ds + \sum\int \overline{N}_k . \frac{N_p^o}{EF}\,ds + \sum\int \nu\overline{Q}_k . \frac{Q_p^o}{GF}\,ds}$$

Nếu cho phép áp dụng phép "nhân biểu đồ" Vêrêxaghin:

$$\boxed{\Delta_{kP} = (\overline{M}_m)(M_p^o) + (\overline{N}_m)(N_p^o) + (\overline{Q}_m)(Q_p^o)}$$

❖ *Do biến thiên nhiệt độ (Δ_{kt})*

+ Trạng thái "m": là hệ cơ bản chịu nguyên nhân biến thiên nhiệt độ. Nếu hệ cơ bản là tĩnh định nguyên nhân này sẽ không gây ra nội lực. Công thức thiết lập dưới đây chỉ xét cho trường hợp này.

+ Trạng thái "k": tương tự lúc xác định δ_{km}.

Áp dụng công thức Maxwell-Morh:

$$\boxed{\Delta_{kt} = \sum\int \frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})\,\overline{M}_k ds + \sum\int \alpha t_{cm}\,\overline{N}_k\,ds}$$

Trong trường hợp α ,h, t_{2m} ,t_{1m} ,t_{cm} = const trên từng đoạn thanh thì:

$$\boxed{\Delta_{kt} = \sum \frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})\,\Omega(\overline{M}_k)ds + \sum \alpha t_{cm}\,\Omega(\overline{N}_k)}$$

Ý nghĩa cụ thể và dấu của các đại lượng xem trong chương chuyển vị.

❖ *Do chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa (Δ_{kz})*

+ Trạng thái "m": là hệ cơ bản chịu nguyên nhân là chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa. Nếu hệ cơ bản là tĩnh định nguyên nhân này không gây ra nội lực. Công thức thiết lập dưới đây chỉ xét cho trường hợp này.

+Trạng thái "k": tương tự lúc xác định δ_{km}, nhưng chỉ xác định $\overline{R}_{jk}$.

Áp dụng công thức Maxwell-Morh:

$$\boxed{\Delta_{kz} = -\sum \overline{R}_{jk}.Z_j}$$

Ý nghĩa cụ thể và dấu của các đại lượng, xem trong chương chuyển vị.

Chú ý: Nếu X_k lấy bằng 1 thì có thể lấy X_k thay thế cho $P_k = 1$ khi tạo trạng thái "k" để xác định các hệ số.

2.2.5. Cách tìm nội lực trong hệ siêu tĩnh

a. Cách tính trực tiếp

Sau khi giải hệ phương trình chính tắc xác định các ẩn số X_k ($k = \overline{1,n}$), ta xem chúng như các ngoại lực tác dụng lên hệ cơ bản cùng với các nguyên nhân tác dụng lên hệ siêu tĩnh ban đầu. Giải hệ cơ bản cùng các nguyên nhân này sẽ tìm được các nội lực của hệ. Vì hệ cơ bản thường là hệ tĩnh định nên có thể sử dụng các phương pháp đã quen biết để tìm nội lực.

b. Cách áp dụng nguyên lý cộng tác dụng

Xét một đại lượng nghiên cứu S nào đó (nội lực, phản lực, chuyển vị, biểu đồ nội lực...). Theo cách tính trực tiếp nói trên ta có thể thay thế việc xác định S trên hệ siêu tĩnh bằng cách xác định đại lượng S trên hệ cơ bản chịu nguyên nhân tác dụng lên hệ siêu tĩnh ban đầu và các lực X_k đồng thời tác dụng.

$$S = S(X_1, X_2, ..., X_n, P, t, Z)$$

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng:

$$S = S(X_1) + S(X_2) + ... S(X_n) + S(P) + S(t) + S(Z)$$

Gọi $\overline{S}_k$ là đại lượng S do riêng $X_k = 1$ gây ra trên hệ cơ bản, ta có: $S(X_k) = \overline{S}_k.X_k$

Gọi S_p^o, S_t^o, S_Z^o lần lượt là đại lượng S do riêng P, t ,Z gây ra trên hệ cơ bản, thế thì:

$$S(P) = S_p^o, \ S(t) = S_t^o, \ S(Z) = S_Z^o$$

Cho $k = \overline{1,n}$, thay thế tất cả vào ta được :

$$\boxed{S = \overline{S}_1.X_1 + \overline{S}_2.X_2 + ... \overline{S}_n.X_n + S_p^o + S_t^o + S_Z^o}$$

Chú ý:

- Đại lượng S có thể được xác định ngay nếu có sẵn $\overline{S}_k$, S_p^o, S_t^o, S_Z^o
- Nếu đại lượng S là phản lực hay nội lực và hệ cơ bản là tĩnh định thì các đại lượng S_p^o, S_t^o, S_Z^o sẽ không tồn tại.

Sau đây ta sẽ vận dụng biểu thức trên để vẽ các biểu đồ nội lực.

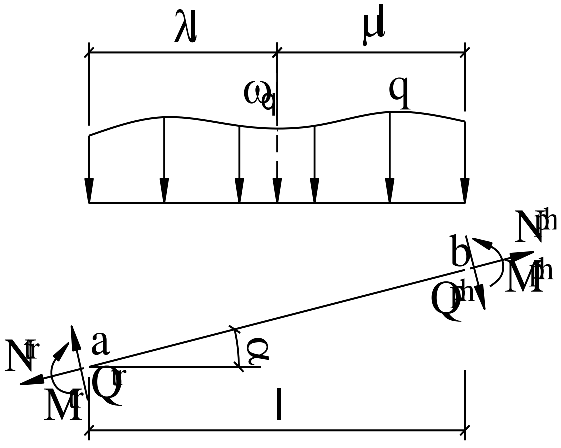
❖ *Biểu đồ mômen uốn (M)*

Đối với những hệ dầm và khung gồm những thanh thẳng, trong các bước tính toán trung gian người ta thường bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt đến chuyển vị. Do đó khi xác định các hệ số người ta không vẽ các biểu đồ (Q), (N) mà chỉ vẽ biểu đồ mômen (M). Trong những trường hợp này biểu đồ mômen của hệ được vẽ theo biểu thức trên là tiện lợi nhất. Thay đại lượng S bằng biểu đồ (M) ta được:

$$\boxed{(M) = (\overline{M}_1).X_1 + (\overline{M}_2).X_2 + ...(\overline{M}_n).X_n + (M_p^o) + (M_t^o) + (M_Z^o)}$$

❖ *Biểu đồ lực cắt (Q)*

Như phân tích trên, sẽ không thuận lợi nếu vẽ biểu đồ (Q) theo biểu thức trên. Sau đây sẽ trình bày cách vẽ biểu đồ lực cắt theo biểu đồ (M) đã vẽ. Để thuận tiện cho việc áp dụng, ta đi thiết lập công thức tổng quát xác định lực cắt ở 2 đầu 1 đoạn thanh thẳng ab tách ra từ hệ chịu tải trọng phân bố liên tục hướng theo 1 phương bất kỳ và có qui luật bất kỳ như trên *hình 2.2.9*.



Hình 2.2.9

Tải trọng tác dụng được mô tả trên *hình 2.2.9*. Trong đó q, M^{tr}, M^{ph} đã biết và Q^{tr}, N^{tr}, Q^{ph}, N^{ph} chưa biết, giả thiết có chiều dương theo vị trí người quan sát nhìn sao cho tải trọng phân bố q hướng xuống. Từ các điều kiện cân bằng mômen với điểm b và a, ta suy ra:

$$\boxed{Q^{tr} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha + \mu\varpi_q\cos\alpha}$$

$$\boxed{Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha - \lambda\varpi_q\cos\alpha}$$

Trong đó:

ω_q: là hợp lực của tải phân bố q trên đoạn thanh ab.

λl, μl: lần lượt là khoảng cách từ hợp lực ω_q đến đầu trái và phải của thanh ab theo phương nằm ngang. Nếu tải trọng tác dụng lên thanh ab là phân bố đều:

q = const thì $\omega_q = ql$, $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$

Thay vào biểu thức:

$$Q^{tr} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha + \frac{1}{2}ql\cos\alpha$$

$$Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha - \frac{1}{2}ql\cos\alpha$$

Nếu trên đoạn thanh ab không chịu tải trọng: q = 0 thì $\omega_q = 0$. Thay vào biểu thức:

$$Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l}\cos\alpha$$

Sau khi xác định được lực cắt từ hai đầu mỗi đoạn thanh cũng chính là tại các tiết diện đặc trưng, tiến hành vẽ biểu đồ lực cắt dựa vào dạng đường của nó như trong phần vẽ biểu đồ nội lực của hệ tĩnh định.

❖ *Biểu đồ lực dọc*

Cũng tương tự cho biểu đồ (Q),biểu đồ lực dọc (N) được vẽ bằng cách suy ra từ biểu đồ lực cắt. Cách thực hiện như sau:

+ Tách và xét cân bằng hình chiếu cho mỗi nút của hệ sao cho tại mỗi nút có không quá hai lực dọc chưa biết.

+ Khi khảo sát cân bằng ngoài tải trọng tác dụng lên nút còn có nội lực tại các đầu thanh quy tụ vào nút, bao gồm: mômen uốn (*đã biết nhưng không cần quan tâm*), lực cắt (*đã biết, lấy trên biểu đồ lực cắt*), lực dọc (*chưa biết, giả thiết có chiều dương*)

Ngoài ra, khi xác định lực dọc cũng có thể vận dụng mối quan hệ giữa lực dọc tại hai đầu thanh từ điều kiện của thanh được vẽ trên hình (*Hình 2.2.9*).

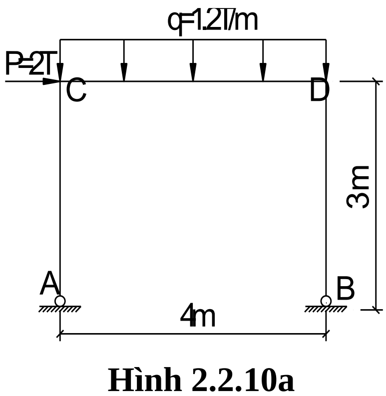
$$\boxed{N^{ph} = N^{tr} + \omega_q\ .\sin\alpha}$$

Từ phương trình trên cho thấy nếu trên đoạn thanh không chịu tải trọng hoặc tải trọng tác dụng vuông góc với trục thanh thì *lực dọc tại hai đầu sẽ bằng nhau* và *cùng gây kéo hoặc gây nén*.

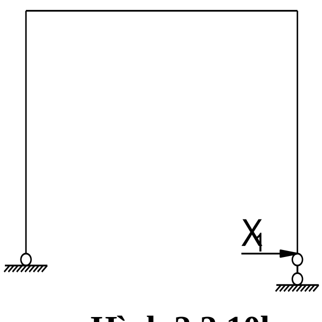
Sau khi xác định được lực dọc tại 2 đầu mỗi đoạn thanh, tiến hành vẽ biểu dồ lực dọc như trong phần vẽ biểu đồ nội lực của hệ tĩnh định.

2.2.6. Các ví dụ về phương pháp lực

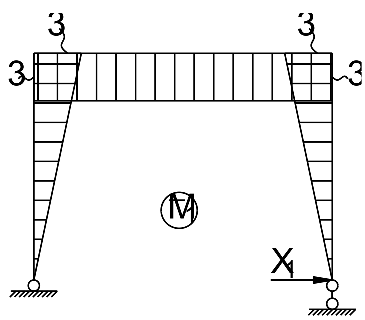
Ví dụ 1: Vẽ các biểu đồ nội lực trên hình (*Hình 2.2.10a*). Cho biết độ cứng trong thanh đứng là EI, trong thanh ngang là 2EI.



Hình 2.2.10a



Hình 2.2.10b



Hình 2.2.10c

a. Bậc siêu tĩnh.

n = 3V - K = 3.1 - 2 = 1

b. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc

- Hệ cơ bản : tạo trên *hình 2.2.10b.*

- Hệ phương trình chính tắc:

$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$

c. Xác định các hệ số của phương trình chính tắc

- Vẽ các biểu đồ ($\overline{M}_1$), (M_p^o): (*Hình 2.2.10c&d*):

$$\delta_{11} = (\overline{M}_1).(\overline{M}_1) = \left[\frac{1}{EI}.\frac{3.3}{2}.\frac{2}{3}.3\right].2 + \frac{1}{2EI}.3.4.3 = \frac{36}{EI}$$

$$\Delta_{1P} = (\overline{M}_1).(M_p^o) = \frac{1}{EI}.\frac{3.3}{2}.\frac{2}{3}.6 + \frac{1}{2EI}\left[\frac{6.4}{2}+\frac{2}{3}.4.2,4\right].3 = \frac{45,6}{EI}$$

Thay vào phương trình chính tắc:

$$\frac{36}{EI}.X_1 + \frac{45,6}{EI} = 0 \rightarrow X_1 = \frac{-45,6}{36} = -1,266 < 0$$

c. Vẽ các biểu đồ nội lực

❖ *Mômen*

$$(M) = (\overline{M}_1).X_1 + (M_p^o)$$

($\overline{M}_1$).X_1: lấy tung độ trên biểu đồ ($\overline{M}_1$) nhân với giá trị X_1= -1,266. Dấu “-’’ có nghĩa là ta phải đổi dấu của tung độ sau khi nhân vào. Sau đó lấy tổng đại số các tung độ trên 2 biểu đồ ($\overline{M}_1$).X_1 và (M_p^o) sẽ được biểu đồ (M). Kết quả trên hình vẽ (*Hình 2.2.10e*)

❖ *Lực cắt*

Được vẽ bằng cách suy ra từ (M)

-Trên đoạn AC: q = 0

$$Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{M^{ph}-M^{tr}}{l}\cos\alpha = \frac{2,2-0}{3}.1 = 0,733$$

-Trên đoạn BD: q = 0

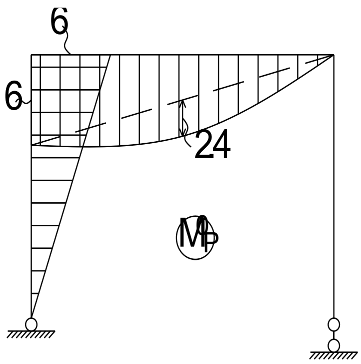
$$Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{M^{ph}-M^{tr}}{l}\cos\alpha = \frac{3,8-0}{3}.1 = 1,226$$

- Trên đoạn CD: q = const

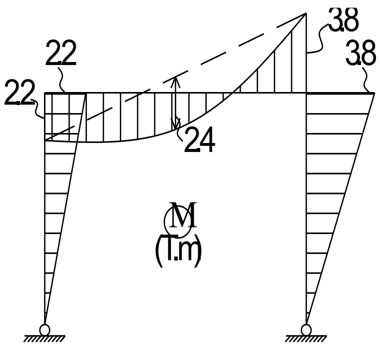
$$Q^{tr} = \frac{M^{ph}-M^{tr}}{l}\cos\alpha + \frac{1}{2}ql\cos\alpha = \frac{-3,8-(2,2)}{4}.1 + \frac{1}{2}.1,2.4 = 0,9$$

$$Q^{ph} = \frac{M^{ph}-M^{tr}}{l}\cos\alpha - \frac{1}{2}ql\cos\alpha = \frac{-3,8-(2,2)}{4}.1 - \frac{1}{2}.1,2.4 = -3,9$$

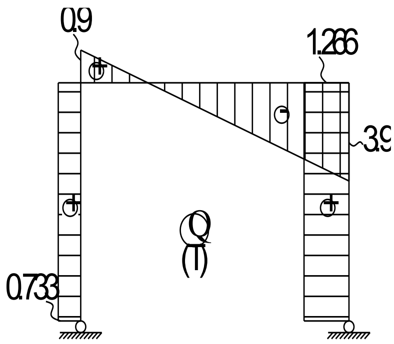
Dựng tung độ vừa tính và vẽ biểu đồ (Q) như trên *hình 2.2.10f*



Hình 2.2.10d



Hình 2.2.10e



Hình 2.2.10f

❖ *Lực dọc*

Suy ra từ các biểu đồ lực cắt (Q):

- Tách nút C:

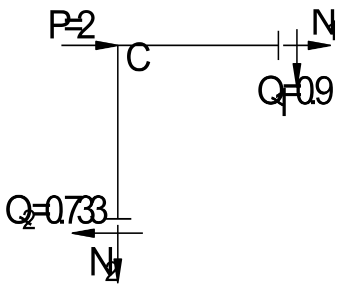
$$\left[\begin{array}{l}\sum X = 0 \rightarrow N_1 = Q_2 - P = -1{,}266 \\ \sum Y = 0 \rightarrow N_2 = -Q_1 = -0{,}9\end{array}\right.$$

- Tách nút D:

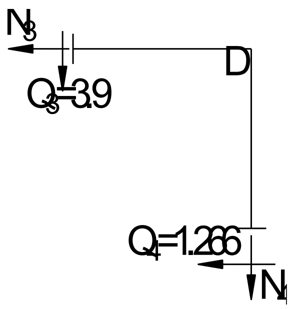
$$\left[\begin{array}{l}\sum X = 0 \rightarrow N_3 = -Q_4 = -1{,}266 \\ \sum Y = 0 \rightarrow N_4 = -Q_3 = -3{,}9\end{array}\right.$$

N_1 giống N_3 theo quan hệ lực dọc tại 2 đầu mỗi đoạn. Suy ra lực dọc tại A và C theo N_2 và N_4.

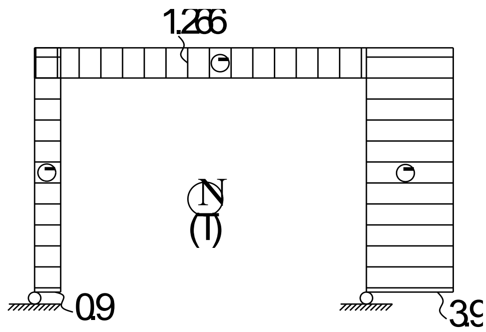
Kết quả biểu đồ (N) được vẽ trên *hình 2.2.10k*



Hình 2.2.10g

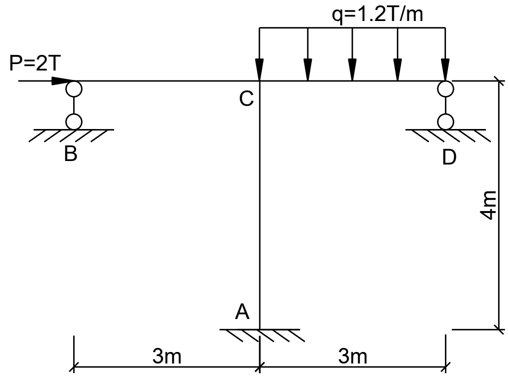


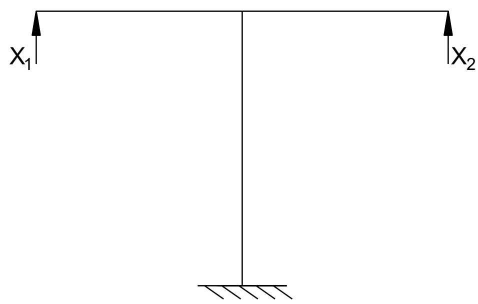
Hình 2.2.10h



Hình 2.2.10k

Ví dụ 2: Vẽ các biểu đồ nội lực trên *hình 2.2.11*. Cho biết độ cứng trong thanh đứng là 2EI, trong thanh ngang là EI. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.





Hình 2.2.11a

Hình 2.2.11b

a. Bậc siêu tĩnh

n = 3V - K = 3.2 - 4 = 2

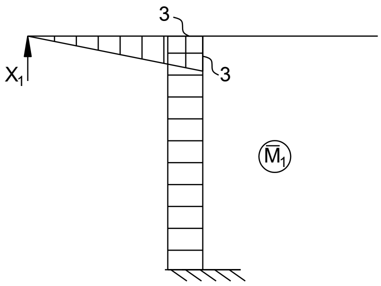
b. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc

- Hệ cơ bản : tạo trên *hình 2.2.11b*
- Hệ phương trình chính tắc:

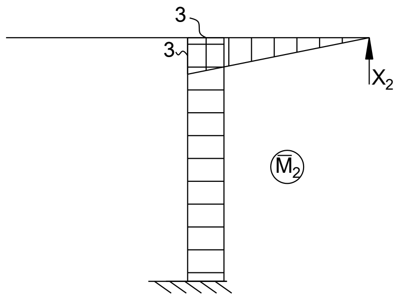
$$\begin{cases}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1P}=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2P}=0\end{cases}$$

c. ***Xác định các hệ số của phương trình chính tắc***

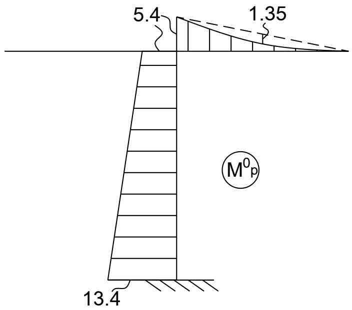
- Vẽ các biểu đồ ($\overline{M}_1$), ($\overline{M}_2$),(M_p^o):



Hình 2.2.11c



Hình 2.2.11d



Hình 2.2.11e

$$\delta_{11}=(\overline{M}_1)(\overline{M}_1)=\left[\frac{1}{EI}.\frac{3.3}{2}.\frac{2}{3}.3\right]+\ \frac{1}{2EI}.3.4.3=\frac{27}{EI}$$

$$\delta_{12}=\ \delta_{21}=(\overline{M}_1)(\overline{M}_2)=-\frac{1}{2EI}.3.4.3=\frac{-18}{EI}$$

$$\delta_{22}=(\overline{M}_2)(\overline{M}_2)=\ \delta_{11}=\frac{27}{EI}$$

$$\Delta_{1P}\ =(\overline{M}_1).(M_p^o)=\ \frac{1}{2EI}.\frac{13,4+5,4}{2}.4.3=\frac{56,4}{EI}$$

$$\Delta_{2P}\ =(\overline{M}_2).(M_p^o)=-\Delta_{1P}-\frac{1}{EI}.\frac{5,4.3}{2}.\frac{2}{3}.3+\frac{1}{EI}.\frac{2}{3}.3.1,35.\frac{3}{2}=-\frac{68.55}{EI}$$

Thay vào hệ phương trình chính tắc sau khi đã bỏ đi EI dưới mẫu số:

$$\begin{cases} 27.X_1 - 18.X_2 + 56,4 = 0 \\ -18.X_1 + 27.X_2 - 68,55 = 0 \end{cases} \quad \text{Giải ra được} \begin{cases} X_1 = -0,713 < 0 \\ X_2 = 2,036 > 0 \end{cases}$$

d. Vẽ các biểu đồ nội lực

❖ *Mômen*

(M) =($\overline{M}_1$).X_1 + ($\overline{M}_2$).X_2 +(M_p^o)

Kết quả thể hiện trên hình vẽ (*hình 2.2.11f*)

❖ *Lực cắt*

Suy ra từ biểu đồ (M)

- Trên đoạn BC: q = 0

$$\rightarrow Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{-2,139 - 0}{3}.1 = -0,713$$

- Trên đoạn AC: q = 0

$$\rightarrow Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{2,928 - (-5,072)}{4}.1 = 2$$

- Trên đoạn CD: q = const.

$$Q^{tr} = \frac{0 - 0,789}{3}.1 + \frac{1}{2}.1,2.3.1 = 1,537$$

$$Q^{ph} = \frac{0 - 0,789}{3}.1 - \frac{1}{2}.1,2.3.1 = -2,063$$

Kết quả vẽ biểu đồ lực cắt thể hiện trên hình vẽ (*hình 2.2.11g*)

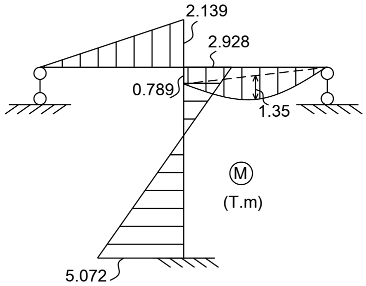
❖ *Lực dọc*

Suy ra từ các biểu đồ (Q)

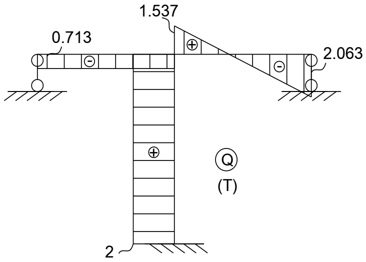
+ Tách và xét cân bằng nút B

+ Tách và xét cân bằng nút C

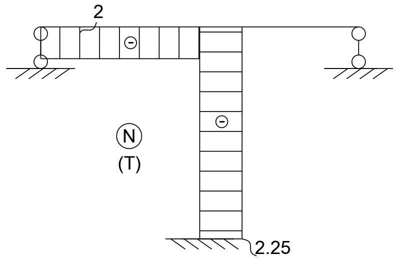
Sau đó suy ra lực dọc tại các đầu thanh còn lại và vẽ được biểu đồ (N) như trên *hình 2.2.11h.*



Hình 2.2.11f



Hình 2.2.11g



Hình 2.2.11h

2.3. Xác định chuyển vị trong hệ siêu tĩnh

2.3.1. Nguyên tắc chung

Công thức tính chuyển vị Maxwell-Morh là công thức tổng quát áp dụng cho cả hệ tĩnh định và hệ siêu tĩnh. Trong công thức này ta phải tính hệ với 2 trạng thái:

- *Trạng thái “m”*: là trạng thái ban đầu của hệ.

- *Trạng thái “k”*: được tạo ra bằng cách đặt lực $P_k = 1$ tương ứng với vị trí và phương chuyển vị trên sơ đồ tính ban đầu của hệ.

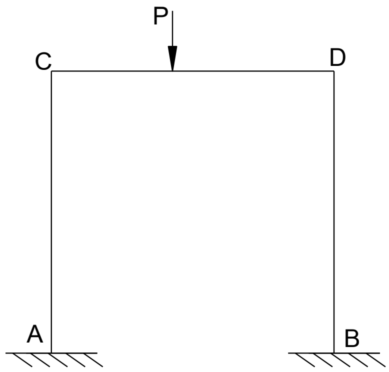
Chẳng hạn, để xác định chyển vị ngang tại C của hệ trên *hình 2.3.1a*

- Ở trạng thái “m” ta tính hệ siêu tĩnh ban đầu (*hình 2.3.1b*)

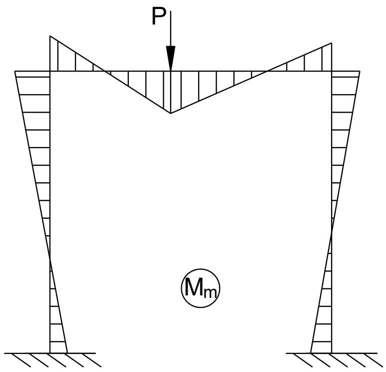
- Ở trạng thái “m” ta tính hệ siêu tĩnh đó 1 lần nữa do $P_k = 1$ gây ra (*hình 2.3.1c*)

Sau khi tính giải nội lực, thực hiện công thức Morh hoặc nhân biểu đồ Vêrêxaghin sẽ được kết quả.

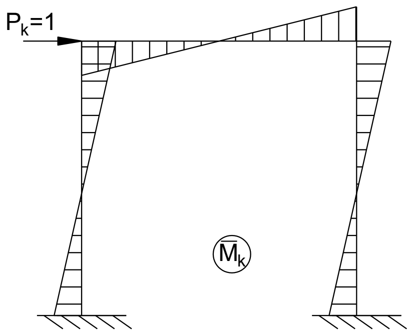
Nhận xét: Ta phải tính hệ siêu tĩnh 2 lần → khối lượng tính toán nặng nề.



Hình 2.3.1a



Hình 2.3.1b

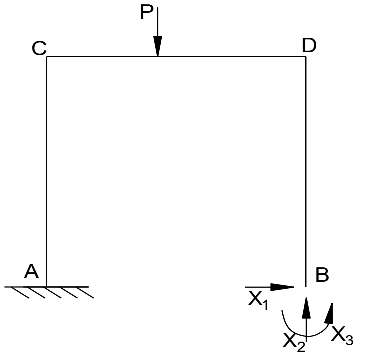


Hình 2.3.1c

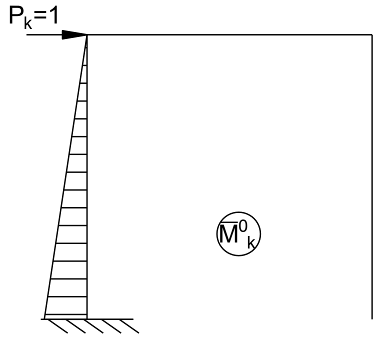
2.3.2. Cách sử dụng hệ cơ bản

Không mất tính tổng quát, ta phân tích cho bài toán xác định chuyển vị của hệ trên *hình 2.3.1a*. Giả sử chọn hệ cơ bản của nó trên *hình 2.3.1d*. (X_1,X_2,X_3) là nghiệm của hệ phương trình chính tắc.

Khi giải hệ trên *hình 2.3.1a* bằng hệ cơ bản trên *hình 2.3.1d* thì 2 hệ này là tương đương nhau. Nghĩa là nội lực, biến dạng và chuyển vị của 2 hệ là như nhau. Ta thử đi tìm chuyển vị trên hệ cơ bản. Để tìm chuyển vị trên *hình 2.3.1d*, ở trạng thái “m” ta cũng cần phải giải tìm X_1,X_2,X_3. Nghĩa là tương đương với trạng thái “m” trên *hình 2.3.1b*. Tuy nhiên ở trạng thái “k” được tạo ra trên *hình 2.3.1e* thì tính khá dễ dàng vì là hệ tĩnh định. Lúc này nội lực ở trạng thái “k” được ký hiệu: $\overline{M_k^o}, \overline{N}_k^o, \overline{Q_k^o}$



Hình 2.3.1d



Hình 2.3.1e

Vậy khi tính chuyển vị trong hệ siêu tĩnh ta tạo trạng thái k trên hệ cơ bản thay vì trên hệ siêu tĩnh ban đầu. Biểu thức Maxwel-Morh trong trường hợp hệ chịu các nguyên nhân (P, t, Z):

$$\Delta_{km} = \sum\int \frac{\overline{M}^o_k M_m}{EI} ds + \sum\int \frac{\overline{N}^o_k N_m}{EF} ds + \sum\int \upsilon \frac{\overline{Q}^o_k Q_m}{EI} ds -$$

$$-\sum \overline{R}^o_{jk} Z_{jm} + \sum\int \frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})\overline{M}^o_k ds + \sum\int \alpha t_{cm} \overline{N}^o_k ds$$

Nếu cho phép áp dụng "nhân biểu đồ Vêrêxaghin" và các đại lượng α ,h,t_{2m} ,t_{1m} ,t_{cm} = const trên từng đoạn :

$$\Delta_{km} = (\overline{M}^o_k)(\overline{M}_m) + (\overline{N}^o_k)(\overline{N}_m) + (\overline{Q}^o_k)(\overline{Q}_m) + \sum \frac{\alpha}{h}(t_{2m} - t_{1m})\Omega(\overline{M}^o_k) + \sum \alpha t_{cm}\Omega(\overline{N}^o_k)$$

(*Ý nghĩa của các đại lượng xem trong chương chuyển vị của hệ thanh*).

Chú ý:

- Các đại lượng xác định ở trạng thái "k" có ký hiệu chỉ số không kèm theo là biểu thị cho việc tạo trên hệ cơ bản.
- Vì có nhiều cách tạo hệ cơ bản nên trạng thái "k" sẽ có nhiều sơ đồ tính, ta nên chọn hệ cơ bản để tạo sao cho việc tính toán và nhân biểu đồ được dễ dàng.

2.4. Kiểm tra kết quả tính toán của phương pháp lực

Do phải thực hiện nhiều phép tính trung gian khi giải hệ siêu tĩnh nên dễ mắc phải những sai số lớn hoặc sai lầm trong kết quả cuối cùng. Để tránh những sai số lớn ta phải tính chính xác các phép tính trung gian. Để tránh những sai lầm ta cần kiểm tra kết quả.

2.4.1. Kiểm tra quá trình tính toán

a. Kiểm tra các biểu đồ đơn vị $(\overline{M}_k)$ ***và biểu đồ*** (M^o_p)

- Sử dụng các liên hệ vi phân và điều kiện cân bằng của từng phần hệ tách ra để kiểm tra.
- Vẽ biểu đồ $\left(\overline{M}_s\right)$ do các lực $X_1 = X_2 = \ldots X_n = 1$ đồng thời tác dụng lên hệ cơ bản gây ra.

Kiểm tra mối quan hệ:

$$\boxed{(\overline{M}_s) = (\overline{M}_1) + (\overline{M}_2) + ... + (\overline{M}_n)} \quad (2\text{-}14)$$

b. Kiểm tra các hệ số: (δ_{km})

Biểu thức kiểm tra:

$$\boxed{\begin{aligned} &(\overline{M}_s)(\overline{M}_k) = \delta_{k1} + \delta_{k2} + ...\delta_{kn} = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ki} \\ &(\overline{M}_s)(\overline{M}_s) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \delta_{km} \end{aligned}} \quad (2\text{-}15)$$

Chứng minh các điều kiện kiểm tra:

- Theo ý nghĩa của biểu đồ $(\overline{M}_s)$ và các biểu đồ $(\overline{M}_k)$ nên theo nguyên lý cộng tác dụng, điều kiện (2-14) phải thoả mãn.

- Thay (2-14) vào 2 điều kiện bên dưới và khai triển sẽ có 2 điều kiện (2-15).

c. Kiểm tra các số hạng tự do

❖ *Kiểm tra:* (Δ_{kp})

Biểu thức kiểm tra:

$$\boxed{(\overline{M}_s)(M_p^o) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{kP}} \quad (2\text{-}16)$$

Thay$(\overline{M}_s)$ từ điều kiện (2-14) vào và khai triển ta được điều kiện (2-16).

❖ *Kiểm tra:* (Δ_{kt})

Biểu thức kiểm tra:

$$\boxed{\sum \alpha.t_c \Omega(\overline{N}_s) + \sum \frac{\alpha}{h}(t_2 - t_1)\Omega(\overline{M}_s) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{kt}} \quad (2\text{-}17)$$

Trong đó $\Omega(\overline{M}_s), \Omega(\overline{N}_s)$ lần lượt là diện tích biểu đồ mômen và lực dọc do $X_1 = X_2 = ...X_n = 1$ đồng thời tác dụng lên hệ cơ bản gây ra.

Theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$\Omega(\overline{M}_s) = \Omega(\overline{M}_1) + \Omega(\overline{M}_1) + ...\Omega(\overline{M}_n)$$
$$\Omega(\overline{N}_s) = \Omega(\overline{N}_1) + \Omega(\overline{N}_2) + ...\Omega(\overline{N}_n)$$

Thay vào ta sẽ chứng minh được điều kiện (2-17)

❖ *Kiểm tra: (*Δ_{kZ}*)*

Biểu thức kiểm tra:

$$\boxed{-\sum \overline{R}_{js}.Z_{jm} = \sum \Delta_{kZ}} \quad (2\text{-}18)$$

Trong đó:

$\overline{R}_{js}$ là phản lực tại liên kết j do $X_1 = X_2 = ...X_n = 1$ đồng thời tác dụng lên hệ cơ bản gây ra.

Chứng minh tương tự các biểu thức trên.

d. Kiểm tra việc giải hệ phương trình chính tắc

Do việc làm tròn số khi tính toán giải hệ phương trình chính tắc nên khi thay thế ngược các lực X_k đã tìm được vào thì các phương trình thường khác không.

Người ta đánh giá sai số của mỗi phương trình dưới dạng sai số tương đối ε:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{A-B}{A}.100\% \le [\varepsilon]} \quad (2\text{-}19)$$

Trong đó:

A, B: là tập hợp các số liệu của mỗi phương trình cần kiểm tra dưới dạng A-B.

[ε]: sai số tương đối cho phép.

2.4.2. Kiểm tra kết quả cuối cùng

Biểu thức kiểm tra :

$$\boxed{(M)(\overline{M}_k) = -\Delta_{kt} - \Delta_{kZ}}$$

$$\boxed{(M)(\overline{M}_s) = -\sum\Delta_{kt} - \sum\Delta_{kZ}} \quad (2\text{-}20)$$

Chứng minh điều kiện kiểm tra:

$$\delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \ldots\delta_{kn}X_n + \Delta_{kp} + \Delta_{kt} + \Delta_{kZ} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overline{M}_k)(\overline{M}_1)X_1 + (\overline{M}_k)(\overline{M}_2)X_2 + \ldots(\overline{M}_k)(\overline{M}_n)X_n + (\overline{M}_k)(M_p^o) = -\Delta_{kt} - \Delta_{kZ}$$

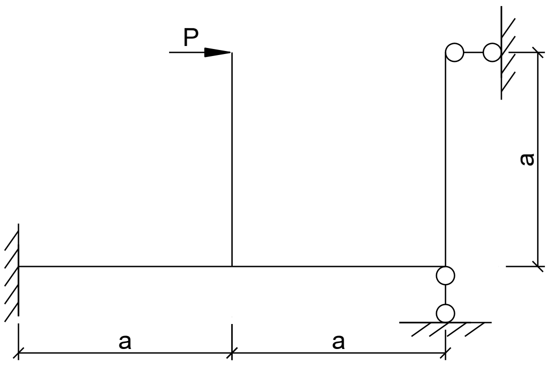
$$\Leftrightarrow (\overline{M}_k)(\overline{M}_1X_1 + \overline{M}_2X_2 + \ldots\overline{M}_nX_n + (M_p^o)) = -\Delta_{kt} - \Delta_{kZ}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{M}_k)(M) = -\Delta_{kt} - \Delta_{kZ}$$

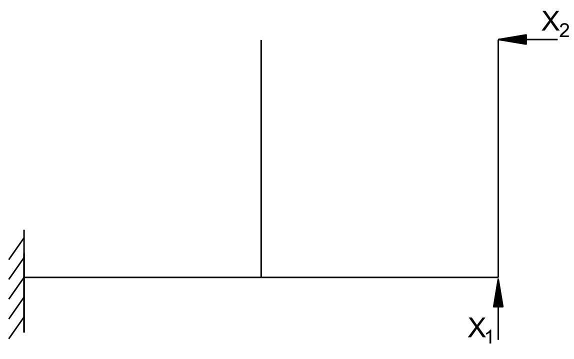
$$(M)(\overline{M}_s) = -\sum\Delta_{kt} - \sum\Delta_{kZ}$$

Chứng minh tương tự.

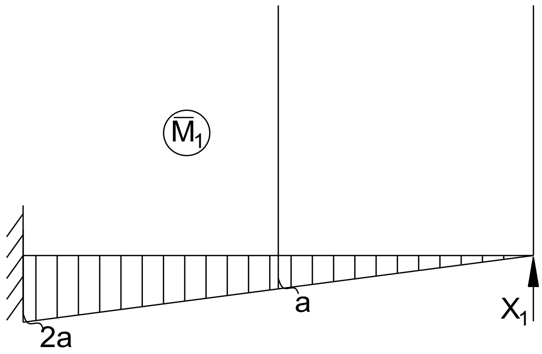
Ví dụ: Vẽ biểu đồ mômen và kiểm tra lại kết quả tính của hệ trên *hình 2.4.1*. Cho độ cứng trong tất cả các thanh là EI = const.



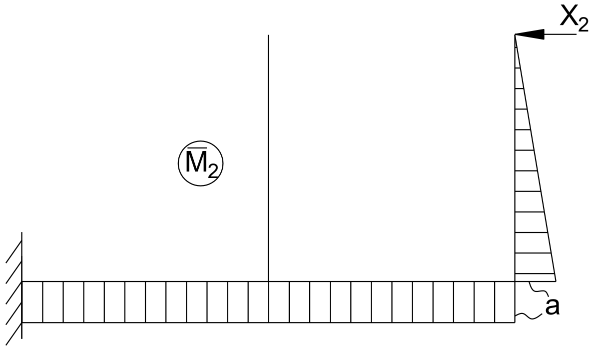
Hình 2.4.1



Hình 2.4.2



Hình 2.4.3



Hình 2.4.4

a. Vẽ biểu đồ mômen (M)

- Bậc siêu tĩnh n = 2
- Hệ cơ bản được tạo trên *hình 6.4.2*.
- Các hệ số được xác định:

$$\delta_{11} = (\overline{M}_1)(\overline{M}_1) = \frac{1}{EI}.\frac{2a.2a}{2}.\frac{2}{3}.2a = \frac{8a^3}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\overline{M}_1)(\overline{M}_2) = \frac{1}{EI}.\frac{2a.2a}{2}.a = \frac{2a^3}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}.\frac{a.a}{2}.\frac{2}{3}.a + \frac{1}{EI}.a.2a.a = \frac{7a^3}{3EI}$$

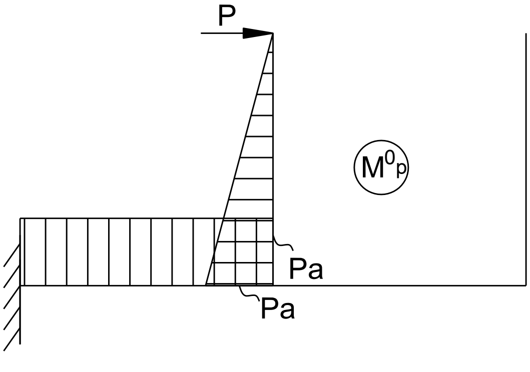
$$\Delta_{1p} = (\overline{M}_1)(M_p^o) = -\frac{1}{EI}(\frac{a+2a}{2}.a.Pa) = -\frac{1{,}5Pa^3}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = (\overline{M}_1)(M_p^o) = -\frac{1}{EI}.a.a.Pa = -\frac{Pa^3}{EI}$$

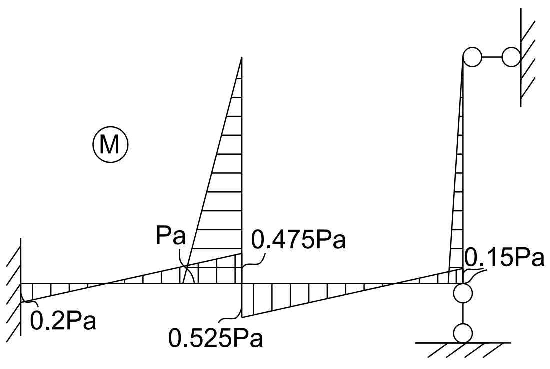
Hệ phương trình chính tắc sau khi đã quy đồng và bỏ 3EI dưới mẫu số:

$$\begin{cases} 8a^3X_1 + 6a^3X_2 - 4{,}5Pa^3 = 0 \\ 6a^3X_1 + 7a^3X_2 - 3Pa^3 = 0 \end{cases} \quad \text{Giải ra} \quad \begin{cases} X_1 = 0{,}675P \\ X_2 = -0{,}15P \end{cases}$$

Vẽ biểu đồ mômen (M): $(M) = (\overline{M}_1)X_1 + (\overline{M}_2)X_2 + (M_p^o)$. (*hình 2.4.6)*



Hình 2.4.6



Hình 2.4.6

b. Kiểm tra kết quả

- Kiểm tra biểu đồ: $(\overline{M}_1)+(\overline{M}_2)\equiv(\overline{M}_s)\rightarrow$ thấy đúng. $(\overline{M}_s)$ vẽ trên *hình 2.4.7.*

- Kiểm tra các hệ số:

+ Nhân 2 biểu đồ: $(\overline{M}_s)(\overline{M}_1)=\dfrac{1}{EI}.\dfrac{2a.2a}{2}\left[a+\dfrac{2}{3}.2a\right]=\dfrac{14a^3}{3EI}$

Mặt khác: $\delta_{11}+\delta_{12}=\dfrac{8a^3}{3EI}+\dfrac{2a^3}{EI}=\dfrac{14a^3}{3EI}$ (đúng).

+ Nhân 2 biểu đồ: $(\overline{M}_s)(\overline{M}_2)=\dfrac{1}{EI}.\dfrac{(3a+a)}{2}.2a.a+\dfrac{1}{EI}.\dfrac{a.a}{2}.\dfrac{2}{3}.a=\dfrac{13a^3}{3EI}$

Mặt khác: $\delta_{21}+\delta_{22}=\dfrac{2a^3}{EI}+\dfrac{7a^3}{3EI}=\dfrac{13a^3}{3EI}$ (đúng).

+ Nhân 2 biểu đồ:

$$(\overline{M}_s)(\overline{M}_s)=\frac{1}{EI}.\frac{a.a}{2}.\frac{2}{3}.a+\frac{2a}{6EI}.\left[2.9a^3+2a^2+2.3a^2\right]=\frac{a^3}{3EI}+\frac{26a^3}{3EI}=\frac{27a^3}{3EI}=\frac{9a^3}{EI}$$

Mặt khác: $\delta_{11}+\delta_{12}+\delta_{21}+\delta_{22}=\dfrac{14a^3}{3EI}+\dfrac{13a^3}{3EI}=\dfrac{9a^3}{EI}$ (đúng).

- Kiểm tra số hạng tự do:

+ Nhân 2 biểu đồ: $(\overline{M}_s)(\overline{M}_p^o)=-\dfrac{1}{EI}.\dfrac{(3a+2a)}{2}a.Pa=-\dfrac{2,5Pa^3}{EI}$

+ Mặt khác: $\Delta_{1p}+\Delta_{2p}=-\dfrac{1,5Pa^3}{EI}-\dfrac{Pa^3}{EI}=-\dfrac{2,5Pa^3}{EI}$ (đúng).

- Kiểm tra kết quả cuối cùng:

+ Nhân 2 biểu đồ:

$$(\overline{M}_s)(M)=-\frac{1}{EI}.\frac{a.a}{2}.\frac{2}{3}.0,15Pa+\frac{a}{6EI}\left[2.3a.0,2Pa-2.2a.0,475Pa-3a.0,475Pa+2a.0,2Pa\right]$$

$$+\frac{a}{6EI}\left[2.2a.0,525Pa-2.a.0,15Pa-2a.0,15Pa+a.0,525Pa\right]=0$$

Chú ý:

- Các biểu thức điều kiện kiểm tra vẫn đúng trong trường hợp có kể đến ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc.

- Khối lượng tính toán kiểm tra còn nhiều.

- Khi điều kiện kiểm tra thoả mãn thì cũng chưa thể loại trừ được khả năng xảy ra sai lầm.

2.5. Một số điều cần chú ý khi tính hệ siêu tĩnh bậc cao

2.5.1. Các biện pháp nâng cao độ chính xác của kết quả tính toán

- Chọn phương pháp tính cho số lượng ẩn số là ít nhất (phương pháp lực, phương pháp chuyển vị, phương pháp hỗn hợp và liên hợp...)

- Khi sử dụng phương pháp lực nên chọn hệ cơ bản để sao cho các ẩn X_k ít ảnh hưởng đến kết quả cuối cùng.

- Dùng các biện pháp nhằm giảm bậc của hệ phương trình chính tắc (sẽ trình bày ở dưới).

2.5.2. Các biện pháp làm giảm nhẹ khối lượng tính toán

a. Các biện pháp giảm bậc của hệ phương trình chính tắc

- Chọn phương pháp tính cho ẩn số là ít nhất (đã nói ở trên).

- Khi chọn hệ cơ bản của phương trình lực, ta chọn hệ cơ bản là hệ siêu tĩnh bậc thấp thay vì chọn hệ cơ bản tĩnh định.

- Nên sử dụng tính chất đối xứng của hệ nếu hệ là hệ đối xứng.

b. Các biện pháp đơn giản hoá cấu trúc của hệ phương trình chính tắc

Hệ phương trình chính tắc có cấu trúc đơn giản khi chúng có nhiều hệ số phụ bằng không. Để đạt được mục đích này ta có thể thực hiện các cách sau:

- Sử dụng tính chất đối xứng của hệ nếu hệ là hệ đối xứng.

- Chọn hệ cơ bản hợp lý bằng cách chia hệ thành nhiều bộ phận độc lập. Vì lúc này các biểu đồ đơn vị phân bố cục bộ. Việc xác định các hệ số của phương trình chính tắc sẽ đơn giản và triển vọng có nhiều hệ số phụ bằng không. Mặt khác việc làm này còn làm giảm nhẹ khối lượng tính toán ở các khâu: xác định nội lực, xác định các hệ số và số hạng tự do, giải hệ phương trình chính tắc.

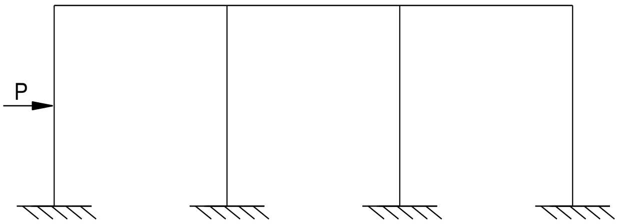
Ví dụ: Xét hệ siêu tĩnh trên *hình 2.5.1*, ta nêu ra 2 cách để chọn hệ cơ bản so sánh:

+ Với hệ cơ bản chọn trên *hình 2.5.2*, nội lực trên hệ này nói chung sẽ phân phối trên toàn hệ. Do đó việc xác định các hệ số và số hạng tự do mất nhiều công sức. Các hệ số phụ đều khác không.

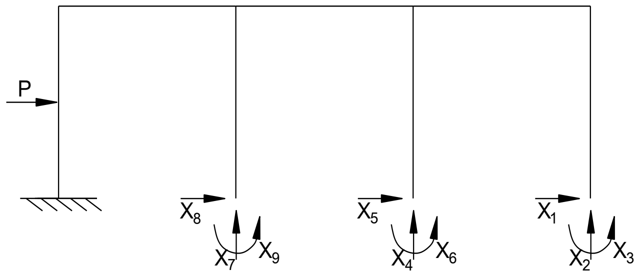
+ Với hệ cơ bản chọn trên *hình 2.5.3*, các biểu đồ đơn vị chỉ phân bố trên 1 hoặc 2 bộ phận lân cận của hệ. Do đó việc vẽ biểu đồ nội lực xác định các hệ số và số hạng tự do sẽ đơn giản, có nhiều hệ số phụ bằng không.

$$\delta_{17} = \delta_{71} = \delta_{18} = \delta_{81} = \delta_{19} = \delta_{91} = \delta_{27} = \delta_{72} = \delta_{29} = \delta_{92} = \delta_{37} = \delta_{73} = \delta_{38} = \delta_{83} = \delta_{39} = \delta_{93} = 0$$

- Sử dụng các thanh tuyệt đối cứng để thay đổi vị trí và phương các ẩn số (nghiên cứu ở phần sau).



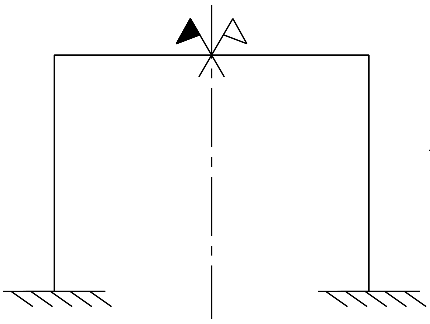
Hình 2.5.1



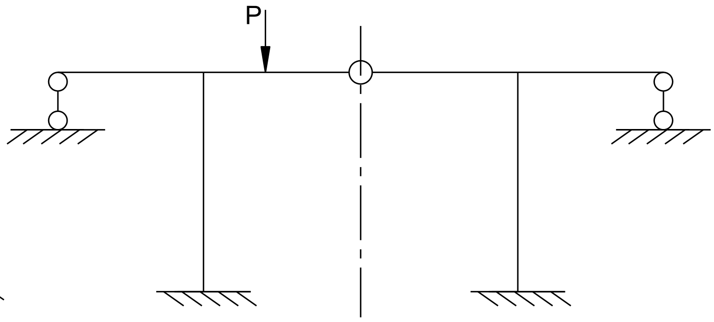
Hình 2.5.2

2.6. Cách vận dụng tính chất đối xứng của hệ đối xứng

Hệ đối xứng: là hệ có kích thước, hình dạng hình học, độ cứng và liên kết đối xứng qua 1 trục (*hình 2.6.1*).



Hình 2.6.1

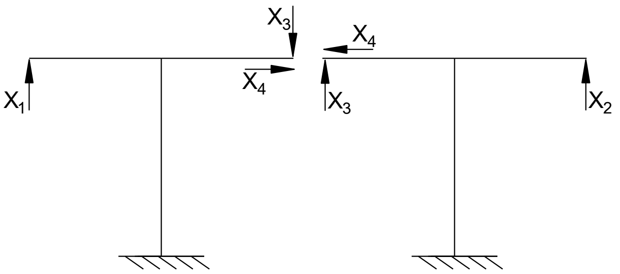


Hình 2.6.2

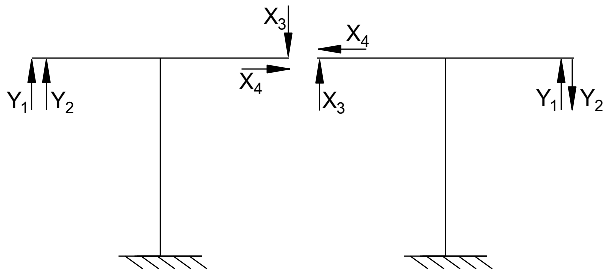
2.6.1. Biện pháp sử dụng cặp ẩn số đối xứng và phản xứng

Xét hệ siêu tĩnh đối xứng chịu tải trọng tác dụng như trên *hình 2.6.2*. Chọn hệ cơ bản cũng có tính chất đối xứng như trên *hình 2.6.3*. Có 2 loại ẩn số:

- Cặp ẩn số đối xứng X_4 và phản xứng X_3
- Cặp ẩn số chỉ có vị trí đối xứng X_1 và X_2.



Hình 2.6.3



Hình 2.6.4

Để triệt để sử dụng tính đối xứng của hệ, ta phân tích X_1, X_2 thành 2 cặp: cặp đối xứng Y_1 và cặp phản xứng Y_2 như trên *hình 2.6.4*. Tức là:

$$\begin{cases} Y_1 + Y_2 = X_1 \\ Y_1 + Y_2 = X_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y_1 = \dfrac{X_1 + X_2}{2} \\ Y_2 = \dfrac{X_1 - X_2}{2} \end{cases}$$

- Các ẩn số lúc này là (Y_1, Y_2, X_3, X_4)
- Hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\begin{cases}\delta_{11}Y_1+\delta_{12}Y_2+\delta_{13}X_3+\delta_{14}X_4+\Delta_{1P}=0\\ \delta_{21}Y_1+\delta_{22}Y_2+\delta_{23}X_3+\delta_{24}X_4+\Delta_{2P}=0\\ \delta_{31}Y_1+\delta_{32}Y_2+\delta_{33}X_3+\delta_{34}X_4+\Delta_{3P}=0\\ \delta_{41}Y_1+\delta_{42}Y_2+\delta_{43}X_3+\delta_{44}X_4+\Delta_{4P}=0\end{cases}$$

- Mặt khác, đối với hệ đối xứng có tính chất sau:

+ Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng (*phản xứng*) thì biểu đồ mômen sẽ đối xứng (*phản xứng*). Suy ra $(\overline{M}_1),(\overline{M}_4)$ sẽ đối xứng; $(\overline{M}_2),(\overline{M}_3)$ sẽ phản xứng.

+ Kết quả nhân biểu đồ phản xứng với biểu đồ đối xứng sẽ bằng không. Suy ra:

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\delta_{13}=\delta_{31}=\delta_{24}=\delta_{42}=\delta_{43}=\delta_{34}=0$$

Thay vào ta được:

$$\begin{cases}\delta_{11}Y_1+\delta_{14}X_4+\Delta_{1P}=0\\ \delta_{41}Y_1+\delta_{44}X_4+\Delta_{4P}=0\end{cases}$$ (a) (chứa cặp ẩn đối xứng)

$$\begin{cases}\delta_{22}Y_2+\delta_{23}X_3+\Delta_{2P}=0\\ \delta_{32}Y_2+\delta_{33}X_3+\Delta_{3P}=0\end{cases}$$ (b) (chứa cặp ẩn phản xứng)

Kết luận: Với hệ có bậc siêu tĩnh bằng n, nếu áp dụng các cặp ẩn số đối xứng và phản xứng ta có thể đưa hệ phương trình chính tắc về hai hệ phương trình độc lập: 1 hệ gồm n_1 phương trình chứa ẩn đối xứng, 1 hệ gồm n_2 phương trình chứa ẩn phản xứng với $n_1+n_2=n$.

Các trường hợp đặc biệt:

❖ *Khi nguyên nhân bên ngoài tác dụng đối xứng*

Xét lại hệ đã phân tích ở trên thì lúc này (M_p^o) sẽ đối xứng. Suy ra $\Delta_{2P}=\Delta_{3P}=0$. Thay vào hệ (b) thì được $Y_2 = Y_3 = 0$.

→ Vậy 1 hệ đối xứng chịu nguyên nhân đối xứng thì các ẩn phản xứng = 0.

❖ *Khi nguyên nhân bên ngoài tác dụng phản xứng*

Xét lại hệ đã phân tích ở trên thì tương tự ta sẽ có được $Y_1 = X_4 = 0$

→Vậy khi hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng thì các ẩn đối xứng = 0

2.6.2. Biện pháp biến đổi sơ đồ tính

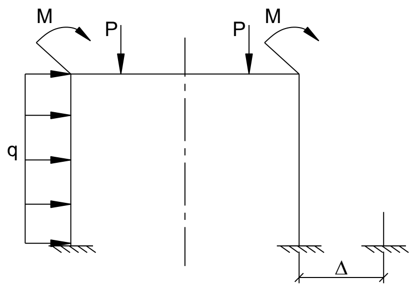
Các đặc điểm của hệ đối xứng:

- Một hệ đối xứng chịu nguyên nhân bất kỳ bao giờ cũng có thể phân tích thành tổng của 2 hệ:

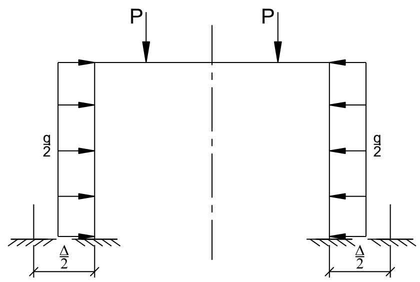
+ Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng.

+ Hệ đối xứng chịu nguyên nhân phản xứng.

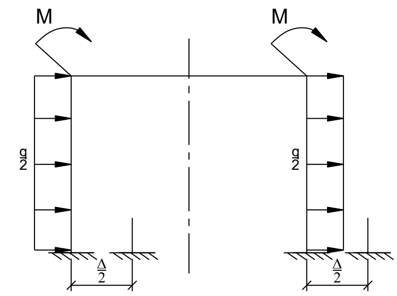
Ví dụ: Hệ trên *hình 2.6.5* bằng tổng hai hệ trên *hình 2.6.6* và *hình 2.6.7.*



Hình 2.6.5



Hình 2.6.6



Hình 2.6.7

- Trong **hệ đối xứng chịu nguyên nhân đối xứng** thì *chuyển vị, mômen uốn, lực dọc* sẽ đối xứng còn *lực cắt* có tính phản ứng.

- Trong **hệ đối xứng chịu nguyên nhân phản xứng** thì *chuyển vị, mômen uốn, lực dọc* sẽ phản ứng còn *lực cắt* có tính đối xứng.

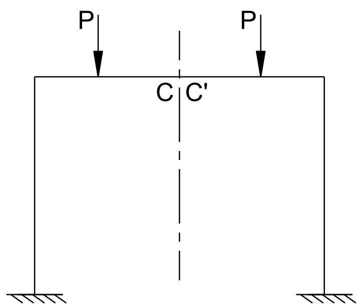
Như vậy với các đặc điểm này nếu biết được kết quả của một nửa hệ đối xứng thì có thể suy ra kết quả trên toàn hệ. Ta đi tìm 1 nửa hệ tương đương.

a. Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng

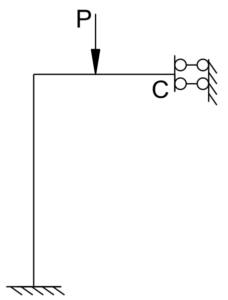
❖ *Trường hợp trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ*

Xét tiết diện C và C' nằm bên trái và bên phải của trục đối xứng của hệ trên *hình 2.6.8*. Do chuyển vị của hệ là đối xứng nên tại C không thể có chuyển vị xoay và thẳng theo phương vuông góc trục đối xứng. Tuy nhiên chuyển vị thẳng theo phương trục đối xứng có thể làm được. Điều này chứng tỏ C làm việc như 1 ngàm trượt.

→ Vậy trên sơ đồ tính 1 nửa hệ tương đương ta chỉ việc đặt vào C một ngàm trượt dưới dạng 2 liên kết thanh có phương song song nhau và vuông góc với trục đối xứng như trên *hình 2.6.9*.



Hình 2.6.8



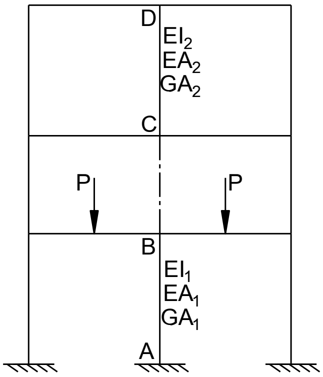
Hình 2.6.9

Kết luận:

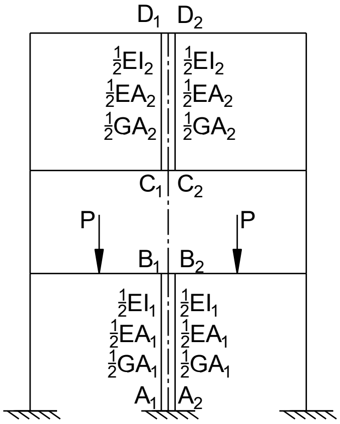
Khi tính *hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng* và *có trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ*, ta đặt thêm vào hệ các ngàm trượt dưới dạng 2 liên kết thanh có phương song song nhau và vuông góc với trục đối xứng tại những tiết diện trùng với trục đối xứng rồi thực hiện tính toán trên một nửa hệ và suy ra kết quả trên toàn hệ.

❖ *Trường hợp trục đối xứng trùng với 1 số trục thanh nào của hệ*

Xét hệ trên *hình 2.6.10*. Đưa về hệ tương đương đối xứng và có trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ bằng cách thay thế mỗi thanh AB, CD bằng hai thanh có độ cứng giảm đi 1 nửa, hai đầu A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 là vuông góc với trục đối xứng và có độ cứng bằng vô cùng *hình 2.6.11*. Đến đây ta trở lại trường hợp trục đối xứng không trùng với trục thanh.

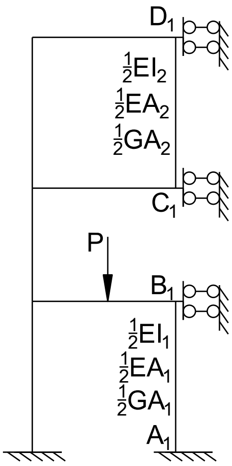


Hình 2.6.10

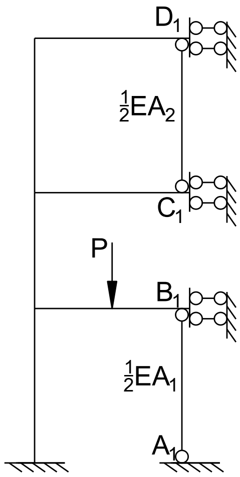


Hình 2.6.11

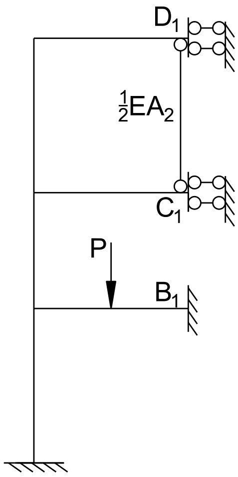
Một nửa hệ tương đương như trên *hình 2.6.12*. Nhưng tại A_1, B_1, C_1, D_1 không tồn tại chuyển vị góc xoay và chuyển vị thẳng theo phương vuông góc trục đối xứng mà chỉ có thể chuyển vị theo phương dọc trục thanh. Nghĩa là các thanh A_1B_1, C_1D_1 làm việc như 1 liên kết thanh (liên kết loại 1) (*hình 2.6.13*).



Hình 2.6.12



Hình 2.6.13



Hình 2.6.14

Kết luận:

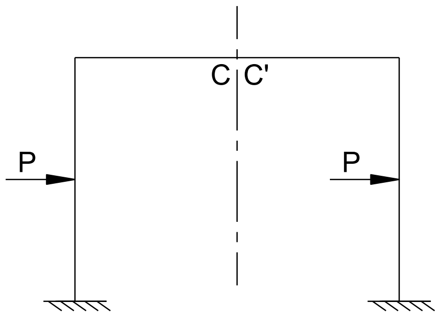
Khi tính *hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng* và có *trục đối xứng trùng với 1 số trục thanh của hệ*, ta cần đặt thêm vào hệ các ngàm trượt dưới dạng 2 liên kết thanh có phương song song nhau và vuông góc với trục đối xứng tại những tiết diện trùng với trục đối xứng đồng thời thay thế các thanh trùng với trục đối xứng bằng các liên kết thanh (liên kết loại 1) có độ cứng giảm đi 1 nửa rồi thực hiện tính toán trên một nửa hệ và sau đó suy ra kết quả trên toàn hệ. Khi suy ra kết quả nội lực trên toàn hệ, đối với thanh trùng với trục đối xứng lực dọc lấy gấp 2 lần so với khi giải 1 nửa hệ còn lực cắt và mômen lấy bằng không.

Trong trường hợp *bỏ qua biến dạng dọc trục trong các thanh trùng với trục đối xứng* và các thanh này bị ngăn cản chuyển vị theo phương dọc trục thanh (1 đầu nối đất) ta có thể thay thế các ngàm trượt bằng ngàm (*hình 2.6.14*).

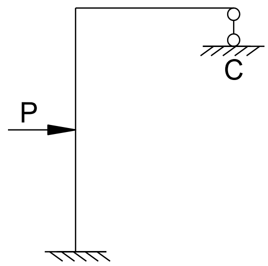
b. Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng

❖ *Trường hợp trục đối xứng không trùng với thanh nào của hệ*

Xét tiết diện C và C’ nằm bên trái và bên phải của trục đối xứng của hệ trên *hình 2.6.15*. Do chuyển vị của hệ là đối xứng nên tại C không thể có chuyển vị theo phương trục đối xứng. Tuy nhiên, chuyển vị xoay và thẳng theo phương vuông góc trục đối xứng có thể được. Điều này chứng tỏ C làm việc như một gối di động. Vậy trên sơ đồ tính 1/2 hệ tương đương ta chỉ việc đặt vào C 1 gối di động có phương của trục đối xứng (*hình 2.6.16*).



Hình 2.6.15



Hình 2.6.16

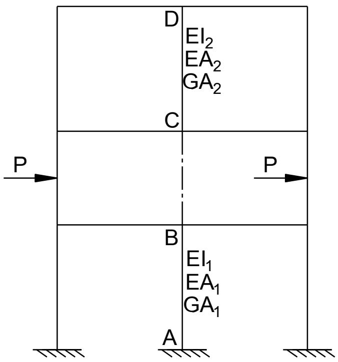
Kết luận:

Khi tính *hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng* và *có trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ* ta đưa về 1 nửa hệ tương đương bằng cách đặt thêm vào hệ các gối di động có phương của trục đối xứng tại những tiết diện trùng với trục đối xứng rồi thực hiện tính toán trên 1 nửa hệ rồi suy ra kết quả trên toàn hệ.

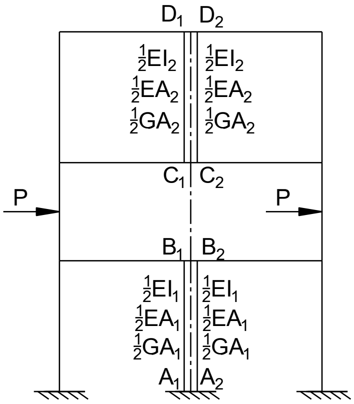
❖ *Trường hợp trục đối xứng trùng với 1 số trục thanh nào của hệ*

Cũng lý luận tương tự như trường hợp hệ chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng ở trên ta đưa bài toán trở về trường hợp trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ.

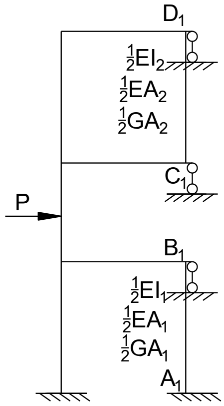
Với hệ cho trên *hình 2.6.17*, hệ tương đương của nó ở trên *hình 2.6.18* và hệ trên *hình 2.6.19* là 1 nửa hệ tương đương.



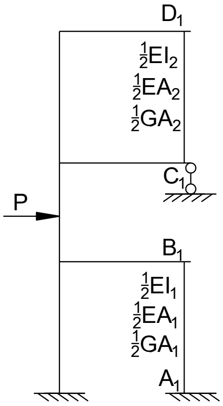
Hình 2.6.17



Hình 2.6.18



Hình 2.6.19



Hình 2.6.20

Kết luận: Khi tính *hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản ứng* và có *trục đối xứng trùng với trục thanh nào đó của hệ* ta đưa về 1 nửa hệ tương đương bằng cách đặt thêm vào hệ các gối di động có phương của trục đối xứng tại những tiết diện trục đối xứng bằng các thanh có độ cứng giảm đi 1 nửa rồi tính toán trên 1 phần 2 và suy ra kết quả trên toàn hệ.

Khi suy ra kết quả nội lực trên toàn hệ, đối với các thanh trùng với trục đối xứng lực dọc lấy bằng không còn mômen và lực cắt lấy gấp 2 lần so với khi tính trên nửa hệ.

Trong trường hợp *bỏ qua ảnh hưởng biến dạng dọc trục* thì ta có thể bỏ bớt 1 gối di động trong 2 gối ở 2 đầu thanh (*hình 2.6.20*)

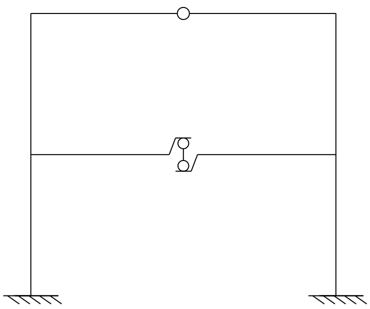
Chú ý:

Trường hợp tiết diện trùng với trục đối xứng không phải là liên kết hàn, bằng cách phân tích sự làm việc tại các tiết diện này tương tự như ở trên ta có thể thay thế bằng các liên kết tương ứng khi tính trên 1 nửa hệ.

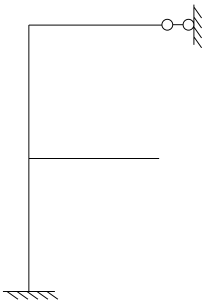
Ví dụ: Với hệ cho trên *hình 2.6.21*

+ Nếu nguyên nhân tác dụng đối xứng thì 1 nửa hệ tương đương trên *hình 2.6.22*.

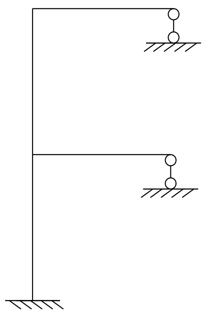
+ Nếu nguyên nhân tác dụng phản xứng thì 1 nửa hệ tương đương trên *hình 2.6.23*.



Hình 2.6.21

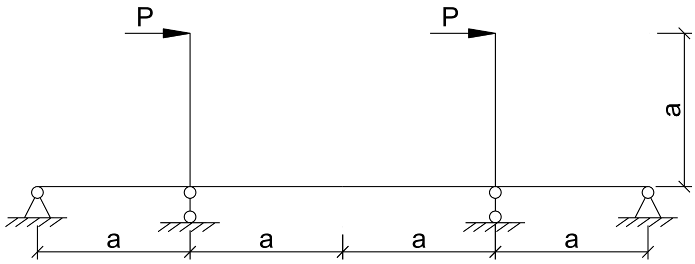


Hình 2.6.22

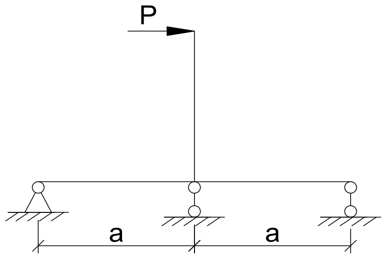


Hình 2.6.23

Ví dụ: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên *hình 2.6.24*. Cho độ cứng trong tất cả các thanh là EI = const. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.



Hình 2.6.24



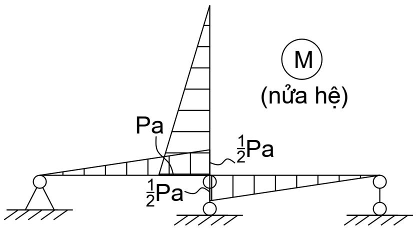
Hình 2.6.25

Hệ đã cho thuộc loại hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản ứng. Một nửa hệ trái tương đương của hệ đã cho được tạo ra trên *hình 2.6.25*.

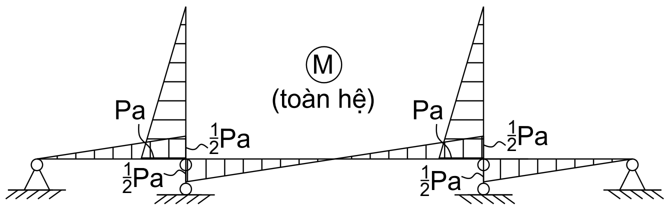
+ Đây là hệ siêu tĩnh bậc 1.

+ Tiến hành các bước giải sẽ vẽ được biểu đồ (M), (Q), (N).

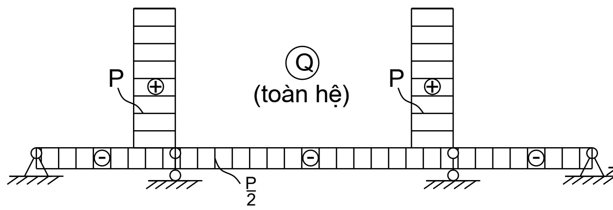
+ Sau đó suy ra kết quả của nửa hệ phải theo các đặc điểm của hệ đối xứng. Kết quả thể hiện trên *hình 2.6.26* → *hình 2.6.29*.



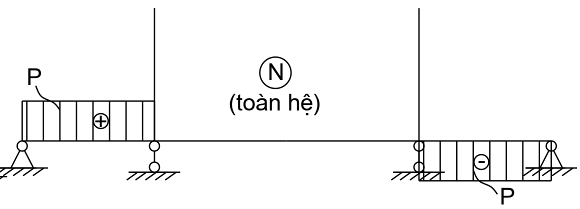
Hình 2.6.26



Hình 2.6.27



Hình 2.6.28

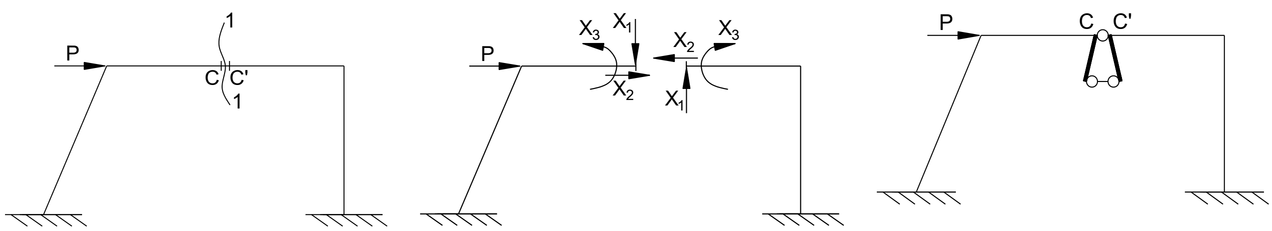


Hình 2.6.29

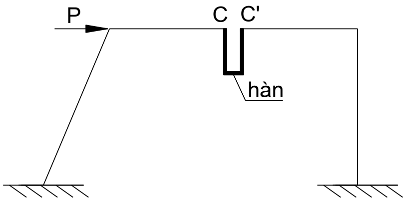
2.7. Sử dụng các thanh tuyệt đối cứng để thay đổi vị trí và phương các ẩn số nhằm đơn giản hoá cấu trúc của hệ phương trình chính tắc

2.7.1. Mục đích

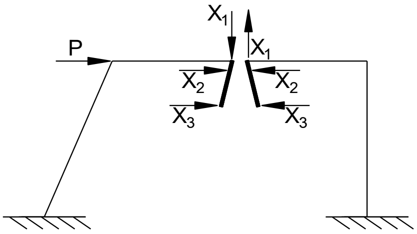
Sử dụng các thanh tuyệt đối cứng nhằm thay đổi vị trí và phương của các ẩn số để sao cho hệ phương trình chính tắc có nhiều hệ số phụ bằng không.



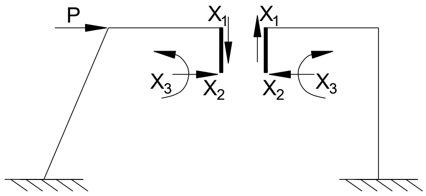
Hình 2.7.1 **Hình 2.7.2** **Hình 2.7.3**



Hình 2.7.4



Hình 2.7.5



Hình 2.7.6

Xét hệ trên *hình 2.7.1*. Để giải hệ ta có thể chọn hệ cơ bản như trên *hình 2.7.2*. Ta biến đổi hệ trên *hình 2.7.1* bằng cách thực hiện mặt cắt 1-1, hàn 2 thanh tuyệt đối cứng bằng ba liên kết loại 1 theo điều kiện nối 2 miếng cứng tạo thành hệ bất biến thì hệ mới sẽ tương đương với hệ ban đầu (*hình 2.7.3*, *hình 2.7.4...*)

Nếu ta chọn hệ cơ bản bằng cách cắt các liên kết nối giữa các thanh tuyệt đối cứng (*hình 2.7.5, hình 2.7.6...*) thì so với hệ cơ bản trên *hình 2.7.2*, vị trí và phương của các ẩn số đã thay đổi. Điều đó có nghĩa là các hệ số cũng thay đổi. Rõ ràng là có nhiều cách lập hệ tương đương nên cũng có nhiều cách thay đổi vị trí và phương của các ẩn số. Và ta thực hiện sao cho hệ phương trình chính tắc càng có nhiều hệ số phụ bằng không càng tốt.

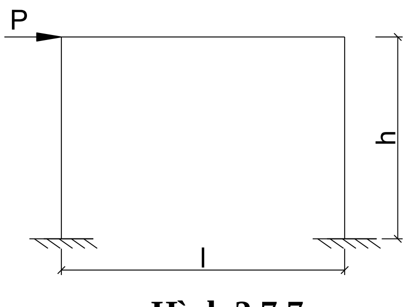
2.7.2. Ví dụ

Chọn hệ số cơ bản sao cho tất cả các hệ số phụ bằng không của khung trên *hình 2.7.7*, cho độ cứng EI là không đổi trên toàn hệ.

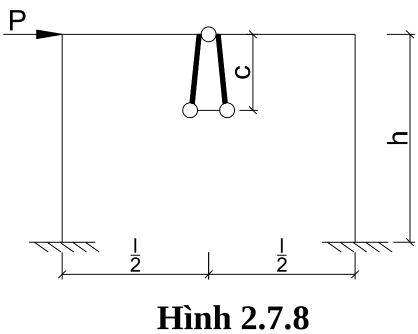
Hệ tương đương trên *hình 2.7.8*, hệ cơ bản tạo trên *hình 2.7.9*

Các biểu đồ $(\overline{M}_1)$, $(\overline{M}_2)$, $(\overline{M}_3)$ vẽ trên *hình 2.7.10* $\rightarrow$ *hình 2.7.12.* $(\overline{M}_1)$, $(\overline{M}_3)$ là đối xứng, $(\overline{M}_2)$ phản xứng nên: $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$

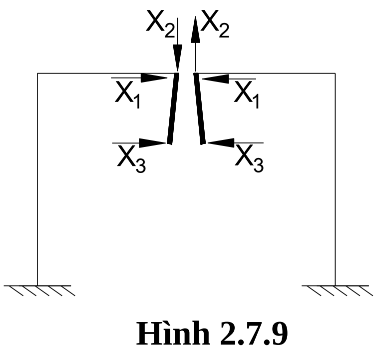
Để $\delta_{13} = \delta_{31} =$ $(\overline{M}_3)$.(M1) = 0 thì c = $\dfrac{2}{3}h$ vì khi đó trọng tâm lấy trên $(\overline{M}_1)$ ứng với tung độ = 0 trên $(\overline{M}_2)$.



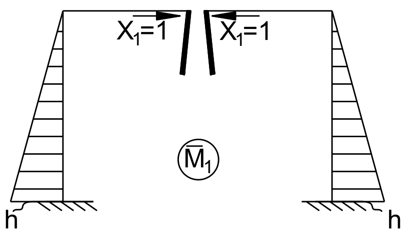
Hình 2.7.7



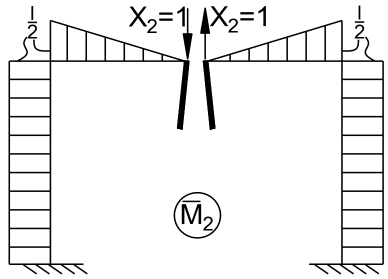
Hình 2.7.8



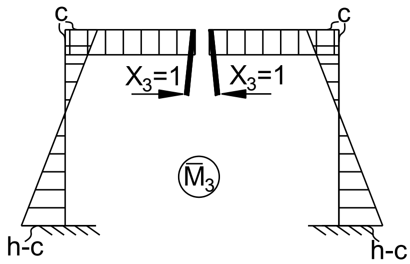
Hình 2.7.9



Hình 2.7.10



Hình 2.7.11



Hình 2.7.12

2.8. Hệ dàn siêu tĩnh

2.8.1. Bậc siêu tĩnh

+ Đối với dàn hệ không nối đất:

$$n = D - 2M + 3$$

+ Đối với dàn hệ nối đất:

$$n = D - 2M + C$$

2.8.2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc

- Sinh viên tự nghiên cứu (*như trong trường hợp tổng quát của phương pháp lực*).

2.8.3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc

Do trong hệ dàn chỉ tồn tại lực dọc nên các hệ số chỉ kể đến thành phần biến dạng dọc trục.

a. Các hệ số chính và phụ

$$\delta_{km} = \sum\int \frac{\overline{N}_k \overline{N}_m}{EF}.ds = \sum_i \frac{\overline{N}_{ik} \overline{N}_{im}}{EF_i}.l_i$$

b. Các số hạng tự do

❖ *Do tải trọng:*

$$\Delta_{kP} = \sum\int \frac{\overline{N}_k N_p^o}{EF} ds = \sum_i \frac{\overline{N}_{ik} N_{ip}^o}{EF} l_i$$

❖ *Do biến thiên nhiệt độ:*

$$\Delta_{kt} = \sum_i \alpha.t_{ci}\Omega(\overline{N}_{ik}) = \sum_i \alpha.t_{ci}.\overline{N}_{ik}.l_i$$

❖ *Do chế tạo chiều dài thanh không chính xác:*

$$\Delta_{k\Delta} = \sum_i \overline{N}_{ik}.\Delta_i$$

Δ_i: độ dôi của thanh dàn thứ i. Nếu là chế tạo ngắn hơn chiều dài (còn gọi là độ hụt) thì Δ_i lấy dấu âm.

❖ *Do chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa:*

$$\Delta_{kZ} = -\sum_{(j)} \overline{R}_{jk} Z_j$$

Trong các công thức trên:

+ $\overline{N}_{ik}, \overline{N}_{im}, N^o_{iP}$:lực dọc trong thanh dàn thứ i do $X_k = 1$, $X_m = 1$và P gây ra trên hệ cơ bản.

+ EF_i , l_i: độ cứng và chiều dài thanh thứ i.

+ α : hệ số dãn nở vì nhiệt độ.

+ $\overline{R}_{jk}$: phản lực tại liên kết j do $X_k = 1$ gây ra trên hệ cơ bản.

+ Z_j : chuyển vị cưỡng bức tại liên kết j.

2.8.4. Xác định lực dọc trong các thanh dàn

Lực dọc trong thanh dàn thứ i:

$$N_i = \overline{N}_{i1}X_1 + \overline{N}_{i2}X_2 + ...\overline{N}_{in}X_n + N^o_{ip} + N^o_{it} + N^o_{i\Delta} + N^o_{iZ}$$

Trong đó:

$N^o_{ip}, N^o_{it}, N^o_{i\Delta}, N^o_{iZ}$ lần lượt là lực dọc trong thanh dàn thứ i do các nguyên nhân P, t, Δ, Z gây ra trên hệ cơ bản.

Nếu hệ cơ bản là tĩnh định thì $N^o_{it}, N^o_{i\Delta}, N^o_{iZ} = 0$.

Ví dụ: Xác định lực dọc trong các thanh dàn trên *hình 2.8.1*, cho biết độ cứng trong các thanh dàn là EA = const.

❖ *Bậc siêu tĩnh:*

$$n = D = 2M + C = 10 - 6.2 + 4 = 2$$

❖ *Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:*

- Hệ cơ bản (*hình 2.8.2*)

(Ở đây ta xem các thanh 5-6, 3-4 là các liên kết thanh và cắt nó)

- Hệ phương trình chính tắc:

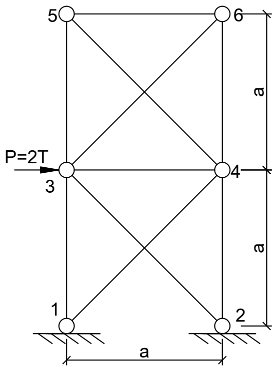
$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

❖ *Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:*

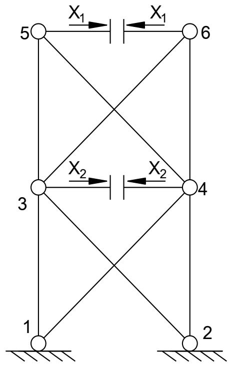
$$\delta_{km} = \sum_i \frac{\overline{N}_{ik}\overline{N}_{im}}{EF_i} l_i \qquad \text{k, m} = \overline{1,2}$$

$$\Delta_{kP} = \sum_i \frac{\overline{N}_{ik}N^o_{ip}}{EF_i}.l_i \qquad \text{i: thanh thứ i}$$

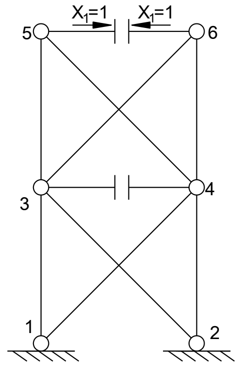
Sơ đồ để xác định $\overline{N}_{i1}, \overline{N}_{i2}, N^o_{ip}$ được tạo trên các *hình 2.8.3, hình 2.8.4* & *hình 2.8.5.*



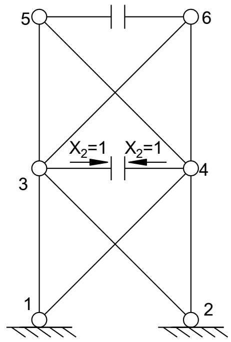
Hình 2.8.1



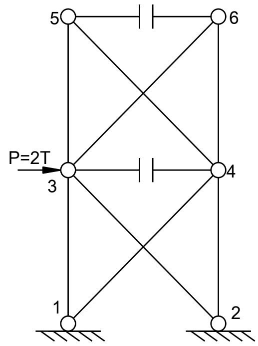
Hình 2.8.2



Hình 2.8.3



Hình 2.8.4



Hình 2.8.5

Lực dọc được xác định theo các cách trong bài hệ dàn. Kết quả tính toán được thể hiện trong bảng tính.

Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases}(5+8\sqrt{2})a.X_1+(2-4\sqrt{2})a.X_2+(1-2\sqrt{2})Pa=0\\(2-4\sqrt{2})a.X_1+(3+4\sqrt{2})a.X_2+(1+2\sqrt{2})Pa=0\end{cases}$$

(Ở đây do các thanh có độ cứng bằng EA nên ta không đưa vào tính toán cho gọn).

Giải phương trình: $\begin{cases}X_1=0{,}014P\\X_2=-0{,}436P\end{cases}$

❖ *Xác định lực dọc trong các thanh dàn:*

$$N_i=\overline{N}_{i1}X_1+\overline{N}_{i2}X_2+N_{ip}^o$$

2.9. Dầm liên tục

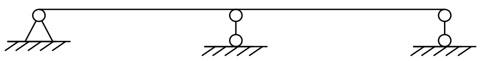
2.9.1. Phân tích hệ

a. Khái niệm

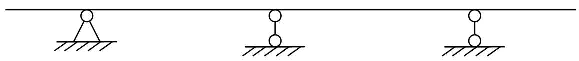
Dầm liên tục là hệ gồm 1 thanh thẳng nối với trái đất bằng số gối tựa lớn hơn hai để tạo thành hệ bất biến hình.

b. Phân loại dầm liên tục

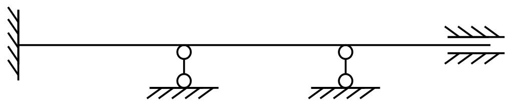
- Dầm liên tục hai đầu khớp (*hình 2.9.1*)
- Dầm liên tục có đầu thừa (*hình 2.9.2*)
- Dầm liên tục có đầu ngàm (*hình 2.9.3*)



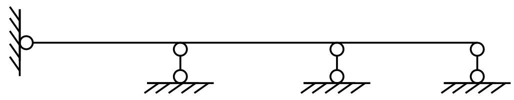
Hình 2.9.1



Hình 2.9.2



Hình 2.9.3



Hình 2.9.4

c. Bậc siêu tĩnh

- *Cách 1*: $\boxed{n = 3V - K}$

Ví dụ : Dầm liên tục trên *hình 2.9.4* có n = 3.3 -7 = 2

- *Cách 2*: $\boxed{n = C - 3}$

C là số liên kết nối đất tương đương quy về liên kết loại 1.

Ví dụ : Dầm liên tục trên *hình 2.9.3* có n = 7 - 3 = 4

- Trường hợp cho phép *bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục* và *tải trọng chỉ tác dụng vuông góc với trục dầm* thì gối cố định chỉ có hiệu quả như gối di động. Khi đó bậc siêu tĩnh được tính bằng biểu thức: $\boxed{n = C_{tg} + N}$

C_{tg} : số gối tựa trung gian (không kể hai gối ngoài cùng), không cần phân biệt là gối cố định hay di động.

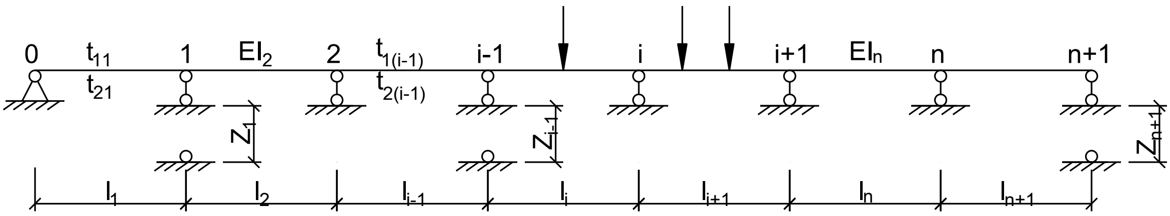
N: số liên kết ngàm, không cần phân biệt ngàm trượt hay ngàm.

Ví dụ: Dầm liên tục trên *hình 2.9.3* có n = 2 + 2 = 4.

2.9.2. Cách tính dầm liên tục bằng phương pháp phương trình ba mômen

Bài toán dầm liên tục là một trường hợp của hệ siêu tĩnh nên ta có thể vận dụng phương pháp lực để tính toán. Tuy nhiên để phục vụ cho việc tính toán được nhanh chóng và đơn giản ta đi cụ thể hoá phương trình chính tắc của nó.

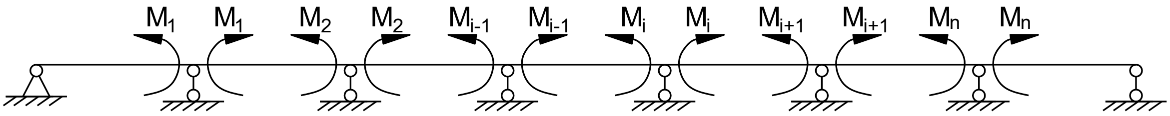
Xét một dầm liên tục hai đầu khớp gồm (n+1) nhịp, có độ cứng EI không đổi trên từng nhịp, chịu tác dụng của các nguyên nhân tải trọng, biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa *hình 2.9.5*.



Hình 2.9.5

a. Hệ cơ bản

Chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ các liên kết ngăn cản chuyển vị góc xoay tương đối của hai tiết diện 2 bên gối tựa trung gian (thay thế liên kết hàn bằng liên kết khớp (*hình 6.9.6*).



Hình 2.9.6

b. Hệ phương trình chính tắc

Xét phương trình i của hệ phương trình cơ bản:

$$\delta_{i1}M_1+\delta_{i2}M_2+..\delta_{ii-1}M_{i-1}+\delta_{ii}M_i+\delta_{1+1}M_{i+1}+..\delta_{in}M_n+\Delta_{iP}+\Delta_{it}+\Delta_{iZ}=0$$

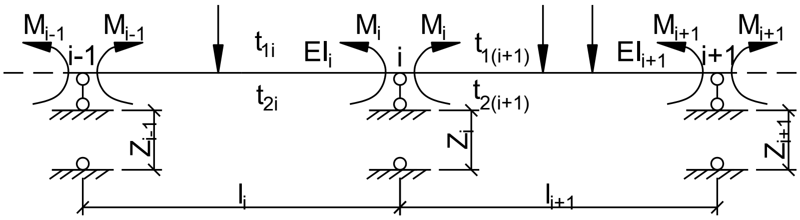
Phương trình này biểu thị điều kiện góc xoay tương đối của 2 tiết diện ở hai bên gối tựa thứ i bằng không.

Ta biết $\delta_{ik}=\delta_{ki},\delta_{ki}$ ở đây là chuyển vị góc xoay tương đối của hai tiết diện hai bên gối tựa thứ k do riêng M_i = 1gây ra trên hệ cơ bản. Mặt khác M_i chỉ gây ra biến dạng trên nhịp i và (i +1)(*hình 2.9.7*). Điều đó có nghĩa là:

$\delta_{(i-1)i},\delta_{ii},\delta_{(i+1)i}\neq 0$ còn δ_{ki} (k $\neq$ (i - 1), i, (i+1)) = 0

Thay vào phương trình trên:

$$\boxed{\delta_{ii-1}M_{i-1}+\delta_{ii}M_i+\delta_{ii+1}M_{i+1}+\Delta_{iP}+\Delta_{it}+\Delta_{iZ}=0}$$



Hình 2.9.7

c. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc

❖ *Xác định các hệ số chính và phụ*

$$\delta_{i(i-1)} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_{i-1}) = \frac{1}{EI_i}.\frac{1.l_i}{2}.\frac{2}{3}.1 = \frac{l_i}{6EI_i}$$

$$\delta_{ii} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_i) = \frac{1}{EI_i}.\frac{1.l_i}{2}.\frac{2}{3}.1 + \frac{1}{EI_{i+1}}.\frac{1.l_{i+1}}{2}.\frac{2}{3}.1 = \frac{l_i}{3E_iI} + \frac{l_{i+1}}{3EI_{i+1}}$$

$$\delta_{i(i+1)} = (\overline{M}_i)(\overline{M}_{i+1}) = \frac{1}{EI_{i+1}}.\frac{1.l_{i+1}}{2}.\frac{1}{3}.1 = \frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}}$$

❖ *Xác định các số hạng tự do*

- Do tải trọng : (Δ_{iP})

$$\Delta_{iP} = (\overline{M}_i)(M_p^o) = \frac{1}{EJ_i}\omega_i.\frac{a_i}{l_i}.1 + \frac{1}{EI_{i+1}}.\omega_{i+1}.\frac{b_{i+1}}{l_{i+1}}.1 = \frac{\omega_i a_i}{l_i EI_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} EI_{i+1}}$$

ω_i :diện tích của (M_p^o) trên nhịp thứ i, dấu của ω_i được lấy theo dấu của (M_p^o).

a_i, b_i :khoảng cách từ trọng tâm diện tích biểu đồ (M_p^o) đến gối tựa trái và phải của nhịp i.

- Do biến thiên nhiệt độ: (Δ_{it})

Trên hệ cơ bản không tồn tại lực dọc nên:

$$\Delta_{it} = \sum \frac{\alpha}{h}(t_2 - t_1)\Omega(\overline{M}_i) = \frac{\alpha}{h_i}(t_{2i} - t_{1i})\frac{1.l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{i+1}}(t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}).\frac{1.l_{i+1}}{2}$$

α : Hệ số dãn nở vì nhiệt.

h_i : chiều cao thứ dầm ở nhịp thứ i.

- Do chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa: (Δ_{iZ})

$$\Delta_{iZ} = -\sum R_{ji} Z_j = -\left[-\frac{1}{l_i}.Z_{i-1} + \frac{1}{l_i}.Z_i + \frac{1}{l_{i+1}}.Z_i - \frac{1}{l_{i+1}}.Z_{i+1} \right] = \frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}}$$

Z_i là độ lún của gối tựa thứ i, theo biểu thức thì Z_i lấy dấu dương khi chuyển vị đi xuống.

Thay tất cả các hệ số vào phương trình trên:

$$\frac{l_i}{6EJ_i}.M_{i-1} + (\frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}}).M_i + \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}}.M_{i+1} + \frac{1}{EJ_i}.\frac{\omega_i a_i}{l_i} +$$

$$+ \frac{1}{EJ_{i+1}}.\frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}} + \frac{\alpha}{h_i}(t_{2i} - t_{1i}).\frac{l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{i+1}}(t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}).\frac{l_i}{2} + \frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}} = 0$$

Chọn 1 I_0 làm chuẩn (thường chọn I của nhiều nhịp có I giống nhau của dầm).

Đặt: $\lambda_i = l_{i.}\frac{I_0}{I_i}$ gọi là chiều dài quy ước của nhịp i.

Thay vào phương trình:

$$\lambda_i M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+2})M_i + \lambda_{i+1}M_{i+1} + 6I_0\left[\frac{\omega_i a_i}{l_i I_i} + \frac{\omega_{i+1}b_{i+1}}{l_{i+1}.I_{i+1}}\right] +$$

$$+6EI_0\left[\frac{\alpha}{h_i}(t_{2i} - t_{1i})\frac{l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{i+1}}(t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}).\frac{l_{i+1}}{2}\right] + 6EI_0\left[\frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}}\right] = 0$$

Trường hợp dầm có tiết diện không đổi trên toàn nhịp: $I_1=I_2=...I_n=I=const$. Lấy $I_0=I$ và thay vào ta được:

$$l_i.M_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1})M_i + l_{i+1}M_{i+1} + 6\left[\frac{\omega_i a_i}{l_i} + \frac{\omega_{i+1}b_{i+1}}{l_{i+1}}\right] +$$

$$+6EI\left[\frac{\alpha}{h_i}(t_{2i} - t_{1i}).\frac{l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{i+1}}(t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}).\frac{l_{i+1}}{2}\right] + 6EI\left[\frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}}\right] = 0$$

Cho $i = 1,\overline{n}$ ta được hệ phương trình chính tắc.

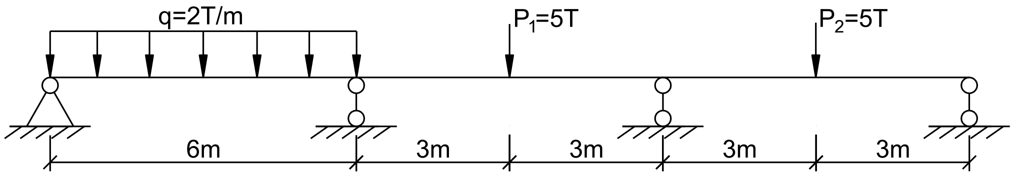
Giải hệ phương trình chính tắc sẽ xác định được (M_1, M_2, ...,M_n).

d. Vẽ các biểu đồ nội lực

- Với biểu đồ mômen (M): mỗi nhịp của dầm ta đã biết được mômen uốn tại 2 gối tựa. Nối 2 tung độ này bằng 1 đoạn thẳng và treo biểu đồ (M_p^o) của nhịp tương ứng vào.

- Với biểu đồ lực cắt (Q), lực dọc (N): Vẽ như trong trường hợp tổng quát của phương pháp lực.

Ví dụ: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên *hình 2.9.15*.

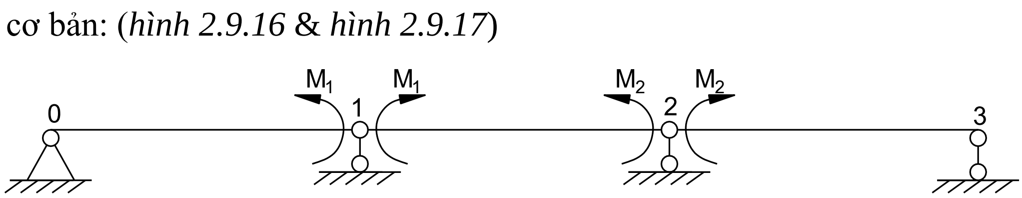


Hình 2.9.15

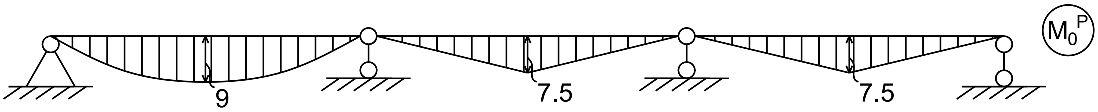
❖ Bậc siêu tĩnh:

$$n=C_{tg} {}_{+N} = 2 + 0 = 2$$

❖ Tạo hệ cơ bản, đánh số các gối tựa, vẽ biểu đồ mômen do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản: (*hình 2.9.16* & *hình 2.9.17*)



Hình 2.9.16



Hình 2.9.17

❖ Viết các phương trình ba mômen cho các gối tựa trung gian.

i = 1: $\lambda_1 M_0 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)M_1 + \lambda_2 M_2 + 6I_0\left[\frac{\omega_1 a_1}{l_1 I_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2 I_2}\right] = 0$

i = 2: $\lambda_2 M_1 + 2(\lambda_2 + \lambda_3)M_2 + \lambda_3 M_3 + 6I_0\left[\frac{\omega_2 a_2}{l_2 I_2} + \frac{\omega_3 b_3}{l_3 I_3}\right] = 0$

❖ Xác định các đại lượng trong phương trình 3 mômen: $M_0 = M_3 = 0$

Chọn $I_0 = I$, tính $\lambda_1 = l_j \frac{I_0}{I_1} \rightarrow \lambda_1 = 6m; \lambda_2 = 3m; \lambda_3 = 3m$

$$\omega_1 = \frac{2}{3} l_i . f = \frac{2}{3}.9.6 = 36; a_1 = b_1 = 3$$

$$\omega_2 = \frac{7{,}5.6}{2} = 22{,}5; a_2 = b_2 = 3$$

$$\omega_3 = \frac{7{,}5.6}{2} = 22{,}5; a_3 = b_3 = 3$$

Thay vào phương trình ba mômen:

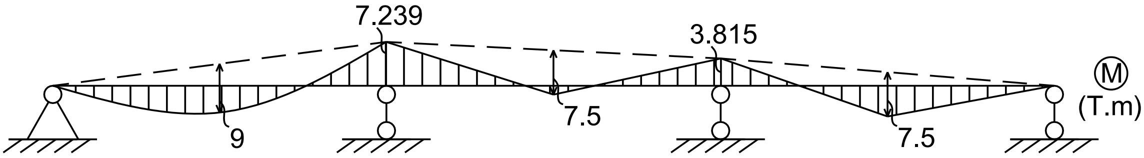
i = 1: $6.0 + 18M_1 + 3M_2 + 6I\left[\frac{36.3}{6I} + \frac{22{,}5.3}{6.2I}\right] = 0$

i = 2: $3M_1 + 12M_2 + 3.0 + 6I\left[\frac{22{,}5.3}{6.2I} + \frac{22{,}5.3}{6.2I}\right] = 0$

$$\begin{cases} 6M_1 + M_2 = -47{,}25 \\ M_1 + 4M_2 = -22{,}5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_1 = -7{,}239 < 0 \\ M_2 = -3{,}815 < 0 \end{cases}$$

e. Vẽ biểu đồ nội lực

❖ Biểu đồ mômen: *hình 2.9.18*.



Hình 2.9.18

❖ Biểu đồ lực cắt: suy ra từ biểu đồ mômen.

Trên đoạn AB: $Q^{tr} = \frac{-7{,}239 - 0}{6} + \frac{1}{2}.2.6 = 4{,}793$

$$Q^{Ph} = \frac{-7{,}239 - 0}{6} - \frac{1}{2}.2.6 = -7{,}2$$

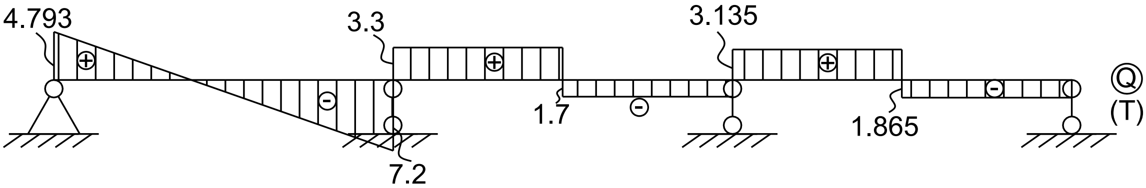
Trên đoạn BE: $Q^{tr} = Q^{Ph} = \frac{1{,}972 - (-7{,}939)}{3} = 3{,}3$

Trên đoạn EC: $Q^{tr} = Q^{Ph} = \dfrac{-3{,}815 - 1{,}972}{3} = -1{,}7$

Trên đoạn CF: $Q^{tr} = Q^{Ph} = \dfrac{5{,}592 - (-3{,}815)}{3} = 3{,}135$

Trên đoạn FD: $Q^{tr} = Q^{Ph} = \dfrac{0 - 5{,}592}{3} = -1{,}864$

Kết quả thể hiện trên *hình 2.9.19*.



Hình 2.9.19

❖ Biểu đồ lực dọc (N): trùng với đường chuẩn.

2.9.3. Các trường hợp khác của dầm liên tục

a. Dầm liên tục có thừa (*hình 2.9.20*)

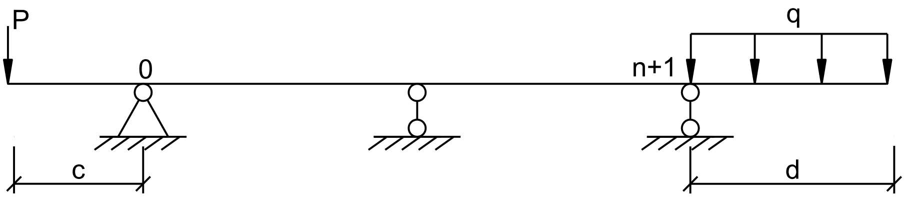
- Phần thừa đầu là tĩnh định nên có thể xác định và vẽ biểu đồ nội lực bằng các phương trình cân bằng tĩnh học.

- Thực hiện cắt bỏ đầu thừa, đưa tải trọng về thành các lực tập trung tại gối tựa biên (*hình 2.9.21*). Có hai quan niệm về mômen gối tựa này:

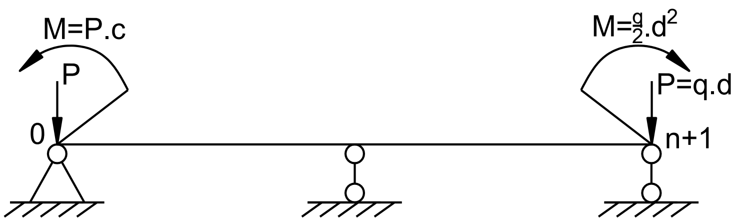
+ Xem là ngoại lực thì cần kể nó khi vẽ biểu đồ (M_p^o)

+ Xem là mômen tại các gối tựa trong phương trình 3 mômen thì chúng là M_0 và M_{n+1}. Trong hệ trên hình (*hình 2.9.21*) thì M_0 = -P.c và M_{n+1} = - $\dfrac{qd^2}{2}$.

Đến đây ta trở lại bài toán dầm liên tục 2 đầu khớp.



Hình 2.9.20



Hình 2.9.21

B. Nội dung thảo luận

Câu 1:

Nêu các tính chất của hệ siêu tĩnh so với hệ tĩnh định có cùng điều kiện làm việc như nhau. Từ đó đưa ra những ưu điểm và nhược điểm của hệ siêu tĩnh so với hệ tĩnh định đã học

Câu 2:

Phương pháp lực được xây dựng dựa trên những cơ sở nào?

Câu 3:

Nêu cách chọn hệ cơ bản? Khi nào thì hệ cơ bản được coi là hợp lý, cho ví dụ minh họa.

Câu 4:

Vì sao phải kiểm tra đối với các hệ số và số hạng tự do trong hệ phương trình chính tắc. Nêu cách kiểm tra biểu đồ nội lực trong kết quả cuối cùng?

Câu 5:

Lập bảng đối chiếu cách tính hệ siêu tĩnh chịu các nguyên nhân khác nhau qua từng khâu tính toán, khi chọn hệ cơ bản.

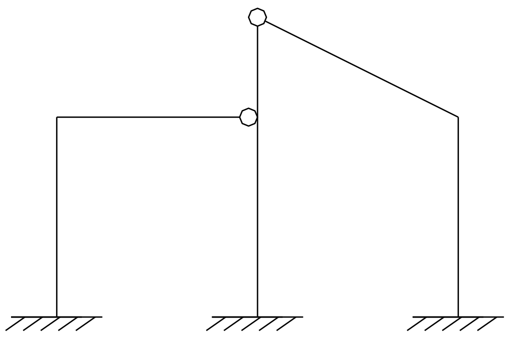
Câu 6:

Vì sao phải giảm nhẹ khối lượng khi tính toán. Các biện pháp nhằm giảm nhẹ khối lượng tính toán khi tính hệ siêu tĩnh bậc cao?

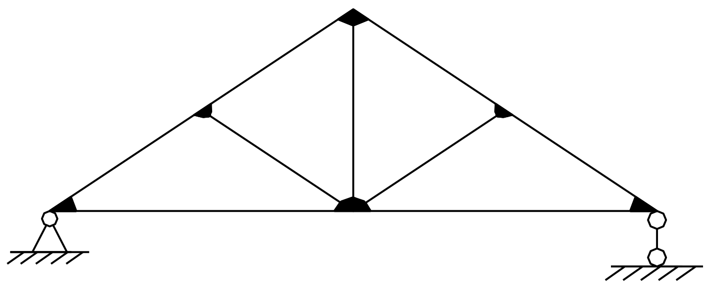
C. Ngân hàng câu hỏi, bài tập

Bài 1:

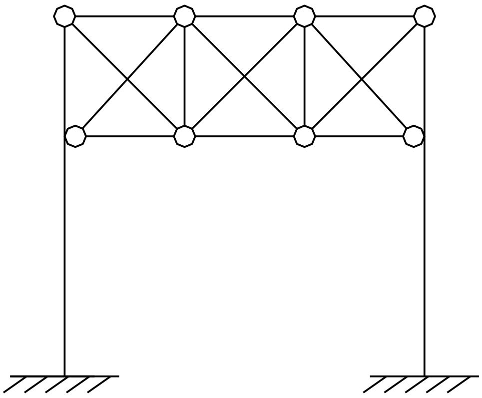
Tìm bậc siêu tĩnh cho hệ trên *hình 1* đến *hình 6*.



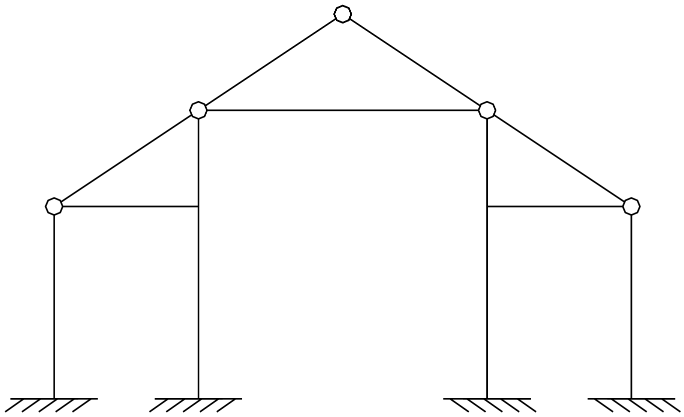
Hình 1



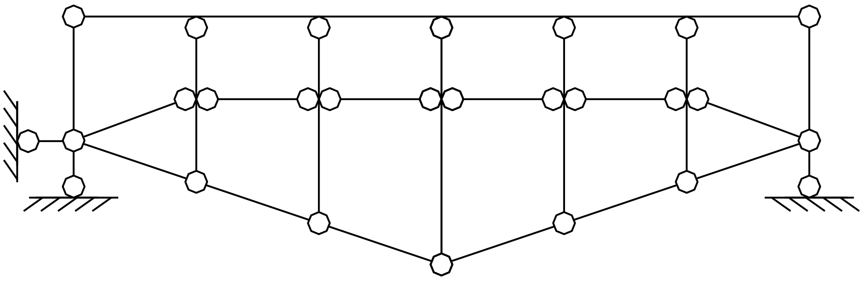
Hình 2



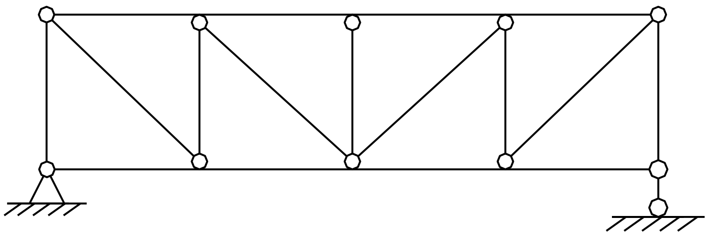
Hình 3



Hình 4



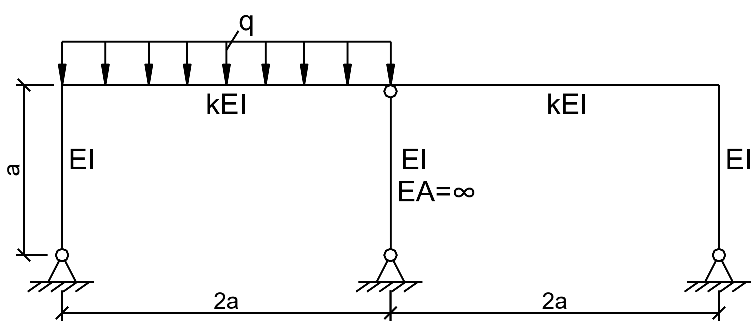
Hình 5



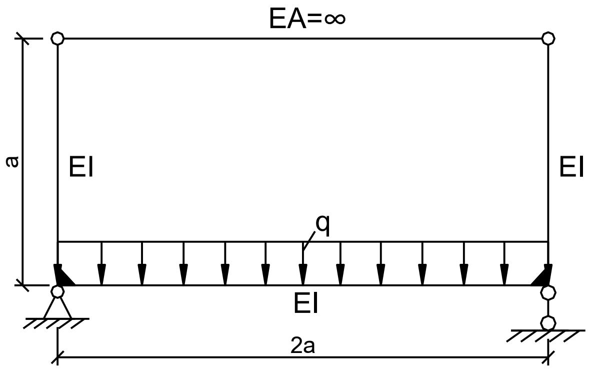
Hình 6

Bài 2:

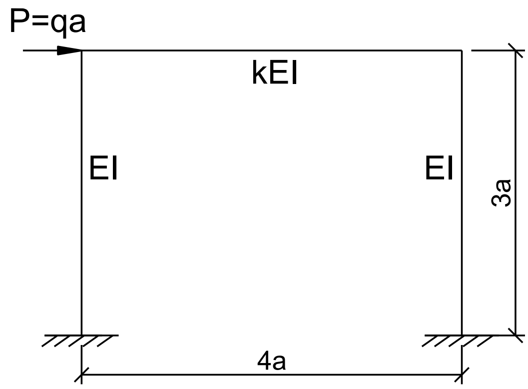
Vẽ biểu đồ mômen uốn, lực cắt, lực dọc trong các khung chịu tải trọng như *hình 7* đến *hình 11*:



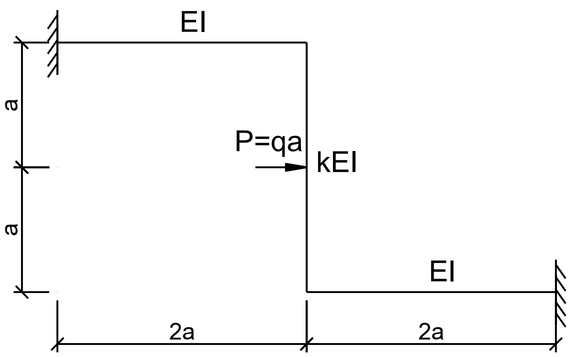
Hình 7



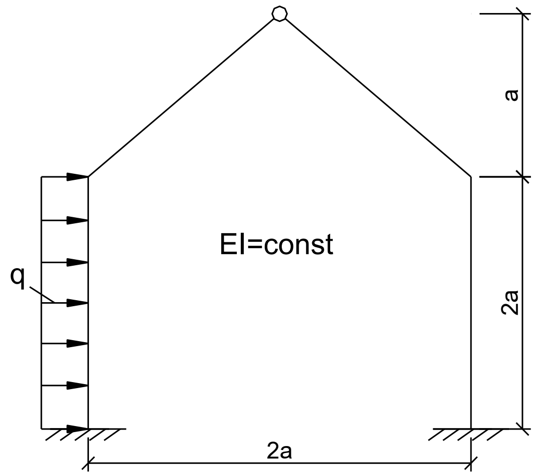
Hình 8



Hình 9



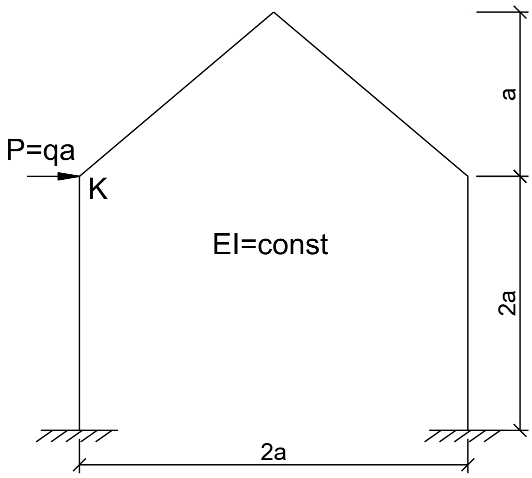
Hình 10



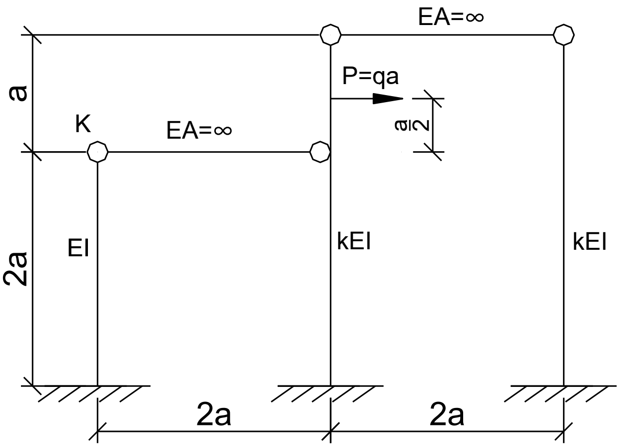
Hình 11

Bài 3:

Vẽ biểu đồ mômen uốn và xác định chuyển vị ngang tại tiết diện K trong khung như trên *hình 12* và *hình 13*.



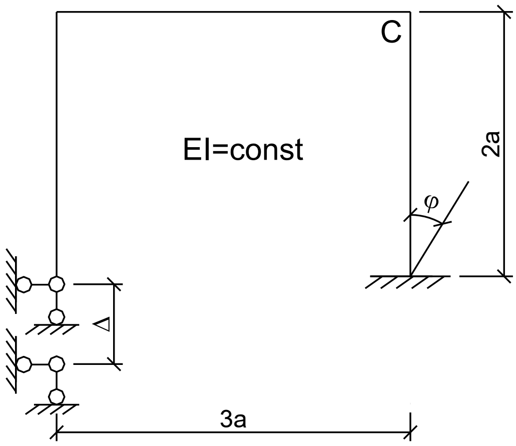
Hình 12



Hình 13

Bài 4:

Vẽ biểu đồ mômen uốn và xác định góc xoay tại nút C trong hệ chịu chuyển vị cưỡng bức như *hình 14*.



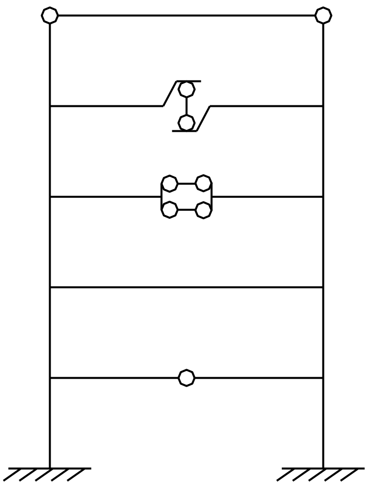
Hình 14

Bài 5:

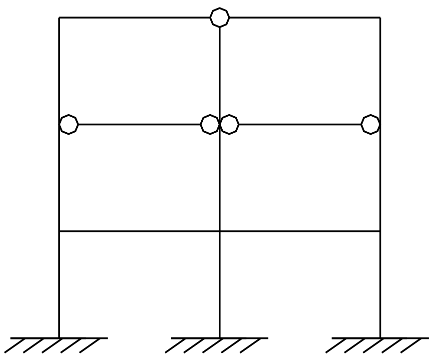
Cho hệ đối xứng như trên *hình 15* đến *hình 18*, tìm sơ đồ nửa hệ tương đương khi:

- Hệ chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng
- Hệ chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng

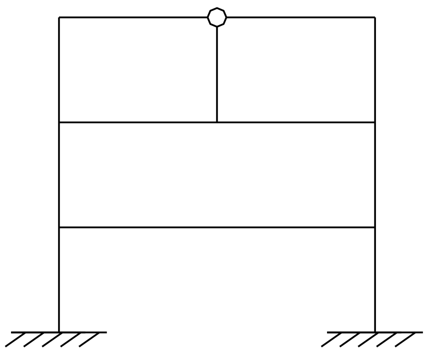
Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt và biến dạng dọc trục trong thanh chịu uốn



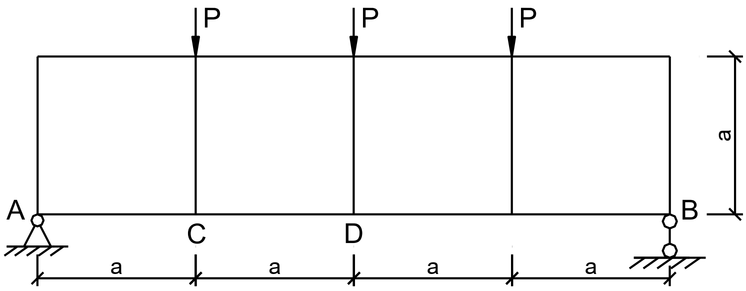
Hình 15



Hình 16



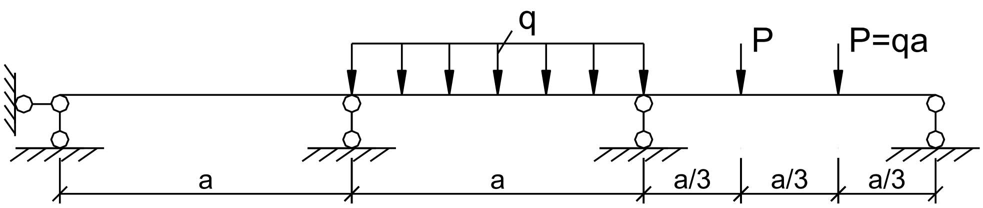
Hình 17



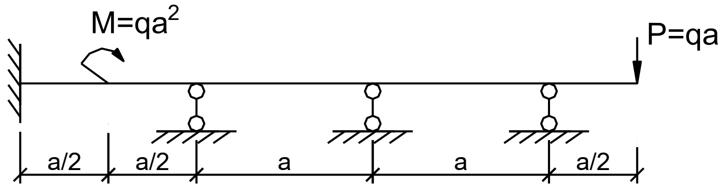
Hình 18

Bài 6:

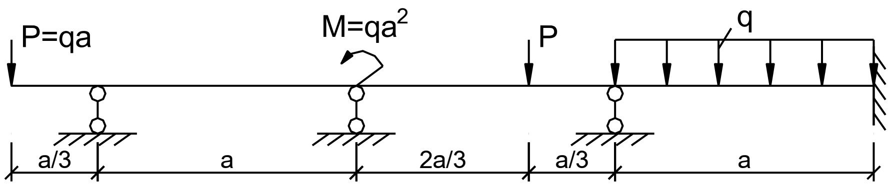
Vận dụng phương trình ba mômen, vẽ biểu đồ mômen uốn, lực cắt trong dầm liên tục chịu tải trọng như *hình 19* đến *hình 21*.



Hình 19



Hình 20



Hình 21

III. CHƯƠNG 3
PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ VÀ CÁCH TÍNH HỆ SIÊU ĐỘNG

I.1. Mục tiêu

Để tính hệ siêu tĩnh ngoài phương pháp lực còn có 1 số phương pháp khác, trong đó phương pháp chuyển vị là 1 phương pháp khá đơn giản. Nội dung của chương này nhằm giải quyết các vấn đề sau:

+ Khái niệm về hệ siêu động, cách tính bậc siêu động

+ Nội dung của phương pháp chuyển vị dùng để tính hệ siêu động

+ So sánh phương pháp chuyển vị và phương pháp lực.

I.2. Tóm tắt nội dung

Nội dung	Hình thức học
- Các khái niệm	Giảng
- Nội dung của phương pháp chuyển vị	Giảng
- Các ví dụ về phương pháp chuyển vị	Giảng, thảo luận
- Xác định chuyển vị trong hệ siêu động	Giảng
- Cách tính hệ siêu động chịu sự thay đổi nhiệt độ và chuyển vị cưỡng bức	Sinh viên tự nghiên cứu
- Tính hệ có nút không chuyển vị thẳng chỉ chịu tải trọng là các lực tập trung tại nút	Sinh viên tự nghiên cứu
- Tính hệ siêu động chịu tải trọng di động	

I.3. Các nội dung cụ thể

A. <u>Nội dung lý thuyết</u>

3.1. Các khái niệm

3.1.1. Các giả thiết của phương pháp chuyển vị

- *Giả thiết 1*: Các nút của hệ được xem là tuyệt đối cứng. Do đó khi biến dạng các đầu thanh quy tụ vào mỗi nút sẽ có chuyển vị thẳng và góc xoay là như nhau.

→ Giả thiết này làm giảm số lượng ẩn số.

- *Giả thiết 2*: Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt khi xét biến dạng của các cấu kiện bị uốn.

→ Giả thiết này không làm thay đổi ẩn số nhưng làm cho bảng tra nội lực các cấu kiện mẫu đơn giản hơn.

- *Giả thiết 3*: Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng đàn hồi dọc trục khi xét biến dạng của các cấu kiện chịu uốn. (biến dạng dọc trục vì nhiệt độ không được phép bỏ qua).

→ Giả thiết này làm giảm số lượng ẩn số.

Ngoài ra còn tuân theo giả thiết: vật liệu tuân theo định luật Hook, biến dạng và chuyển vị là những đại lượng vô cùng bé.

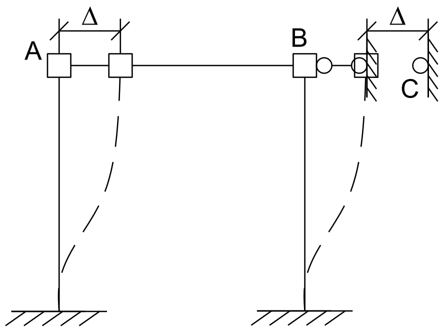
⇒ *Kết luận*: Trước và sau khi biến dạng khoảng cách giữa hai nút ở hai đầu thanh theo phương ban đầu của thanh là không thay đổi trừ trường hợp thanh có biến dạng dọc trục vì nhiệt độ hoặc thanh có hai đầu khớp với độ cứng EA khác vô cùng (*hình 3.1.1*).

Hình 3.1.1

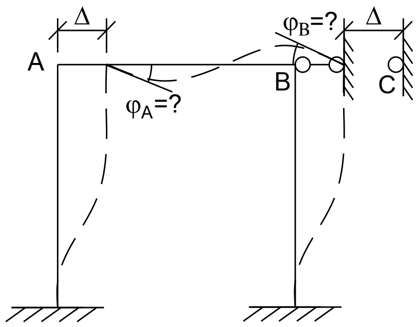
3.1.2. Hệ xác định động và hệ siêu động

a. Hệ xác định động: là những hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức ta có thể xác định được các chuyển vị tại các đầu thanh chỉ bằng điều kiện động học (hình học).

Xét hệ trên hình vẽ (*hình 3.1.2*) khi C chịu chuyển vị cưỡng bức là Δ thì từ điều kiện hình học ta thấy các nút A và B cùng có chuyển vị là Δ. Vậy hệ đã cho là hệ xác định động.



Hình 3.1.2



Hình 3.1.3

b. Hệ siêu động: là những hệ khi chịu nguyên nhân là chuyển vị cưỡng bức ta chưa thể xác định được tất cả các chuyển vị tại các đầu thanh chỉ bằng điều kiện động học (hình học) mà phải sử dụng thêm điều kiện cân bằng.

Ví dụ:

Khi liên kết thanh chuyển vị ngang Δ (*hình 3.1.3*) bằng điều kiện động học có thể xác định được chuyển vị thẳng tại A và B (chuyển vị ngang bằng Δ, chuyển vị đứng bằng 0). Tuy nhiên chưa thể xác định được góc xoay (φ_A,φ_B). Vậy hệ là hệ siêu động.

⇒ *Chú ý:*

- Khái niệm về hệ siêu động hay xác định động là phụ thuộc vào các giả thiết chấp nhận.

- Hệ siêu động (xác định động) có thể là hệ tĩnh định hay siêu tĩnh. Ta chỉ tập trung nghiên cứu hệ siêu động đồng thời là hệ siêu tĩnh.

3.1.3. Bậc siêu động

a. Khái niệm: Bậc siêu động chính là số lượng các chuyển vị độc lập chưa biết của các nút và các khớp không nối đất trong hệ. Ký hiệu n.

$$\boxed{n = n_1 + n_2} \qquad (3\text{-}1)$$

n_1 :số chuyển vị xoay độc lập chưa biết của các nút, n_1 chính bằng số nút trong hệ.

n_2 : số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết của các nút và các khớp không nối đất.

b. Cách xác định

❖ *Xác định n_1*

- Bằng cách tính số lượng nút trong hệ.

- Nút là nơi giao nhau giữa các phần tử và được nối bằng liên kết hàn. Trong đó phần tử là 1 cấu kiện mẫu tức là có biểu đồ nội lực cho trước và được lập sẵn thành bảng.

Đối với môn Cơ học kết cấu, phần tử là 1 đoạn thanh thẳng thoả mãn các điều kiện:

- Độ cứng không đổi.
- Được nối với các phần tử khác hoặc trái đất chỉ bằng liên kết ở 2 đầu.

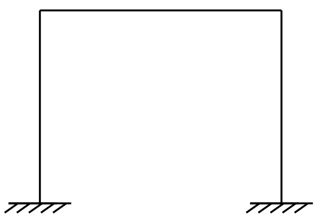
❖ *Xác định n_2*

Bằng cách tính số lượng các chuyển vị thẳng độc lập chưa biết tại các nút và các khớp không nối đất. Để xác định ta thay các nút, ngàm nối đất bằng các liên kết khớp để được 1 hệ mới.

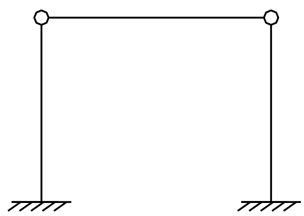
- Nếu hệ mới là bất biến hình thì $n_2 = 0$

- Nếu hệ mới là bất biến hình hay gần biến hình tức thời thì n_2 chính là số liên kết thanh vừa đủ thêm vào để hệ trở thành hệ bất biến hình.

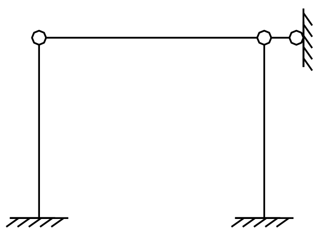
Ví dụ:



Hình 3.1.4a



Hình 3.1.4b



Hình 3.1.4c

⇒ *Chú ý*:

Khái niệm về bậc siêu động có thể thay đổi và phụ thuộc vào các yếu tố:

- Các giả thiết chấp nhận. Chẳng hạn nếu phủ nhận giả thiết 3 thì n_1 không đổi còn n_2 tăng lên.

- Sơ đồ rời rạc hoá chấp nhận.

- Các cấu kiện mẫu mà người thiết kế sẵn có.

3.2. Nội dung của phương pháp chuyển vị

3.2.1. Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị

a. Định nghĩa:

Hệ cơ bản: *của phương pháp chuyển vị là hệ được suy ra từ hệ đã cho bằng cách đặt các liên kết phụ thêm vào hệ nhằm ngăn cản chuyển vị xoay và chuyển vị thẳng của các nút.*

- Nếu các liên kết thêm vào khử được tất cả các chuyển vị của các nút thì hệ cơ bản là hệ xác định động.

- Nếu các liên kết chỉ khử được 1 phần chuyển vị của các nút thì hệ cơ bản là hệ siêu động nhưng có bậc siêu động thấp hơn.

Yêu cầu:

Hệ cơ bản chỉ tồn tại những cấu kiện mẫu nghĩa là biểu đồ nội lực cho sẵn trong bảng.

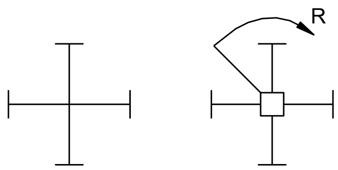
b. Các loại liên kết phụ thêm

❖ *Liên kết mô men*

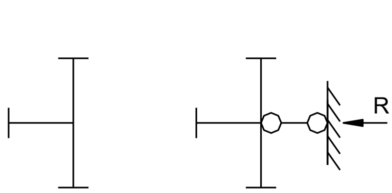
Là loại liên kết chỉ ngăn cản chuyển vị góc xoay, không ngăn cản chuyển vị thẳng. Trong liên kết này chỉ phát sinh thành phần phản lực mômen (ký hiệu *hình 3.2.1*).

❖ *Liên kết lực*:

Liên kết này chỉ ngăn cản dọc theo trục thanh. Trong liên kết chỉ phát sinh một thành phần phản lực dọc theo trục thanh (ký hiệu *hình 3.2.2*).

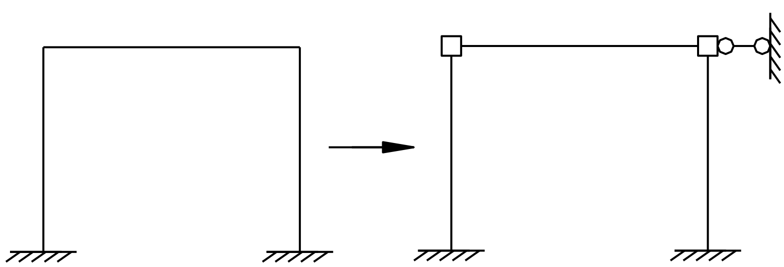


Hình 3.2.1

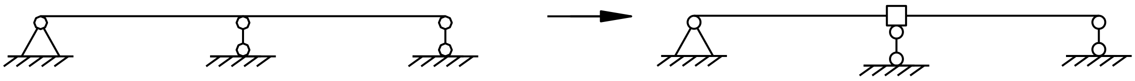


Hình 3.2.2

c. Các ví dụ tạo hệ cơ bản



Hình 3.2.3



Hình 3.2.4

Nhận xét:

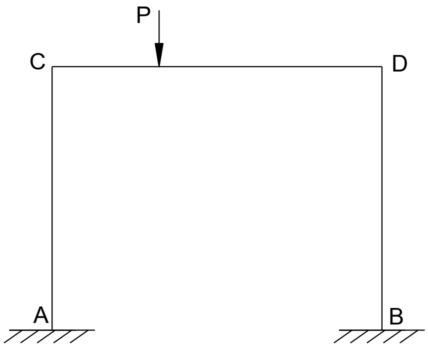
- Khác với hệ cơ bản của phương pháp lực, hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị là duy nhất nếu các yếu tố ảnh hưởng trong đến hệ siêu động là xác định.

- Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị thực chất là những cấu kiện rời rạc và làm việc độc lập nhau.

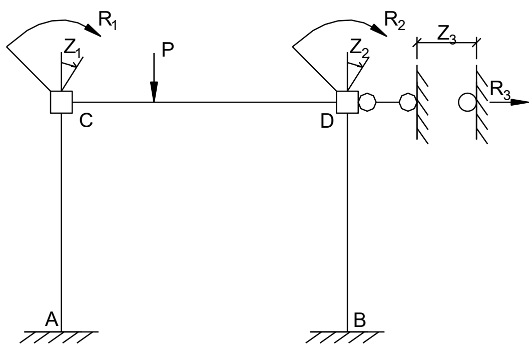
3.2.2. Hệ phương trình cơ bản của phương pháp chuyển vị

Do đặt các liên kết phụ thêm vào nên hệ cơ bản có những yếu tố khác với hệ siêu động ban đầu. Vì vậy ta cần so sánh sự khác nhau đó và bổ xung thêm các điều kiện để hệ cơ bản làm việc giống ban đầu.

Giả sử xét hệ siêu động trên hình và hệ cơ bản của nó.



Hình 3.2.5



Hình 3.2.6

- *Về chuyển vị*:

Trong hệ siêu động tại C và D có tồn tại chuyển vị ngang và góc xoay, còn trong hệ cơ bản thì tại C và D không tồn tại chuyển vị.

- *Về mặt phản lực*:

Trong hệ siêu tĩnh tại C và D không tồn tại phản lực, còn trong hệ cơ bản tại C và D tồn tại phản lực tại các liên kết phụ thêm.

→ Vậy để hệ làm việc giống hệ siêu động ban đầu trên hệ cơ bản cần:

- Tạo ra các chuyển vị cưỡng bức (Z_1, Z_2, Z_3) tương ứng với các liên kết phụ thêm vào.

- Thiết lập điều kiện phản lực tại các liên kết phụ thêm vào do các nguyên nhân (Z_1, Z_2, Z_3) bằng không. Các điều kiện này được viết dưới dạng:

$$\begin{cases} R_1(Z_1, Z_2, Z_3, P) = 0 \\ R_2(Z_1, Z_2, Z_3, P) = 0 \\ R_3(Z_1, Z_2, Z_3, P) = 0 \end{cases}$$

Từ điều kiện này ta có thể giải ra được (Z_1, Z_2, Z_3)

→ Tương tự như vậy ta mở rộng cho 1 hệ siêu động bất kỳ chịu các nguyên nhân bên ngoài (P, t, Z). Tạo hệ cơ bản bằng cách đặt n liên kết phụ thêm vào. Để hệ cơ bản làm việc giống hệ ban đầu thì hệ cơ bản cần:

- Tạo ra các chuyển vị cưỡng bức (Z_1, Z_2, Z_3) tương ứng với các liên kết phụ thêm vào. Các chuyển vị này có chiều tuỳ ý nhưng thường chọn xoay theo chiều kim đồng hồ, thẳng theo chiều từ trái sang phải. Các chuyển vị này đóng vai trò là ẩn số.

- Thiết lập điều kiện phản lực tại các liên kết phụ thêm vào do các nguyên nhân (Z_1, Z_2,…,Z_n, P, t, Z) bằng 0:

$$\begin{cases} R_1(Z_1, Z_2, ..., Z_n, P, t, Z) = 0 \\ R_2(Z_1, Z_2, ..., Z_n, P, t, Z) = 0 \\ .... \\ R_3(Z_1, Z_2, ..., Z_n, P, t, Z) = 0 \end{cases} \qquad (3\text{-}2)$$

Hệ phương trình này gọi là hệ phương trình cơ bản của phương pháp chuyển vị.

3.2.3. Hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị

Xét phương trình thứ k của hệ phương trình cơ bản:

$$R_k(Z_1, Z_2, ..., Z_n, P, t, Z) = 0$$

Khai triển phương trình này theo nguyên lý cộng tác tác dụng:

$$R_k(Z_1) + R_k(Z_2) + ... + R_k(Z_n) + R_k(P) + R_k(t) + R_k(Z) = 0$$

Gọi r_{km} là phản lực tại liên kết phụ thêm thứ k do riêng chuyển vị cưỡng bức tại liên kết phụ thêm thứ m Z_m=1 gây ra trên hệ cơ bản.

Suy ra : $R_k(Z_m) = r_m.Z_m$

Gọi R_{kP}, R_{kt} ,R_{kZ} : lần lượt là phản lực tại liên kết phụ thêm thứ k do nguyên nhân ngoài P,t,Z gây ra trên hệ cơ bản.

Suy ra: $R_k(P) = R_{kP}$, $R_k(t) = R_{kt}$, $R_k(Z) = R_{kZ}$

Thay tất cả vào phương trình khai triển ta được:

$$r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + ... + r_{kn}Z_n + R_{kP} + R_{kt} + R_{kZ} = 0$$

Cho $k = \overline{1.n}$ ta được hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + ... + r_{1n}Z_n + R_{1P} + R_{1t} + R_{1Z} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + ... + r_{2n}Z_n + R_{2P} + R_{2t} + R_{2Z} = 0 \\ .... \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + ... + r_{nn}Z_n + R_{nP} + R_{nt} + R_{nZ} = 0 \end{array} \right\} \qquad (3\text{-}3)$$

Trong hệ phương trình này:

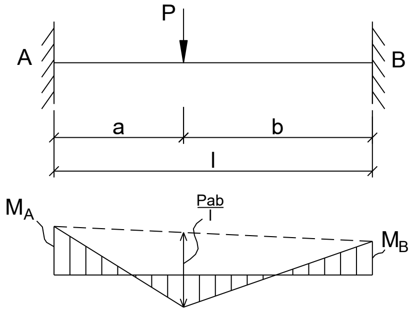
+ r_{kk}: gọi là hệ số chính, $r_{kk}>0$.

+ r_{km}: (k#m) gọi là hệ số phụ, $r_{km} = r_{mk}$.

+ R_{kP}, R_{kt}, R_{kZ} : gọi là số hạng tự do.

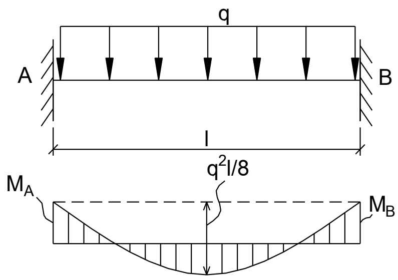
3.2.4. Bảng tra nội lực cho một số phần tử

a. Nguyên nhân tải trọng



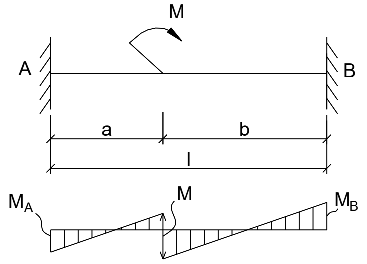
$$M_A = -\frac{Pab^2}{l^2}$$

$$M_B = -\frac{Pa^2b}{l^2}$$



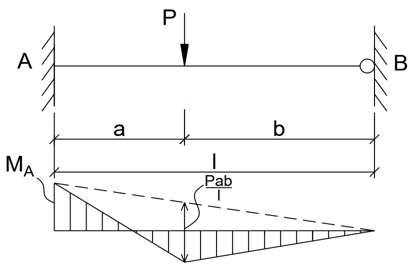
$$M_A = -\frac{ql^2}{12}$$

$$M_B = -\frac{ql^2}{12}$$

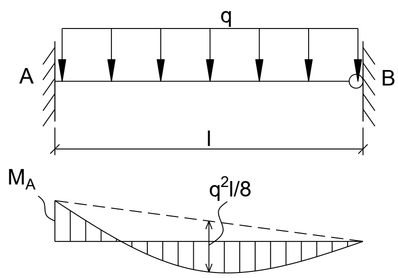


$$M_A = \frac{Mb(2a-b)}{l^2}$$

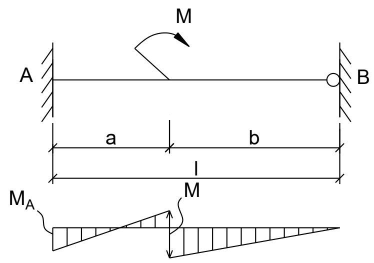
$$M_B = \frac{Ma(a-2b)}{l^2}$$



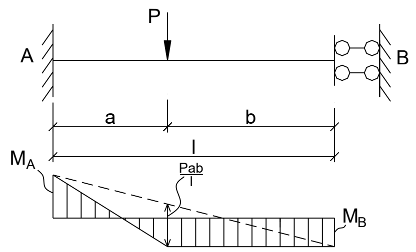
$$M_A = -\frac{Pab(2l-a)}{2l^2},\ M_B = 0$$



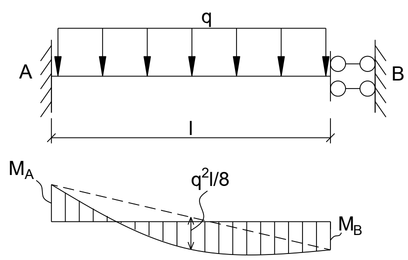
$$M_A = -\frac{ql^2}{8},\ M_B = 0$$



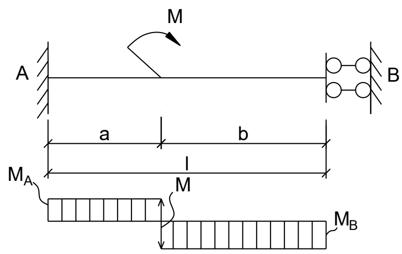
$$M_A = \frac{M}{2}\left(1-\frac{3b^2}{l^2}\right),\ M_B = 0$$



$$M_A = -\frac{Pa}{2}\left(2-\frac{a}{l}\right),\ M_B = \frac{Pa^2}{2l}$$

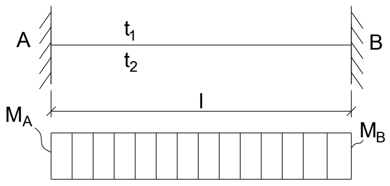


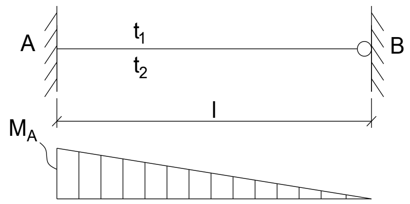
$$M_A = -\frac{ql^2}{3},\ M_B = \frac{ql^2}{6}$$

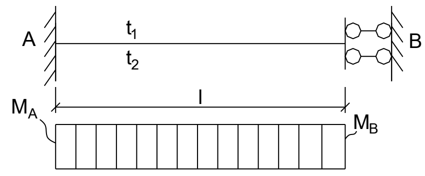


$$M_A = -\frac{Mb}{l},\ M_B = \frac{Ma}{l}$$

b. Nguyên nhân biến thiên nhiệt độ





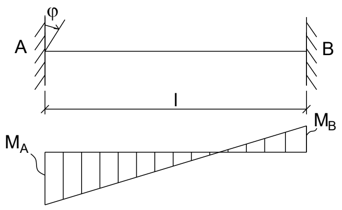


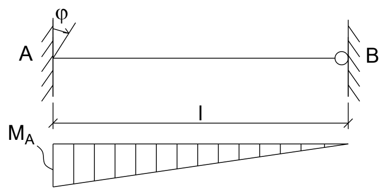
$$M_A = -\frac{\alpha}{h} EI(t_2 - t_1),\quad M_B = M_A$$

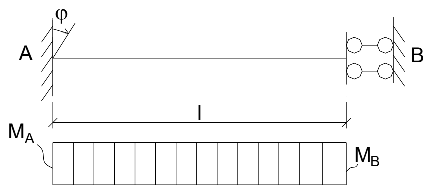
$$M_A = -\frac{3\alpha}{2h} EI(t_2 - t_1),\quad M_B = 0$$

$$M_A = -\frac{\alpha}{h} EI(t_2 - t_1),\quad M_B = M_A$$

c. Nguyên nhân là chuyển vị cưỡng bức



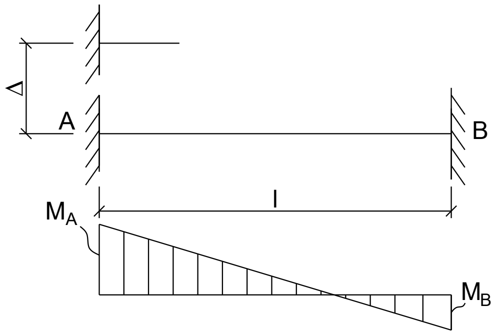


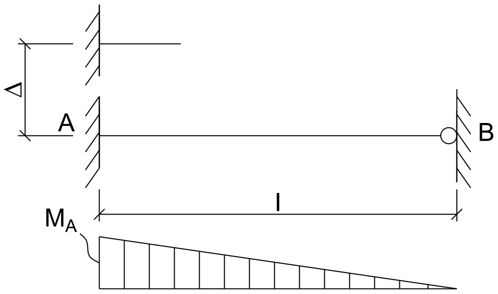


$$M_A = \frac{4EI}{l}\varphi,\quad M_B = -\frac{2EI}{l}\varphi$$

$$M_A = \frac{3EI}{l}\varphi,\quad M_B = 0$$

$$M_A = \frac{EI}{l}\varphi,\quad M_A = M_B$$





$$M_A = -\frac{6EI}{l^2}\Delta,\ M_B = \frac{6EI}{l^2}\Delta$$

$$M_A = -\frac{3EI}{l^2}\Delta,\ M_B = 0$$

3.2.5. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc

a. Vẽ các biểu đồ mômen uốn trong hệ cơ bản xác định động

❖ *Biểu đồ ($\overline{M}_k$):*

Là biểu đồ mômen uốn do riêng nguyên nhân $Z_k = 1$ gây ra trên hệ cơ bản.

+ Trường hợp Z_k là chuyển vị góc xoay

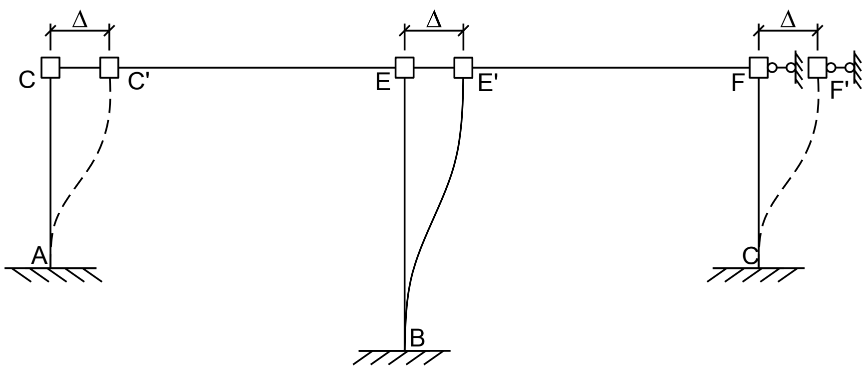
Nguyên nhân này chỉ gây ảnh hưởng cục bộ tại liên kết chịu Z_k, nghĩa là chỉ có các thanh có đầu quy tụ vào nút đó mới chịu ảnh hưởng. Do vậy biểu đồ được vẽ bằng cách rời rạc hệ cơ bản và tra bảng cho các phần tử chịu chuyển vị góc xoay tại đầu thanh.

+ Trường hợp Z_k là chuyển vị thẳng

Khi một nút chuyển vị thẳng sẽ gây ra chuyển vị thẳng tại nhiều nút trong hệ, do đó sẽ gây ra nội lực trong nhiều thanh. Mặt khác chỉ có chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh mới gây ra nội lực.

• Khi hệ chỉ gồm các thanh đứng song song:

Nếu bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục thanh, khi 1 nút nào đó chuyển vị thẳng thì các thanh ngang va nghiêng sẽ tịnh tiến nghĩa là các thành phần chuyển vị tương đối theo phương vuông góc với trục thanh bằng không, còn các thanh đứng trong phạm vi mỗi tầng sẽ có chuyển vị tương đối như nhau theo phương vuông góc với trục thanh (*hình 3.2.7*).



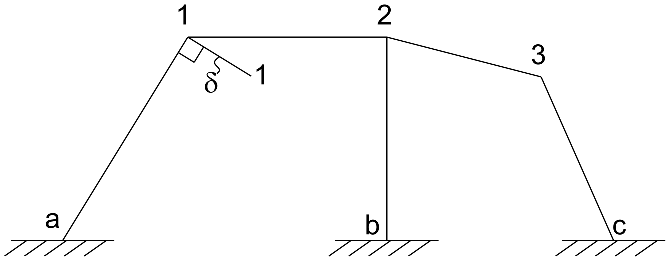
Hình 3.2.7

• Khi hệ có các thanh đứng không song song:

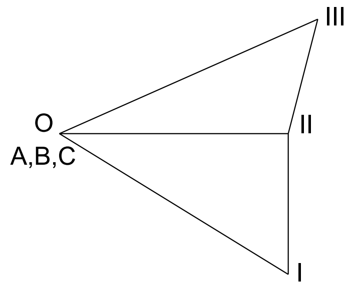
Thành phần chuyển vị thẳng cần tìm nói chung sẽ tồn tại trong tất cả các thanh, giá trị của chung sẽ khác nhau trong mỗi thanh đứng. Các thành phần này có thể tìm bằng cách lập sơ đồ chuyển vị.

- Cơ sở của việc lập sơ đồ: chuyển vị thẳng tại 1 nút sẽ biết nếu như biết được ít nhất 1 chuyển vị tại 2 đầu thanh đối diện quy tụ vào nút. Xem sự phân tích trên hình (*hình 3.1.2*)

- Mục đích của việc lập sơ đồ chuyển vị là biểu diễn sự thay đổi vị trí của các đầu thanh lên sơ đồ mà trên đó ta có thể xác định được chuyển vị thẳng tương đối tại các đầu thanh. Ta tìm hiểu cách lập sơ đồ quan hệ cho trên hình vẽ (*hình 3.2.6a*). Trong đó, giả sử nút 1 chịu chuyển vị δ.



Hình 3.2.6a



Hình 3.2.6b

- *Bước 1*: Chọn 1 điểm O làm gốc và tượng trưng cho các điểm không có chuyển vị. Vậy nếu gọi A, B, C là tượng trưng cho các điểm a, b, c trên sơ đồ chuyển vị thì A, B, C trùng với O.

- *Bước 2*: Qua O kẻ 1 đoạn OI = δ theo phương và chiều của chuyển vị nút 1, có độ lớn theo tỷ lệ xích tuỳ chọn. Điểm I là tượng trưng cho chuyển vị của nút 1 trên sơ đồ chuyển vị.

- *Bước 3*: Xác định điểm II tượng trưng cho nút 2 trên sơ đồ chuyển vị. Nút 2 có 2 đầu thanh đối diện đã biết trên sơ đồ chuyển vị là 1 → I, b → B. Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với thanh 12, qua B kẻ đường thẳng vuông góc với thanh 2b. Giao điểm chính là II.

- *Bước 4*: Xác định điểm III tượng trưng cho nút 3 trên sơ đồ chuyển vị. Tương tự bước 3, qua II kẻ đường thẳng vuông góc với thanh 23, qua C kẻ đường thẳng vuông góc với thanh 3c. Giao điểm là điểm III.

- *Bước 5*: Xác định kết quả. Để xác định chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh của thanh ik ta chỉ việc đo chiều dài của đoạn IK tương ứng trên sơ đồ chuyển vị hoặc giải các tam giác với các góc và các cạnh đã biết trên sơ đồ chuyển vị.

→ Sau khi đã xác định chuyển vị thẳng, ta vẽ biểu đồ bằng cách rời rạc và tra bảng cho từng cấu kiện.

❖ *Biểu đồ* (M_P^0):

Là biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây trên hệ cơ bản, được vẽ bằng cách rời rạc và tra bảng cho từng cấu kiện.

❖ *Biểu đồ* (M_t^0):

Là biểu đồ mômen uốn do biến thiên nhiệt độ gây trên hệ cơ bản.

Phân tích nguyên nhân này ra làm 2 thành phần:

- Thành phần biểu thị sự thay đổi của nhiệt độ của thớ trên và thớ dưới trong phạm vi mỗi cấu kiện và được đặc trưng bằng $\Delta t = t_2 - t_1$. Thành phần này gây ra $M_{\Delta t}^0$

Theo nguyên lý cộng tác dụng: $M_t^0 = M_{tc}^0 + M_{\Delta t}^0$

- $M_{\Delta t}^0$ là do Δt gây ra. Nhưng sự chênh lệch nhiệt độ chỉ làm cho thanh bị uốn cong mà không thay đổi chiều dài. Điều này có nghĩa Δt chỉ gây ra mômen uốn trong thanh đó mà không ảnh hưởng đến các thành phần tử khác. Vậy $\overline{M}_{\Delta t}^0$ được vẽ bằng rời rạc hệ và tra bảng cho các phần tử chịu Δt

- M_{tc}^0 do t_c gây ra. Mặc dù t_c không làm cho thanh bị uốn cong nhưng làm thay đổi chiều dài. Điều này gây ra chuyển vị thẳng tại các nút và gây ra nội lực trong hệ. So sánh trường hợp hệ chịu nguyên nhân Z_k là chuyển vị thẳng thì có sự tương tự nhưng ở đây sự chuyển vị của các nút do sự thay đổi chiều dài của các thanh. Vậy ta cũng đi lập sơ đồ chuyển vị (*còn gọi là giản đồ Willot*) như khi lập cho Z_k là chuyển vị thẳng nhưng cần bổ sung sự chuyển vị các nút do sự thay đổi chiều dài trong mỗi thanh.

❖ *Biểu đồ (M_Z^0):*

Là biểu đồ mômen uốn do chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa gây ra trên hệ cơ bản.

Phân tích nguyên nhân này ra làm 2 loại: chuyển vị thẳng và chuyển vị góc xoay

Theo nguyên lý cộng tác dụng: $M_Z^0 = M_\varphi^0 + M_\Delta^0$

+ M_φ^0: do nguyên nhân gây ra, vẽ tương tự biểu đồ do Z_k là chuyển vị góc xoay.

+ M_Δ^0: do nguyên nhân gây ra, vẽ tương tự biểu đồ do Z_k là chuyển vị thẳng. Tất nhiên là có thể lập sơ đồ chuyển vị nếu cần.

b. Xác định các hệ số của phương trình chính tắc

❖ *Trường hợp liên kết k là liên kết mômen*

- Xác định r_{km} : tách nút k trên biểu đồ mômen và xét cân bằng mômen nút.

- Xác định R_{kP}, R_{kt}, R_{kZ} . Tương tự, tách nút k trên biểu đồ mômen tương ứng và xét cân bằng mômen nút.

❖ *Trường hợp liên kết k là liên kết lực*

Tương tự như ở trên bằng cách thực hiện 1 mặt cắt qua liên kết k trên biểu đồ mômen tương ứng nhằm tách ra khỏi hệ một bộ phận và xét cân bằng lực.

Chú ý:

- Chiều dương của phản lực lấy theo chiều của chuyển vị cưỡng bức đặt thêm vào trên hệ cơ bản.

- Khi liên kết k là liên kết mômen, thì chỉ cần xác định mômen quanh nút k là đủ để viết phương trình cân bằng mômen. Khi liên kết k là liên kết lực thì ta chỉ cần xác định các lực cắt hoặc lực dọc vừa đủ để tham gia phương trình cân bằng hình chiếu.

3.2.6. Vẽ biểu đồ nội lực

Sau khi giải hệ phương trình chính tắc sẽ xác định được (Z_1, Z_2, …, Z_n) và có thể giải hệ theo cách tính trực tiếp hay theo nguyên lý cộng tác dụng như phương pháp lực. Trong vẽ thực hành người ta thường sử dụng phương pháp cộng tác dụng để vẽ biểu đồ mômen

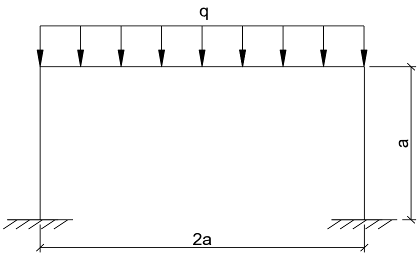
Biểu đồ lực cắt được suy ra từ biểu đồ mômen và biểu đồ lực dọc được suy ra từ biểu đồ lực cắt như trong phương pháp lực

3.3. Các ví dụ về phương pháp chuyển vị

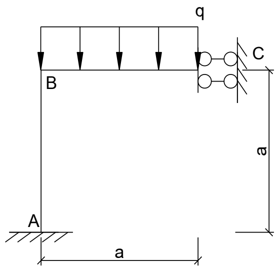
3.3.1. Ví dụ 1

Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình (*hình 3.3.1*). Cho biết độ cứng trong các thanh là EI = const và chỉ xét biến dạng uốn

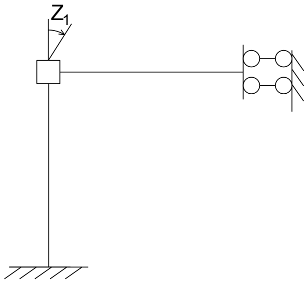
Hệ đối xứng chịu nhiều nguyên nhân đối xứng, ta lập sơ đồ tính một nửa hệ tương đương như trên hình (*hình 3.3.2*) và đi giải bài toán trên một nửa hệ tương đương



Hình 3.3.1



Hình 3.3.2



Hình 3.3.3

❖ *Bậc siêu động*

$$n = n_1 + n_2 = 1 + 0 = 1$$

❖ *Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc*

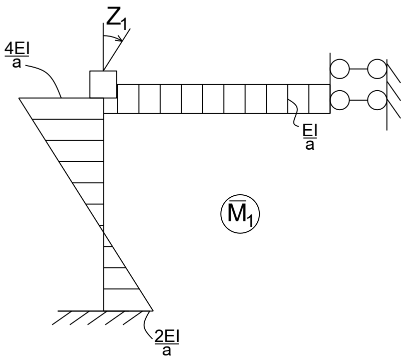
- Hệ cơ bản (*hình 3.3.3*)

- Hệ phương trình chính tắc

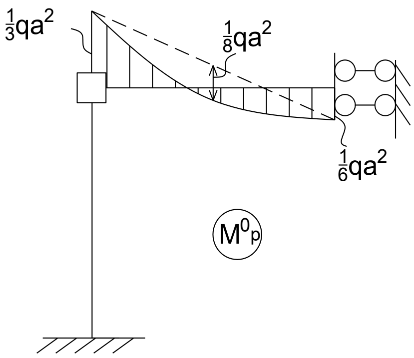
$r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0$

❖ *Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc*

- Vẽ các biểu đồ $\overline{M}_1, M_P^0$: kết quả trên hình vẽ (*hình 3.3.4* và *hình 3.3.5*)



Hình 3.3.4

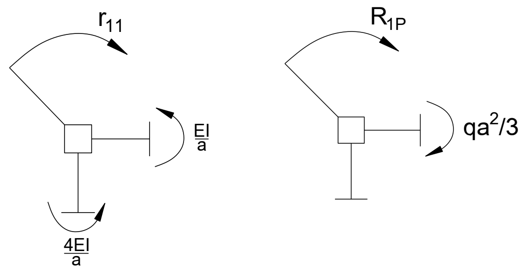


Hình 3.3.5

- Xác định các hệ số:

+ r_{11}: Tách nút B trên $\overline{M}_1$ và xét cân bằng nút $\rightarrow$ $r_{11} = \dfrac{5EI}{a}$

+ R_{1P}: Tách nút B trên M_P^0 và xét cân bằng nút $\rightarrow$ $R_{1P} = -\dfrac{qa^2}{3}$



Thay vào hệ phương trình chính tắc $\rightarrow$ $Z_1 = \dfrac{qa^3}{15EI}$

❖ *Vẽ các biểu đồ nội lực*

+ Biểu đồ mômen:

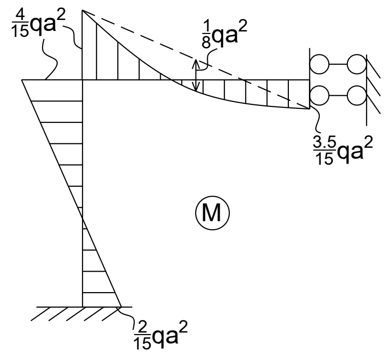
$(M) = (\overline{M}_1)Z_1 + (M_P^0)$. Kết quả trên hình vẽ (*hình 3.3.6*).

+ Biểu đồ lực cắt:

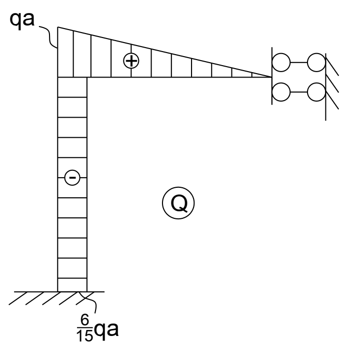
Suy ra từ biểu đồ mômen. Kết quả trên hình vẽ (*hình 3.3.7*).

+ Biểu đồ lực dọc:

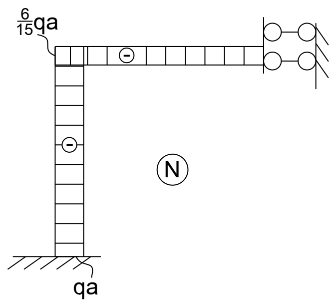
Suy ra từ biểu đồ lực cắt. Kết quả trên hình vẽ (*hình 3.3.8*).



Hình 3.3.6



Hình 3.3.7

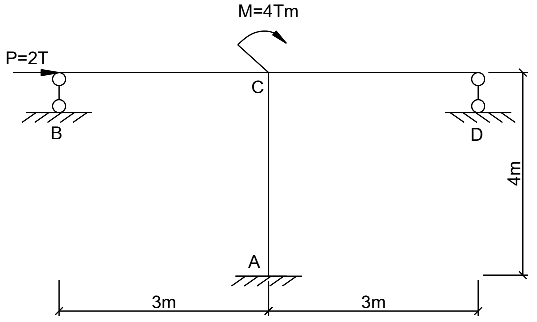


Hình 3.3.8

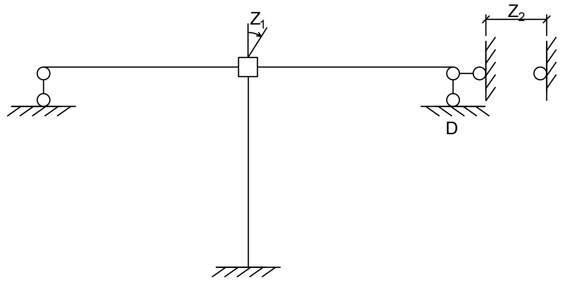
Sau khi đã có kết quả trên 1 nửa hệ, ta suy ra kết quả trên toàn hệ theo tính chất của hệ đối xứng chịu nguyên nhân đối xứng.

3.3.2. Ví dụ 2

Vẽ biểu đồ nội lực của hệ trên *hình 3.3.9*. Cho biết độ cứng trong thanh đứng là 2EI, trong các thanh ngang là EI. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.



Hình 3.3.9



Hình 3.3.10

❖ *Bậc siêu động:*

$$n = n_1 + n_2 = 1 + 1 = 2$$

❖ *Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:*

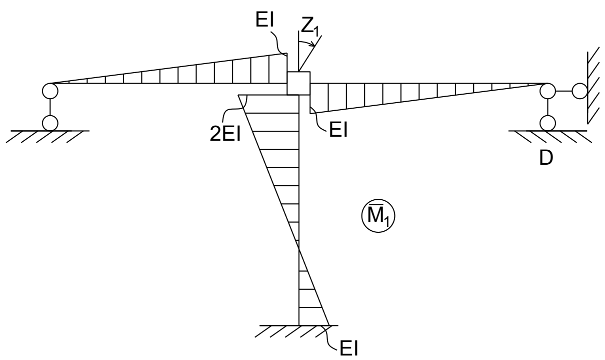
- Hệ cơ bản: (*hình 3.3.10*)

- Hệ phương trình chính tắc:

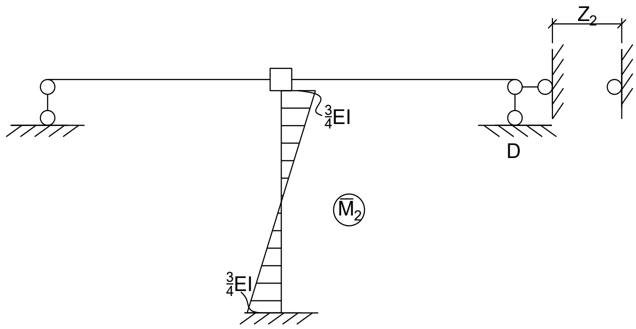
$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0 \\ r_{12}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0 \end{cases}$$

❖ *Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:*

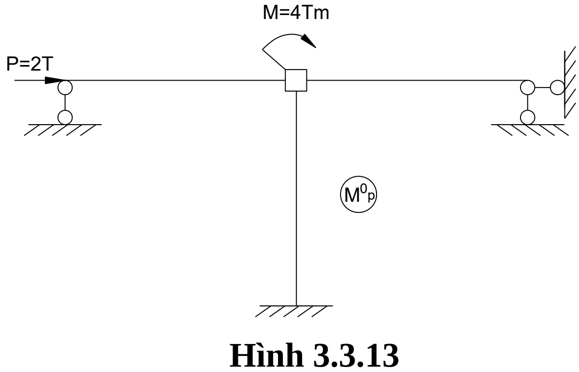
- Vẽ các biểu đồ $\overline{M}_1, \overline{M}_2, M_P^0$: Kết quả trên *hình 3.3.11*, *hình 3.3.12& hình 3.3.13*



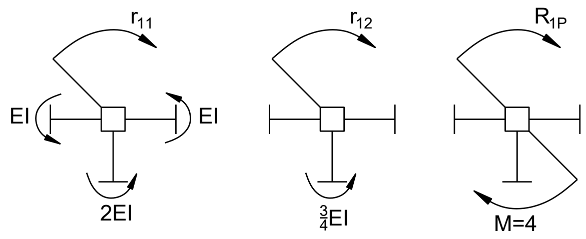
Hình 3.3.11



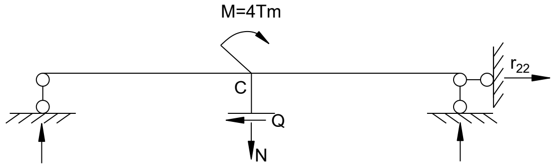
Hình 3.3.12



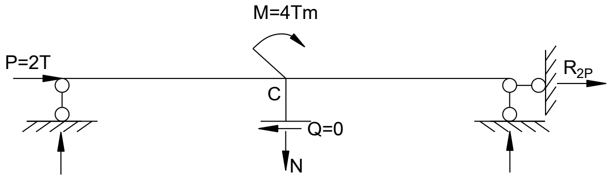
Hình 3.3.13



Hình 3.3.14



Hình 3.3.15



Hình 3.3.16

- Xác định các hệ số:

+ r_{11}: Tách nút C trên $\overline{M}_1$ và xét cân bằng nút $\rightarrow$ r_{11} = 4EI. (*hình 3.3.14*)

+ r_{12}: Tách nút C trên $\overline{M}_2$ và xét cân bằng nút $\rightarrow$ $r_{12} = r_{21}$ = 0.75EI. (*hình 3.3.14*)

+ r_{22}: cắt 1 phần hệ trên M_P^0 (*hình 3.3.15*). Q được suy ra từ $\overline{M}_2$.

Chiếu lên phương X $\rightarrow$ r_{22} = Q = 0.375EI

+ R_{1P}: tách nút C trên M_P^0 và xét cân bằng nút $\rightarrow$ R_{1P} = - M = - 4. (*hình 3.3.14*)

+ R_{2P}: cắt 1 phần hệ trên M_P^0 (*hình 3.3.16*). Chiếu lên phương X $\rightarrow$ R_{2P} = - P = - 2

Thay vào hệ phương trình chính tắc:

$$\rightarrow \begin{cases} Z_1 = \dfrac{3.2}{EI} \\ Z_2 = \dfrac{11.733}{EI} \end{cases}$$

❖ *Vẽ các biểu đồ nội lực:*

+ Biểu đồ mômen:

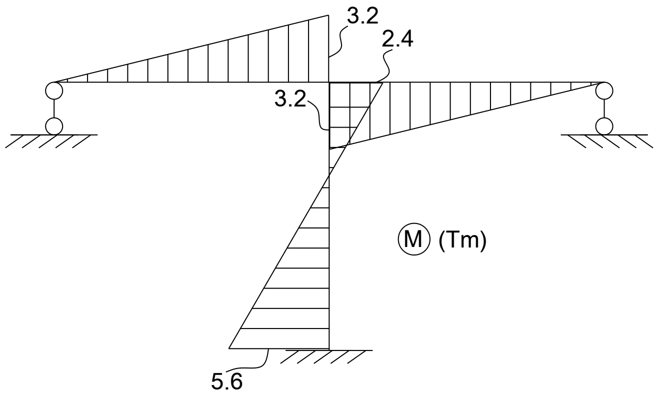
$(M) = (\overline{M}_1)Z_1 + (\overline{M}_2)Z_2 + (M_P^0)$. Kết quả thể hiện trên hình vẽ (*hình 3.3.17*)

+ Biểu đồ lực cắt:

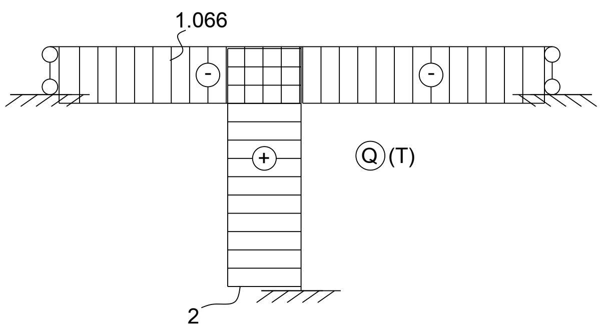
Suy ra từ (M). Kết quả thể hiện trên hình vẽ (*hình 3.3.18*)

+ Biểu đồ lực dọc:

Suy ra từ (Q)



Hình 3.3.17



Hình 3.3.18

3.4. Xác định chuyển vị trong hệ siêu động

3.4.1. Chuyển vị tại các nút

Đó chính là các chuyển vị Z_k tương ứng tìm được khi giải hệ phương trình chính tắc.

3.4.2. Chuyển vị tại các tiết diện bên trong phần tử

Có thể được xác định theo 1 trong 3 cách sau:

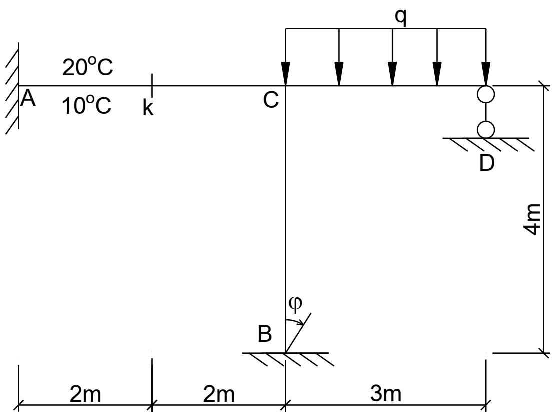
a. Ngay từ đầu, coi tiết diện có chuyển vị cần tìm như 1 nút của hệ. Như vậy, ta đưa bài toán xác định chuyển vị tại tiết diện bất kỳ về bài toán chuyển vị tại nút và thực hiện như đã nêu ở trên. Biện pháp này đơn giản nhưng làm tăng số lượng ẩn số.

b. Sau khi giải bài toán, đã biết được nội lực và chuyển vị ở 2 đầu mỗi phần tử, ta có thể xác định chuyển vị tại tiết diện bất kỳ bên trong phần tử theo các phương pháp đã biết như phương pháp thông số ban đầu, cách xác định chuyển vị trong chương chuyển vị…

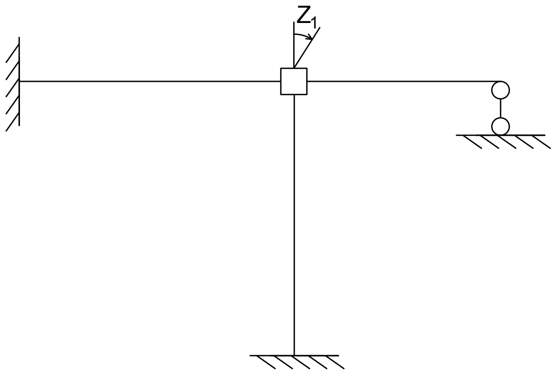
c. Sau khi xác định được nội lực trong hệ siêu động, ta xem hệ là hệ siêu tĩnh với nội lực đã biết và áp dụng cách xác định chuyển vị trong hệ siêu tĩnh như đã biết trong chương phương pháp lực. Trong tính toán thường sử dụng phương pháp này.

3.4.3. Ví dụ

Xác định độ võng tại tiết diện k của hệ hình vẽ (*hình 3.4.1*). Cho EI trên toàn hệ bằng 1000 T.m^2, chiều cao tiết diện các thanh h = 0,3m; hệ số dãn nở vì nhiệt α = $1,2.10^{5}.{}^{0}C^{-1}$; góc xoay φ = 0,005rad.



Hình 3.4.1



Hình 3.4.2

a. Vẽ biểu đồ mômen uốn

❖ *Bậc siêu động*

$$n = n_1 + n_2 = 1 + 0 = 1$$

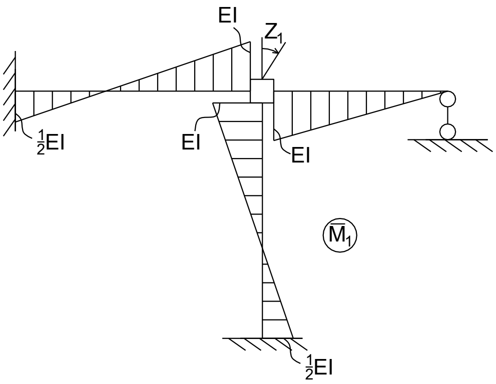
❖ *Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc*

- Hệ cơ bản (*hình 3.4.2*)
- Hệ phương trình chính tắc:

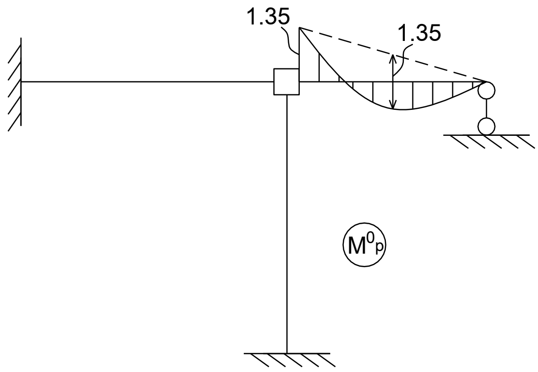
$$r_{11}Z_1 + R_{1P} + R_{1t} + R_{1Z} = 0$$

❖ *Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc*

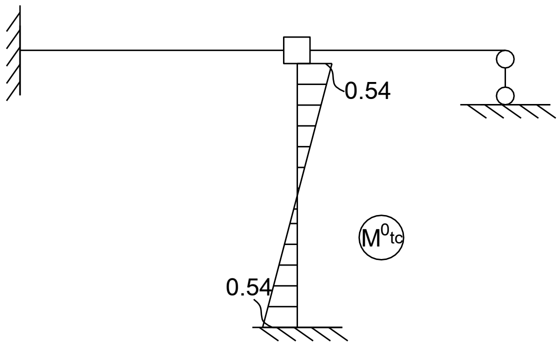
- Vẽ các biểu đồ $\overline{M}_1$, M_P^0, M_t^0, M_Z^0 (*hình 3.4.3, hình 3.4.4*)



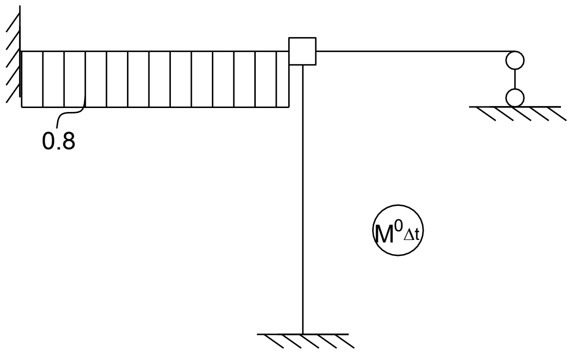
Hình 3.4.3



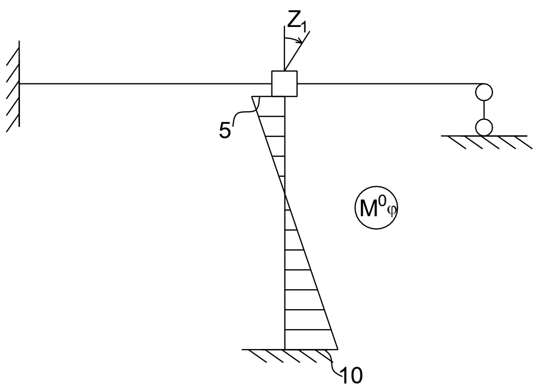
Hình 3.4.4



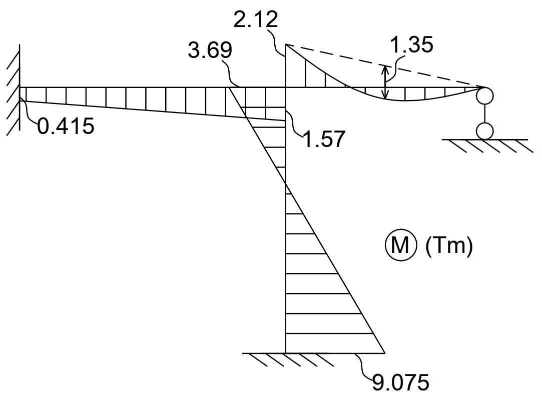
Hình 3.4.5



Hình 3.4.6



Hình 3.4.7



Hình 3.4.8

+ $M_t^0 = M_{tc}^0 + M_{\Delta t}^0$

M_{tc}^0: nguyên nhân t_c trong thanh AC chỉ gây ra chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc trục thanh của thanh BC. Dễ thấy:

$$\Delta l_{BC} = \alpha l_{AC} t_{cAC} = 1{,}2.10^{-5}.4.\frac{10+20}{2} = 0.72mm$$

+ $M_Z^0 = M_\varphi^0 + M_\Delta^0$

Ở đây M_Δ^0 không tồn tại.

- Xác định các hệ số: Từ các biểu đồ đã vẽ, tính được:

+ r_{11} = 3EI; R_{1P} = -1.35

+ $R_{1t} = R_{1tc} + R_{1Dt}$ = -0.54 - 0.8 = -1.34

+ $R_{1Z} = R_{1j}$ = 5

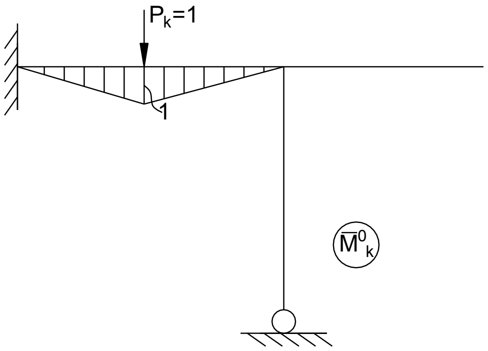
Thay vào hệ phương trình → $Z_1 = -\frac{0.77}{EI}$

❖ Vẽ biểu đồ mômen: $(M) = (\overline{M}_1)Z_1 + (M_P^0) + (M_{tc}^0) + (M_{\Delta t}^0) + (M_\varphi^0)$

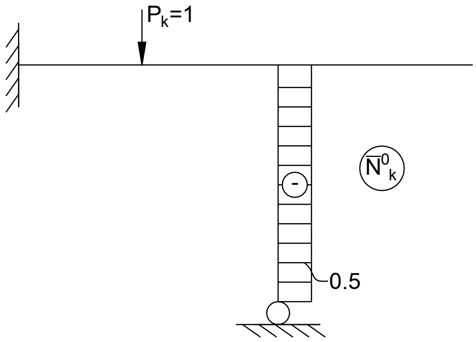
b. Xác định độ võng tại k

- Trạng thái "m" đã được giải với biểu đồ (M) ở trên *hình 3.4.8*

- Trạng thái "k" tạo trên hệ cơ bản của phương pháp lực và xác định $(\overline{M}_k^0)$, $(\overline{N}_k^0)$, $(\overline{R}_{jk}^0)$



Hình 3.4.9



Hình 3.4.10

- Độ võng tại k:

$$y_k = (\overline{M}_k^0)(M) - \sum \overline{R}_{jk}^0 Z_{jm} + \sum \frac{\alpha}{h}(t_2 - t_1)\Omega(\overline{M}_k^0) + \sum \alpha t_c \Omega(\overline{N}_k^0)$$

$$= \frac{1}{EI}.\frac{1.4}{2}.\frac{0.415 + 1.57}{2} - 0 + \frac{\alpha}{0,3}.(10 - 20).\frac{1.4}{2} + 0$$

$$= \frac{1,985}{EI} - \frac{200\alpha}{3} = 0,1925\,(mm) > 0$$

Chuyển vị cùng chiều với P_k.

3.5. Cách tính hệ siêu động chịu sự thay đổi nhiệt độ và chuyển vị cưỡng bức

Sinh viên tự nghiên cứu theo gợi ý sau:

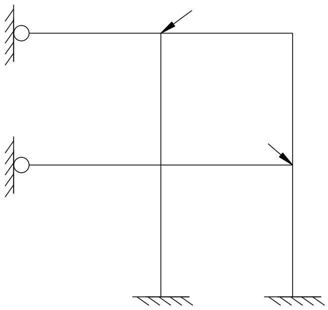
- *So với các bài toán đã học cách tính này có gì khác biệt?*

- *Nội dung của cách tính?*

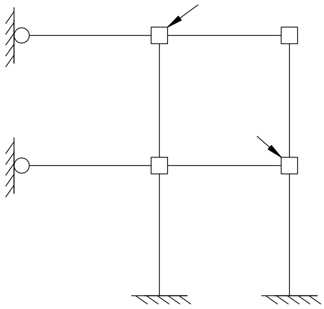
- *Các chú ý khi tính toán?*

3.6. Tính hệ có nút không chuyển vị thẳng chỉ chịu tải trọng là các lực tập trung tại nút

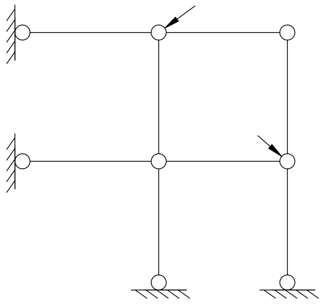
Chẳng hạn hệ cho trên *hình 3.6.1* là thoả mãn yêu cầu bài toán.



Hình 3.6.1



Hình 3.6.2



Hình 3.6.3

Với những loại hệ này thì khi tạo hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị ta chỉ đặt thêm các liên kết mômen (*hình 3.6.2*). Mặt khác, tải trọng chỉ là những lực tập trung tại nút nên biểu đồ M^0_P không tồn tại và do đó R_{kP} cũng không tồn tại.

Vậy hệ phương trình chính tắc tổng quát cho trường hợp này:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + ... + r_{1n}Z_n = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + ... + r_{2n}Z_n = 0 \\ .... \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + ... + r_{nn}Z_n = 0 \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình thuần nhất, đẳng cấp và người ta chứng minh chỉ có nghiệm duy nhất

$Z_1 = Z_2 = … Z_n = 0$

Suy ra biểu đồ mômen của hệ: $(M) = (\overline{M}_1)Z_1 + (\overline{M}_2)Z_2 + ... + (\overline{M}_n)Z_n + (M_P^0)$ sẽ không tồn tại. Suy ra biểu đồ lực cắt của hệ không tồn tại.

Nội lực trong hệ chỉ tồn tại lực dọc, hệ làm việc như 1 hệ dàn với các nút và các ngàm được thay bằng các khớp lý tưởng (*hình 3.6.3*).

Kết luận: Khi tính hệ có nút không chuyển vị thẳng và chỉ chịu tải trọng là các lực tập trung tại nút, ta có thể thay thế các nút và ngàm bằng các liên kết khớp.

3.7. Tính hệ siêu động chịu tải trọng di động

Sinh viên tự nghiên cứu theo gợi ý sau:

- *So với cách tính hệ chịu tải trọng bất động?*

- *Nội dung của cách tính?*

B. <u>Nội dung thảo luận</u>

Câu 1:

Phương pháp chuyển vị được xây dựng trên những giả thiết nào? Hãy phân tích.

Câu 2:

Trình bày cách xác định bậc siêu động của phương pháp chuyển vị? Bậc siêu động phụ thuộc vào những yếu tố nào?

Câu 3:

Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị có gì khác so với hệ cơ bản của phương pháp lực đã học?

Câu 4:

Nêu cách xác định chuyển vị khi tính hệ chịu tác dụng của tải trọng theo phương pháp chuyển vị?

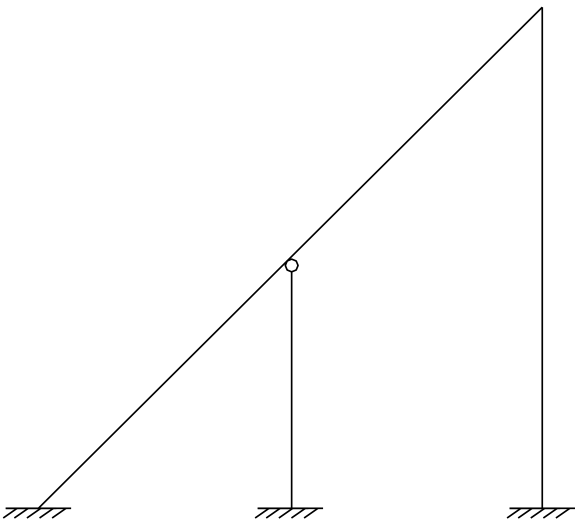
Câu 5:

So sánh phương pháp lực và phương pháp chuyển vị?

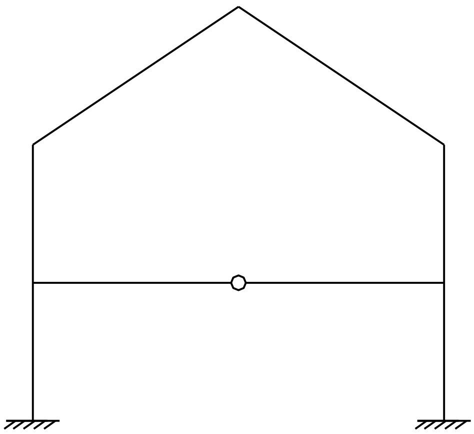
C. <u>Ngân hàng câu hỏi, bài tập</u>

Bài 1:

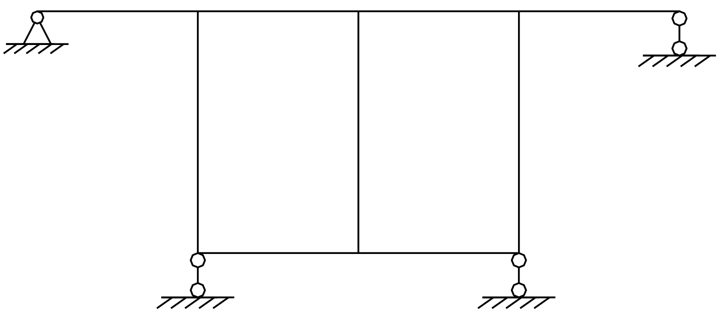
Xác định ẩn số và chọn hệ cơ bản cho hệ trên *hình 1* đến *hình 4* theo phương pháp chuyển vị.



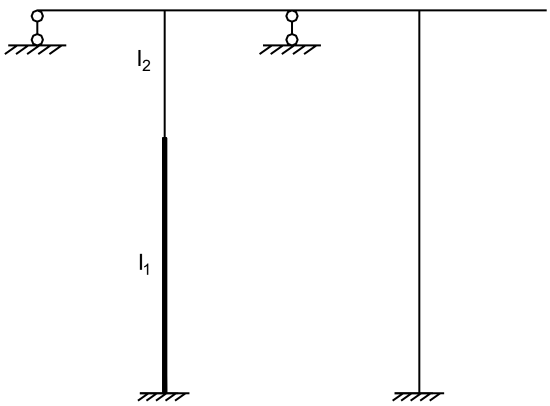
Hình 1



Hình 2



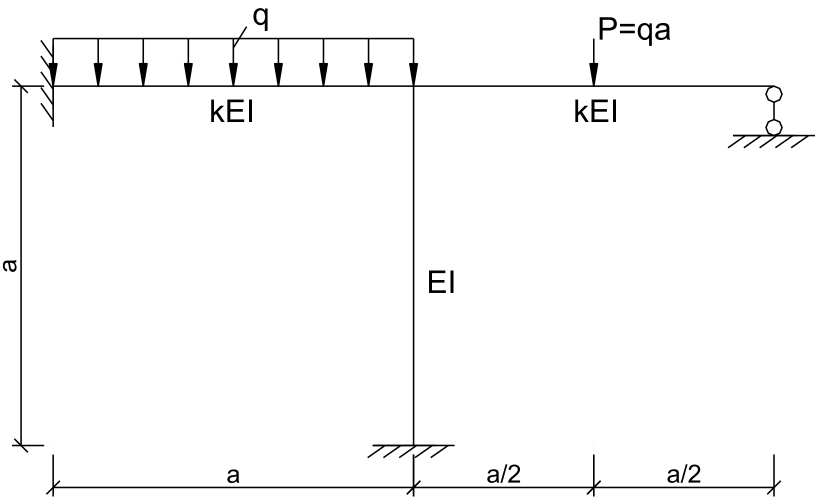
Hình 3



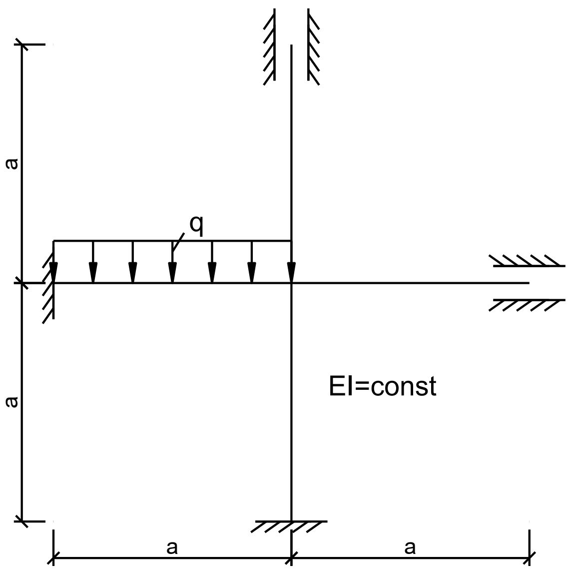
Hình 4

Bài 2:

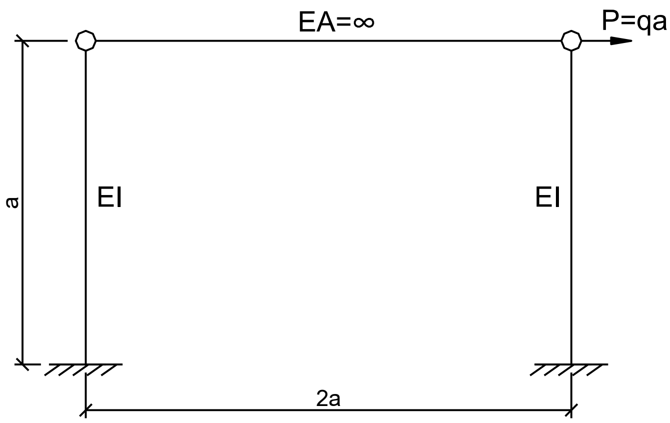
Vẽ biểu đồ mômen uốn, lực cắt, lực dọc trong các khung chịu tải trọng như *hình 5* đến *hình 7*:



Hình 5



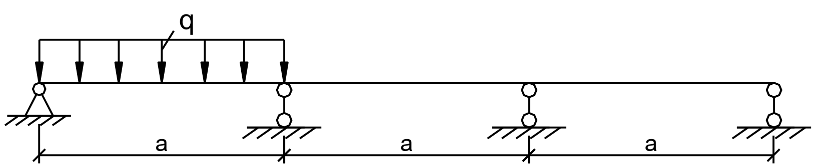
Hình 6



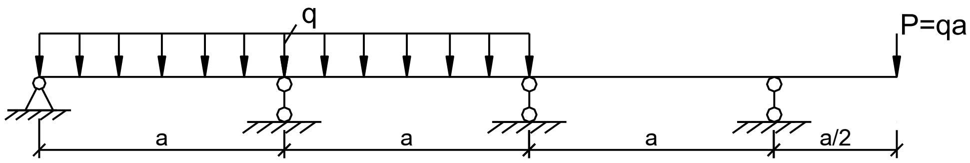
Hình 7

Bài 3:

Vẽ biểu đồ mômen uốn và lực cắt trong dầm liên tục như trên *hình 8* và *hình 9*.



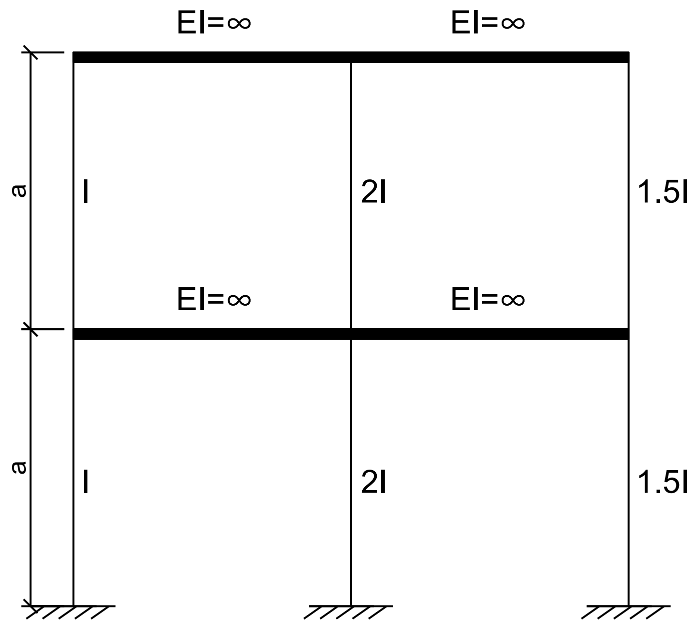
Hình 8



Hình 9

Bài 4:

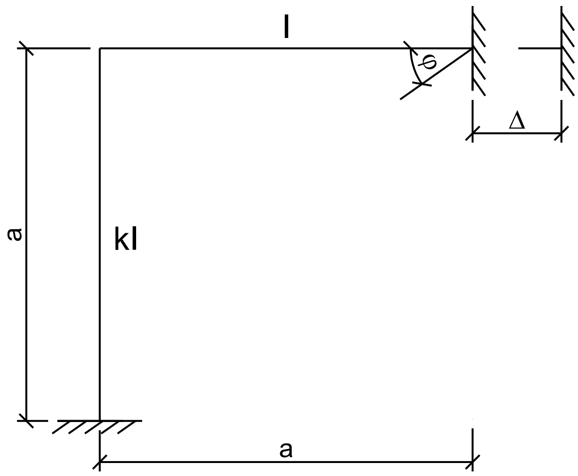
Vẽ biểu đồ mômen uốn trong các thanh đứng như *hình 10*.



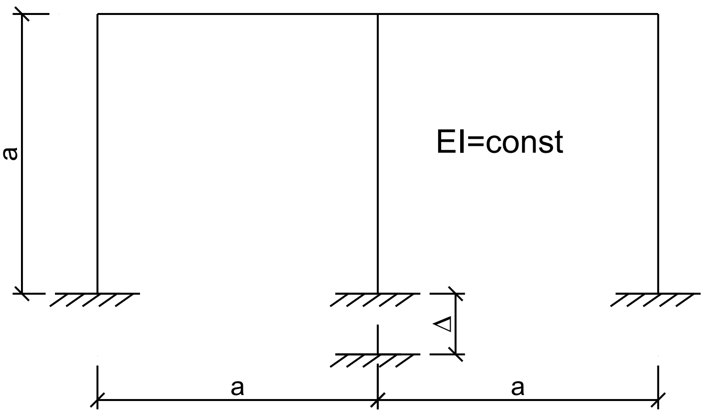
Hình 10

Bài 5:

Vẽ biểu đồ nội lực trong những hệ chịu chuyển vị cưỡng bức tại các kiên kết như *hình 11* và *hình 12*.



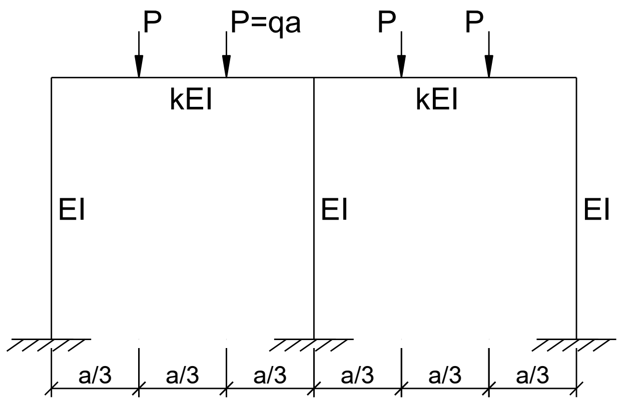
Hình 11



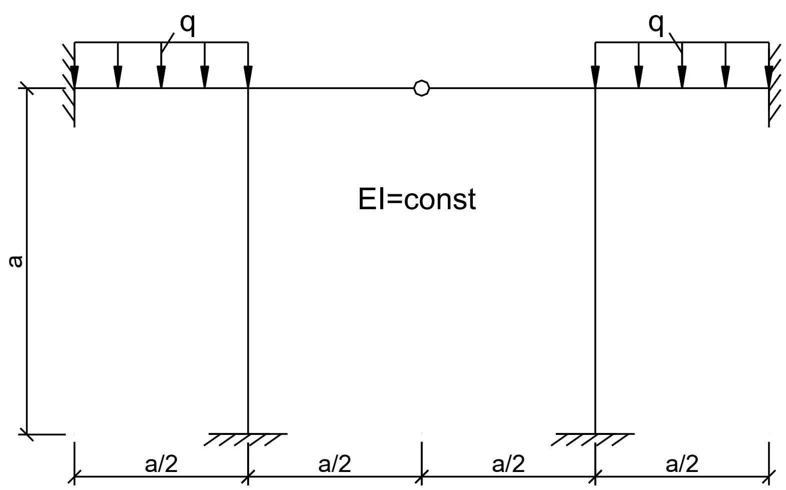
Hình 12

Bài 6:

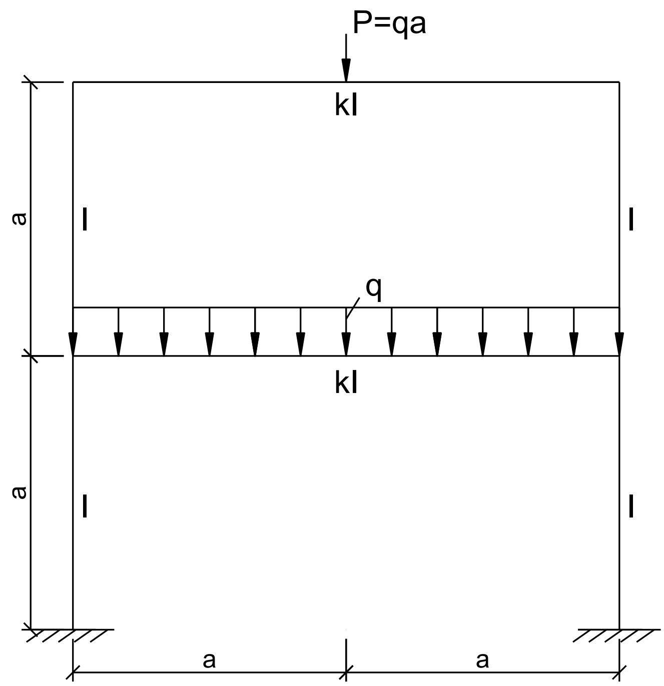
Vận dụng tính chất đối xứng, tìm sơ đồ tính với nửa hệ tương đương và vẽ biểu đồ mômen uốn trong các hệ như *hình 13* đến *hình 16*.



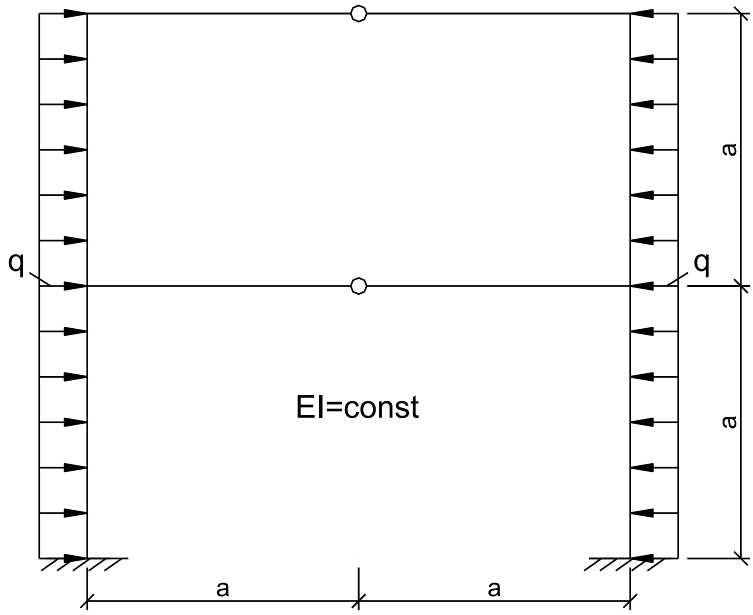
Hình 13



Hình 14



Hình 15



Hình 16

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Lều Thọ Trình. Cơ học kết cấu - Tập I. Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật, 2003.

[2] Lều Thọ Trình. Bài tập Cơ học kết cấu - Tập I. Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật, 2003.

[3] Lê Ngọc Hồng. Sức bền vật liệu. Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật, 2000.

[4] Lều Thọ Trình- Hồ Anh Tuấn. Cách tính hệ siêu tĩnh theo phương pháp phân phối mômen. Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật, 1965.

[5] Lều Thọ Trình- Hồ Anh Tuấn. Cơ học kết cấu - Tập I. Nhà xuất bản Đại học và trung học chuyên nghiệp, 1986.

[6] Timoshenko S.P, Young D. H. Theory of Structures. 2nd. ed. Mc. Graw-Hill Bk. Co, 1965.